数理解析研究所講究録
第256巻 1975年 65-77

Humberger型 moment problem と symmetric operators

宮城教育大　　板垣 芳雄

中村[6]によれば，有界対称作用素のスペクトル分解定理の世に知られている証明の数は20以上におよんでいるという。そのうちでも古い方の一つに moment problem によるものがあり[7]，現代的に整理された証明法としては可換 C^*-algebra の表現定理によるものがあろう。一方，非有界対称作用素の分解定理の証明では，近似有界作用素列の分解表示によったり，Cayley 変換などを介して有界作用素の分解に帰着させる方式がよく知られている。他に有界作用素の場合の証明に合わせた直接証明も調べられているようで，また恒等作用素 I と，自己共役作用素 T のレゾルベント $(T-\lambda I)^{-1}$，$\lambda \in \rho(T)$ から生成される $*$-algebra などの表現を考える証明法もあるが[1]，そこには有界作用素のときには見えない興味ある問題がいろいろ見られるように思われる。その一例にもなろうかと思い，この稿では，Humberger 型

moment problemの結果を用いてスペクトル分解定理の証明のまねごとができることを注意したい(§3)。

実は,有界作用素の場合も含めて,逆に,moment problemが対称作用素のスペクトル分解によって解かれ,その解の一意性は問題に現われる対称作用素の本質的自己共役性といいかえられるわけで,まず§1でそれを紹介しておく。むしろこの部分が主で,というのは,moment problemはいわば無限未知数の連立一次方程式で,当然のことながらその証明中でのHilbert space, symmetric operatorの現われ所はいろいろと示唆に富むと考えられるからである.

§1 Humberger型 moment problem

$\mu(t)$ を実軸 $\mathbb{R}$ 上の regular non-negative measure で $\int_{\mathbb{R}} |t|^i d\mu(t) < \infty$, $i = 0, 1, 2, \cdots$ をみたすものとする.

$$(1) \qquad m_i = \int_{\mathbb{R}} t^i d\mu(t), \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

とおくと

(2) 任意の有限個の複素数 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ に対し

$$\sum_{i,j} m_{i+j} \alpha_i \overline{\alpha_j} \geq 0$$

逆に,(2)をみたす数列 $\{m_i\}$ が与えられて(1)をみたす $\mu(\ )$ が存在するか,というのが Humberger型 moment problem で，答は「常に存在する」。以下 self-adjoint operator のスペクトル分解を用いるその一証明法の概要[2]。

l_F を有限項を除き全て 0 であるような複素数列 $\{\alpha_i\}$ 全体からなる線型空間とする。l_F に

(3) $\quad (\alpha, \beta) = \sum m_{i+j} \alpha_i \bar{\beta}_j \quad , \quad \alpha = \{\alpha_i\},\ \beta = \{\beta_i\}$

で sesqui-linear form を定義する。

条件 (2) より Schwarz の不等式

$$|(\alpha, \beta)| \leqq \|\alpha\| \|\beta\| \quad , \quad \|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$$

が成立し，従って

$$l_0 = \{\alpha \in l_F : \|\alpha\| = 0\}$$

は linear subspace である。通常のように quotient space l_F/l_0 の completion として Hilbert space H を定義する。

さて l_F 上の（shift）operator

$$T\{\alpha_i\} = \{\beta_i\} \quad , \quad \beta_0 = 0,\ \beta_{i+1} = \alpha_i$$

は $(T\alpha, \beta) = (\alpha, T\beta)$ をみたし，よって $Tl_0 \subset l_0$ であるから自然に l_F/l_0 上の symmetric operator $\hat{T}$ を定義する。以下内積等の記号は H 上にもそのまま流用することにする。

Lemma 1. $\hat{T}$ は self-adjoint extension をもつ。

Proof. 任意の $\alpha \in l_F$ に対し，$(T+iI)\alpha = (T-iI)\beta$ なる $\beta \in l_F$ が存在する。逆も同様，よって range について

$$\mathcal{R}(\hat{T}+iI)=\mathcal{R}(\hat{T}-iI)$$

で，l_2における それぞれの直交補空間も等しい，すなわち $\hat{T}$の positive deficiency と negative deficiency は等しい。

上のことから $\hat{T}$はスペクトル分解できて

$$\hat{T}=\int_{\mathbb{R}} t\, dE_t$$

$\mu(t)=(E_t e_0, e_0)$，$e_0=(1,0,0,\cdots)$ とおくと

$$m_i=(T^i e_0, e_0)=\int_{\mathbb{R}} t^i d\mu(t)$$

証明終

Proposition 1. 上に得られた measure $\mu(\ )$ の support と E_t の support は等しい。

また，$\hat{T}$がl_2上 essentially self-adjoint でないときは，任意の実数を eigenvalue にもつように$\hat{T}$の self-adjoint extension ができるから

Proposition 2. 条件(1) をみたす non-negative な $\mu(\ )$ が一意に存在するための条件は $\hat{T}$が essentially self-adjoint であることである。

§2. 関連事項

a) $\mu(\ )$ が一意であるための条件についてはいろいろな形で調べられている [8]。例えば 十分条件としては [3]

(Carleman)

$$\sum_{i=1}^{\infty} (m_{2i})^{-\frac{1}{2i}} = \infty$$

b) semi-norm (3) について, e_0, $e_1 = (0,1,0,\cdots)$, $e_2 =$, … の Gram-Schmidt の直交化法により得られる orthonormal base に関して, 先の operator T の行列表現は対称な Jacobi 行列になる：

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \\ & b_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & & \cdots\cdots & \end{pmatrix} \qquad a_k = \frac{D_k'}{D_k} - \frac{D_{k-1}'}{D_{k-1}}$$

$$b_k = \frac{\sqrt{D_{k-1} D_{k+1}}}{D_k}$$

ただし

$$D_{-1} = 1, \qquad D_k = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_k \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{k+1} \\ \cdots\cdots & & & \\ m_k & m_{k+1} & \cdots & m_{2k} \end{vmatrix}$$

$$D_{-1}' = 0, \quad D_0' = m_1, \quad D_k' = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_{k-1} & m_{k+1} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_k & m_{k+2} \\ \cdots\cdots & & & & \\ m_k & m_{k+1} & \cdots & m_{2k-1} & m_{2k+1} \end{vmatrix}$$

Proposition 3. supp $\mu(\ )$ が bounded $\Leftrightarrow$ $\hat{T}$ が bounded operator $\Leftrightarrow$ $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ が bounded sequence

Proposition 4. supp $\mu(\cdot)$ が bounded で集積点が 0 のみである $\Leftrightarrow$ $\hat{T}$ が compact operator

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = 0 \qquad [5]$$

c) moment problem は次のようにも formulate される。すなわち (1) の $\{m_i\}$ が与えられるということは，$\mathbb{R}$上の複素係数多項式の $*$-algebra $\mathfrak{A}_0$, involution は $p(t) \mapsto \overline{p(t)}$, 上の positive linear functional φ が与えられるということである。ここで positivity (2) は

(4) 任意の $p(t)$ に対し $\quad \varphi(\overline{p(t)}\, p(t)) \geqq 0$

となる。そうすると §1 の証明は $\mathfrak{A}_0$ の φ に関するいわゆる GNS-construction に他ならず，$\mathfrak{A}_0$ の generator $p(t) \equiv t$ に対応する operator が $\hat{T}$, $p(t) \equiv 1$ に対応するベクトルは cyclic vector e_0 である。

d) 2次元の場合の moment problem は $\{m_{ij}\}$ が与えられて

(5) $$m_{ij} = \int_{\mathbb{R}^2} s^i t^j \, d\mu(s,t)$$

なる positive measure $\mu(s,t)$ の存在を問うことになる。

2変数のすなわち$\mathbb{R}^2$上の多項式のなす $*$-algebra 上の linear functional φ が

(6) 任意の $p(s,t)$ に対し $\quad \varphi(\overline{p(s,t)}\, p(s,t)) \geqq 0$

をみたせば，(5) の解 $\mu(\ ,\ )$ は存在するか。

この答は否定的である。それは $\mathbb{R}^2$ 上 $g(s,t) \geq 0$ であるが，有限個の多項式 p_i で $g(s,t) = \sum_i |p_i(s,t)|^2$ とは表わされない多項式 $g(s,t)$ が存在するからである [4]。

条件 (6) より真に強い。

(7) $\quad \mathbb{R}^2$ 上 $g(s,t) \geq 0$ ならば $\varphi(g(s,t)) \geq 0$

なることが $\mu(\ )$ が存在するための必要十分条件になる。

e) 一般に，無限次元の場合，非可換 algebra の場合も研究されており，それは Wightman axiom の algebraic formulation を考える上でも自然に現われる問題のようである。(§4 に拡張例を記す。)

§3. スペクトル分解定理の証明（部分的）

T を separable Hilbert space $\mathcal{H}$ 上の self-adjoint operator, $\Phi = \bigcap_{i=1} \mathcal{D}(T^i)$ とすると

$$T^i x = \int_{\mathbb{R}} t^i dE_t x, \quad x \in \Phi$$

なる spectral measure E_t が存在する。

その moment problem の結果を用いる証明。任意の $x \in \Phi$ に対し，$m_i = (T^i x, x)$ とおくと

$$\sum_{i,j=0}^{n} m_{i+j} \alpha_i \bar{\alpha}_j = \sum_{i,j} (T^{i+j}x, x)\alpha_i \bar{\alpha}_j$$
$$= \sum (\alpha_i T^i x, \alpha_j T^j x)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i T^i x, \sum_{i=0}^{n} \alpha_i T^i x\right) \geq 0$$

よって $\mathbb{R}$ 上の non-negative measure $\mu(\ ,x)$ が存在し

(8) $$(T^i x, x) = \int_{\mathbb{R}} t^i d\mu(t,x)$$

従って任意の多項式 $p(t)$ に対し

$$(p(T)x,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t)d(t,x)$$

さて，$\mathfrak{D}$ の元 $x_1\ (\neq 0)$ をとる。$\{p(T)x_1 : p$ は多項式$\}$ が $\mathcal{H}$ で dense でないとき，$\forall p$ に対し $(p(T)x_1, x_2)=0$ となる 0 でない $x_2 \in \mathcal{H}$ がとれる。故に T は self-adjoint であるから $x_2 \in \mathfrak{D}$．また任意多項式 $q(t)$ に対し

$$(p(T)x_1, q(T)x_2) = (q(T)^* p(T)x_1, x_2) = (\bar{q}(T)p(T)x_1, x_2) = 0.$$

次に，$p(T)x_1$ にも $q(T)x_2$ にも直交する $x_3\ (\neq 0) \in \mathfrak{D}$ をとる。以下同様に $x_4, x_5, \cdots$ をとる。作り方から有限和で $\sum_i p_i(T)x_i$ と表わせる元全体 $\mathfrak{D}_0$ は $\mathcal{H}$ で dense である。

$\mathfrak{D}_0$ の元 $x=\sum_i p_i(T)x_i$，$y=\sum_i q_i(T)x_i$ に対し (8) で定めた μ を用いて

$$\mu(t,x,y) = \sum p_i(t)\bar{q}_i(t)\mu(t,x_i)$$

とおくと

$$(p(T)x,y) = \left(\sum_i p(T)p_i(T)x_i, \sum_i q_i(T)x_i\right)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} p(t)\, d\mu(t,x,y)$$

しかも $\mu(\ ,x,y)$ は $\mathfrak{D}_0$ 上 x, y について sesqui-linear で，また $\mu(\ ,x,x)=\mu(\ ,x)$ は non-negative measure で

あったから

$$0 \leqq \mu(\alpha, x, x) = \int_\alpha d\mu(t, x, x) \leqq \int_{\mathbb{R}} d\mu(t, x, x) = \mu(\mathbb{R}, x, x)$$
$$= (x, x)$$

ゆえに $\mu(\alpha, x, y)$ は $\mathcal{H}$ 上の continuous sesqui-linear form である。よって $\mathcal{H}$ 全体に拡張でき，ある positive operator $E(\alpha)$ により

$$\mu(\alpha, x, y) = (E(\alpha)x, y)$$

と書ける。

§4. 拡張された moment problem

$\mathcal{S}_{4n}$ を $4n$ 変数の急減少無限回可微分関数の空間とする。有限項を除き 0 であるような関数列

$$f = \{ f_0, f_1(x_1), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots \}$$

ただし　$f_n(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_{4n}$，　$x = (x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$

全体からなる空間を考え，通常のようにスカラー倍，和を定義する。この線形空間に，次式により積と involution を導入する。

$$f \times g = \{ \ldots, (f \times g)_n, \ldots \}$$
$$(f \times g)_n = \sum_{i=0}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_i)\, g_{n-i}(x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
$$f^* = \{ \overline{f_0}, \overline{f_1(x_1)}, \ldots, \overline{f_n(x_1, \ldots, x_n)}, \ldots \}$$

この「field algebra」に，非負２重数列 $\{a_{np}\}$ により，

次の semi-norm により topology を導入する。

$$\|f\|_p = \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\substack{x \\ 0 \le \alpha \le p}} |f_n^{(\alpha)}(x_1, \ldots, x_n)|\, a_{np}$$

$$f_n^{(\alpha)}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{0 \le \alpha' \le \alpha} |D^{\alpha'} f_n(x_1, \ldots, x_n)|$$

以下では $a_{np} = (np)^n$ とする。この $\{a_{np}\}$ により定まる topological space を Σ, その dual を Σ' と記すことにする。Σ' の元 W は

$$W = \{ W_0, W_1, \ldots, W_n, \ldots \}$$

$$W_n \in \mathcal{S}_{4n}' \quad ; \text{ dual of } \mathcal{S}_{4n}$$

と表わされ, f のときの値は

$$W(f) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(f_n)$$

Σ はいわゆる Countably normed space であるから, その dual は

$$\|W\|_p = \sup_n \frac{|W_n(f_n)|}{(a_{np})} < \infty$$

なるような functional W 全体を Σ_p' とすれば

$$\Sigma' = \bigcup_{p=1}^{\infty} \Sigma_p'$$

である。

いま, Σ' の元 W が positive とする:

$$W(f \times f^*) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i \bar{f}_{n-i}\right)$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} W_{n+m}(f_n \bar{f}_m) \ge 0, \quad \forall f \in \Sigma$$

そのとき，§1 とのanalogyで，Wについて Hilbert space $\mathcal{H}$ が構成され，次の $T(f_1)$ から定義される $\mathcal{H}$ 上の作用素 $\hat{T}(f_1)$ は self-adjoint extensionをもつ。$f_1(x)$ は実の関数として

$$T(f_1)f = f_1 \times f = \{0,\ f_1(x_1)f_0,\ \ldots,\ f_1(x_1)f_n(x_2,\ldots,x_n),\ldots\}$$

$$f_1 = \{0,\ f_1(x),\ 0,\ \ldots\ \}$$

例えば，Cauchy problem

$$\frac{d\,\omega(t)}{dt} = i\,\overline{\hat{T}(f_1)}\,\omega(t), \qquad \omega(0) = f \in \Sigma$$

の解の一意存在を示すことによって

$\hat{T}(f_1)$ は essentially self-adjoint であることが証明される。

対応して，一般化された moment problem は次のようになる。

実関数 f_1 上で定義された汎関数列 $\{W_n\}$（Σ'の元）が与えられたとき

$$W_n(f_1) = W_n(f_n), \quad f_n = f_1(x_1)f_1(x_2)\cdots f_1(x_n)$$

どのような条件のもとで

$$W_n(f_1) = \int_{\mathbb{R}} t^n d\mu(t\,;f_1)$$

となる non-negative measure $\mu(\ ;f_1)$ が存在するか？

先に述べたことから，$W = \{W_n\}$ が Σ 全体で positive

なるように extend できれば存在し,

$$|W_n(f_1)| \leq C^n n^n$$

なる定数 C が存在すれば, ある p について $W \in \Sigma_p'$ となるから, このとき $\mu(\ ;f_1)$ は一意に定まる。

以上は Borchers and Zimmermann (1964) の結果: $|W_n(f_1)| \leq C^n n!$, の Gačok による改良の紹介であるが, その後 Berezanskiĭ 等の多くの研究があり, 最近の Comm. math. phys 誌にも関連する内容の論文が載っている。

参照 文献

1. R. Beals, Topics in operator theory, The University of Chicago Press. 1971.
2. N. Dunford and J.T. Schwartz, Linear operators II, Interscience Publishers. 1966
3. M. Dubois-Violette, A generalization of the classical moment problem on $*$-algebras with applications to relativistic quantum theory I. preprint.
4. I.M. Gelfand and N.Ya. Vilenkin, Generalized function IV, Academic Press. 1964.
5. M. Krein, Some questions in the theory of moment, Translations of Mathematical Monographs.

6. 中村 正弘, 関数解析入門, 槇書店. 1968.

7. F. Riesz and B. Sz-Nagy, Functional analysis, Frederick Ungar Pub. Co., 1955.

8. J.A. Shohat and J.D. Tamarkin, The problem of moment, American Mathematical Society, 1963.