

Similarity of Operators

東北大 教養 齋藤 偵四郎

§1. 以下考ふるのはすべて Hilbert space 上の bounded linear operators T , \mathbb{C} -operators と呼ぶことにする.
Hilbert space H 上の operators 全体を $B(H)$ と書く.
operator $T \in B(H)$ に対して, λ の spectrum を $\sigma(T)$, λ の numerical range を $W(T)$ と表わし, $W(T)$ の closure を $\overline{W(T)}$ と書くことにする. operators $A, B \in B(H)$ に対して,

$$\exists X \in B(H) \text{ invertible} : B = X^{-1} A X$$

のとき, A と B は similar であるといふ. また,

$$\exists X \in B(H) \text{ invertible} : B = X A X^*$$

のとき, A と B は congruent であるといふ. $U \in B(H)$ を unitary operator とするとき, U を craped であるとは,

$$\exists \theta_0 : \sigma(U) \subset \{e^{i\theta} : \theta_0 < \theta < \theta_0 + \pi\}$$

のときである. operator $T \in B(H)$ に対して

$$\|T\| = r(T) (= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\})$$

ε 満たすとき normaloid,

$$\bar{W}(T) = \text{con}\sigma(T) (= \text{the convex hull of } \sigma(T))$$

α とき convexoid であると言ふ.

operators の similarity の研究の 1 つの発端となつたのは, 次の Beck-Putnam-Berberian の結果である.

定理 A. operator $T \in B(H)$ に対し ε umped unitary operator $U \in B(H)$ が存在して,

$$U^{-1}TU = T^*$$

ならば, T は self-adjoint operator である.

この定理に関連して, 次の問題が考へられた [11], [9], [4], [2], [8].

問題 1. $T, S \in B(H)$, $0 \notin \bar{W}(S)$ とき

$$S^{-1}TS = T^*$$

のとき, T の self-adjoint 性についてどんな情報が得られるか. $0 \notin \bar{W}(S)$ は $0 \notin \sigma(S)$ であるか知られるか.

問題 2. $T, S \in B(H)$, T が invertible, $0 \notin \bar{W}(S)$ とき

$$S^{-1}T^{-1}S = T^*$$

のとき, T の unitary 性についてどんな情報が得られるか. また, $0 \notin \bar{W}(S)$ は $0 \notin \sigma(S)$ であるか知られるか.

後述する様に, 次の 3 条件は同値である (定理 2).

- (1) $T \in B(H)$ は self-adjoint operator と similar.
 (2) $T = PA$, $P \geq 0$ invertible, A self-adjoint.
 (3) $S^{-1}TS = T^*$, $0 \notin \overline{W}(S)$.

上の (2) の性質が invariant subspace の問題に関係することは、次の Radjavi - Rosenthal [5] の結果から分る。

定理 B. $T \in B(H)$, $T \neq \lambda I$ が positive operator と self-adjoint operator の積であれば、 T は non-trivial hyperinvariant subspace を持つ。

これに関連して、次の問題がある。

問題 3. $T \in B(H)$ が T^* と similar であることと、 T が 2 つの self-adjoint operators の積に書けることとの間の関係についてはどんな情報が得られるか。

これについては、次の予想がある [6]。

問題 4. 次の予想は正しいか: invertible operator $T \in B(H)$ が 2 つの self-adjoint operators の積となる必要十分条件は T と T^* が similar なることである。

関連して、 T と T^* の similarity と T と T^{-1} の (または T^{-1} と T^* の) similarity に代わたりどうかあるか。また、similarity と unitary equivalence に代わたりどうかあるかという問題もある。

ここからは、これらの問題に関する Williams [11] 以後の

諸結果について述べる。

§ 2. 問題 1, 2 に関して Williams [17] とその他の人々によって得られた結果は, 次の定理に含まれる。

定理 1 [9] (see [8]). $B(H)$ 上の linear transformation J が

$$J(X^*) = J(X)^* \quad \text{for } X \in B(H)$$

を満たし, 更に

$$\exists S \in B(H) : 0 \notin \overline{W}(S), J(S) = 0$$

であれば,

$$\exists P \geq 0 \text{ invertible} : J(P) = 0.$$

証明. $0 \notin \overline{W}(S), J(S) = 0$ とする. $\overline{W}(S)$ は convex であるから, 必要があれば $S \in e^{i\theta} S$ とおきかえて

$$\overline{W}(S) \subset \{z : \operatorname{Re} z \geq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$$

と仮定してよい. このとき, $P = (S + S^*)/2$ とおけば,

$$\overline{W}(P) = \operatorname{Re} \overline{W}(S) \subset \{z \in \mathbb{R} : z \geq \varepsilon\}.$$

故に P は positive, invertible である。

$$J(P) = \{J(S) + J(S)^*\}/2 = 0.$$

系 1.1. [7], [11] $T, S \in B(H)$ であるとき

$$S^{-1} T S = T^*, \quad 0 \notin \overline{W}(S)$$

ならば, T は self-adjoint operator と similar である。従って, T が convexoid である。

$$S^{-1}TS = T^*, 0 \notin \bar{W}(S) \Rightarrow T \text{ は self-adjoint}$$

が成り立つ。

証明. $J(X) = i(TX - XT^*)$ for $X \in B(H)$ は定理 1 の仮定をみたす. 故に

$$\exists P \geq 0 \text{ invertible: } J(P) = 0 \text{ (i.e. } TP = PT^*)$$

より, $P^{-1/2}TP^{1/2} = P^{1/2}T^*P^{-1/2}$ とおけば, これは T と similar to self-adjoint operator である.

T は convexoid である $S^{-1}TS = T^*, 0 \notin \bar{W}(S)$ であるならば,

$$\bar{W}(T) = \text{con } \sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$$

であるから, T は self-adjoint operator である.

注意 (1) 系 1. 1 の逆が成り立つ,

(2) 系 1. 1 である $0 \notin \bar{W}(S) \Leftrightarrow 0 \notin \sigma(S)$ であるからなることは出来ない.

(3) 系 1. 1 である $T=I$ 条件がなければ, T の self-adjoint 性は保たれない.

系 1. 2. [8]. $T, S \in B(H)$ である

$$T^*ST = S, 0 \notin \bar{W}(S)$$

ならば, T は isometry と similar である.

証明. $J(X) = T^*XT - X$ for $X \in B(H)$ は定理 1 の仮定をみたす. 故に

$$\exists P \geq 0 \text{ invertible; } T^*PT = P$$

$V = P^{1/2} T P^{-1/2}$ とおけば, V は isometry で T と similar である.

上の系の特別の場合として

系 1. 3. [4], [9] (see [8]) (i) $T \in B(H)$ が left inverse T_1 をもち

$$S^{-1} T_1 S = T^*, \quad 0 \notin \bar{W}(S)$$

ならば, T は isometry と similar である.

(ii) $T \in B(H)$ が invertible で

$$S^{-1} T^{-1} S = T^*, \quad 0 \notin \bar{W}(S)$$

ならば, T は unitary operator と similar である.

注意 (1) 系 1. 3 の逆が成り立つ.

(2) 系 1. 3 で $0 \notin \bar{W}(S)$ を $0 \notin \sigma(S)$ とおきかえることは出来ない.

ここで, 問題 2 のあとで述べた結果を証明しておく.

定理 2. [6] $T \in B(H)$ について, 次の 3) の命題は同値である.

(1) T は self-adjoint operator と similar である.

(2) $T = PA$, $P \geq 0$ invertible, A self-adjoint.

(3) $\exists S; S^{-1} T S = T^*, \quad 0 \notin \bar{W}(S).$

証明 (1) \Leftrightarrow (3) は系 1. 1 とその後の注意による.

(2) \Rightarrow (3) 殆んど明らかである.

(3) \Rightarrow (2) $S^{-1}TS = T^*$, $0 \notin \overline{W}(S)$ とすると, 系 1.1 の証明から

$$\exists P \geq 0 \text{ invertible} : TP = PT^*$$

このとき $P^{-1}T = T^*P^{-1}$ であり, これは self-adjoint であるから, $T = P(P^{-1}T)$.

系 1.2, 1.3 において T が実際に isometry (または unitary) となるための T または S の条件は何かという問題が起る. これについての一つの解答は

定理 3 [4]. $T \in B(H)$ が left inverse T_1 を持ち, T と T_1 が共に normaloid であるとすると, 且

$$T^* = S^{-1}T_1S, \quad 0 \notin \overline{W}(S)$$

ならば, T は isometry である.

これは次の補題を用えば容易に分る.

補題 1. $A, B, S \in B(H)$ を p を正整数とすると, λ, μ をそれぞれ A, B の approximate eigenvalues を共通の approximate eigenvectors を持つとすると, 且

$$S^{-1}B^pS = A^*, \quad 0 \notin \overline{W}(S)$$

であれば, $\bar{\lambda} = \mu^p$ が成り立つ.

補題 2. $T \in B(H)$ が left inverse T_1 を持ち

$$T^* = S^{-1}T_1^pS, \quad 0 \notin \overline{W}(S)$$

であれば, $\sigma(T)$ の non-zero boundary point は unit

circle の上 に 覆 々 する .

11 オの補題も [4] の議論を用いければよいので証明は省略する .

定理 3 の証明 . 補題 2 より , $\gamma(T) = \gamma(T_1) = 1$. T_1 , T は共に normaloid であるから $\|T_1\| = \|T\| = 1$.

$$\therefore \|x\| = \|T_1 T x\| \leq \|T x\| \leq \|x\|, \quad \|T x\| = \|x\| \quad (x \in H).$$

注意 . 上の定理で , T_1 の normaloid 性を落とすことはできない [4] .

また , 次の定理が成り立つ .

定理 4 [2] . $T \in B(H)$ が invertible であるとき

$$S^{-1} T^{-1} S = T^*, \quad 0 \in \overline{W}(S)$$

とする . (1) T は convexoid または normaloid (2) T^{-1} は convexoid または normaloid ならば , T は unitary operator である .

証明 . 系 1 , 3 より T は unitary operator と similar , 従って $\gamma(T) = 1$ である . T が convexoid ならば ,

$$\overline{W}(T) \subseteq \{z : |z| \leq 1\},$$

T が normaloid ならば , $\|T\| = \gamma(T) = 1$, 従って

$$\overline{W}(T) \subseteq \{z : |z| \leq 1\}.$$

T^{-1} が unitary と similar であるから , 上と同様に

$$\overline{W}(T^{-1}) \subseteq \{z : |z| \leq 1\}.$$

故に、次の Stampfli の結果 [10] の特別の場合から、 T は unitary である。

補題 3. $T \in B(H)$ から $\sigma(T) \subseteq \{z : |z| = 1\}$ であるとき、

$$\overline{W}(T), \overline{W}(T^{-1}) \subseteq \{z : |z| \leq 1\}$$

ならば、 T は unitary である。

この結果に関連して、次のことは予想するのほかに程不自然なことはないと思う； $T \in B(H)$ から left inverse T_1 を持ち、 $\overline{W}(T) \subseteq \{z : |z| \leq 1\}$ 、 $\|T_1\| \leq 1$ ならば T は unitary である。

系 4. 1. $T \in B(H)$ から left inverse T_1 を持ち、 T^* または T_1 から paranormal^(*) とする。もし

$$S^{-1} T_1 S = T^*, \quad 0 \notin \overline{W}(S)$$

ならば、 T は unitary である。

証明. 一般に right invertible paranormal operator は invertible であることは簡単に示す。従って T^* または T_1 から paranormal の時は、 T から invertible である。 $T^{-1} = T_1$ である。 paranormal operator の inverse である T_1 もまた paranormal であるから、11節の場合も T, T^{-1} から normaloid である。故に定理 4 から T は unitary である。

(*) $A \in B(H)$ から $\|Ax\|^2 \leq \|A^2x\| \|x\|$, $x \in H$ を満たす時、 A は paranormal operator とする。

次の結果は定理 A に対応する。

定理 5 [9]. $T \in B(H)$ が invertible, $U \in B(H)$ が cramped unitary operator ならば

$$U^{-1} T^{-1} U = T^*$$

ならば, T は unitary である。

証明. $T = VP$ は polar decomposition である。ここで V は unitary, P は positive invertible である。

$$T^* = U^{-1} T^{-1} U, \quad 0 \notin \overline{W}(U)$$

であるから

$$T^* = PV^{-1} = U^{-1}(VP)^{-1}U = (U^{-1}P^{-1}U)(U^{-1}V^{-1}U)$$

polar decomposition の一意性から,

$$P = U^{-1}P^{-1}U, \quad 0 \notin \overline{W}(U).$$

P^{-1} は self-adjoint であるから, 系 4. 1 により P は unitary である。また $P \geq 0$ であるから, $P = I$, 従って $T = V$, unitary である。

§ 3. 系 7. 3 の 1) の一般化について述べておく。

定理 6 [4] (see [8]). $T \in B(H)$ が left inverse T_1 を持ち, positive integer $p \geq 1$ ならば

$$T^* = S^{-1} T_1^p S, \quad 0 \notin \overline{W}(S), \quad S \text{ self-adjoint}$$

であるとする。この時, T は isometry と similar である。特に, $T_1 = T^{-1}$ のときは T は unitary と similar である。

証明. $p = 1$ の時は系 1. 3 であるから, $p \geq 2$ とす

る. S は positive, invertible と仮定しよ. この時,

$$A = S^{-1/2} T S^{1/2}, \quad B = S^{-1/2} T_1 S^{1/2}$$

とすれば, $BA = S^{-1/2} T_1 T S^{1/2} = I$. また

$$\begin{aligned} A^* &= S^{1/2} T^* S^{-1/2} = S^{1/2} (S^{-1} T_1^p S) S^{-1/2} = (S^{-1/2} T_1 S^{1/2})^p \\ &= B^p \end{aligned}$$

$$\therefore A^* A = B^p A = B^{p-1} B A = B^{p-1}$$

故に, B^{p-1} は self-adjoint である,

$$I = B^{p-1} A^{p-1} = A^{*p-1} B^{p-1},$$

$$A^{p-1} = (A^{*p-1} B^{p-1}) A^{p-1} = A^{*p-1} (B^{p-1} A^{p-1}) = A^{*p-1}.$$

すなわち, A^{p-1} は self-adjoint invertible である. $(A^{p-1})^{-1} = B^{p-1}$, 従って A は invertible である.

$$B = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = A^{-1}$$

$$A^* = B^p = A^{-p},$$

$$A^* A = A^{-p} A = A A^{-p} = A A^*, \quad A \text{ normal.}$$

$$\therefore r(A) = \|A\| = \|A^*\| = \|A^{-p}\| = \|A^{-1}\|^p.$$

補題 2 より, $\sigma(T) \subset \{z \mid |z| \leq 1\}$, $r(T) = 1$ である.

$$\therefore \sigma(A) \subset \{z \mid |z| \leq 1\}, \quad r(A) = 1.$$

$$\therefore \|A\| = \|A^{-1}\|^p = 1, \quad \|A\| = \|A^{-1}\| = 1.$$

故に A は T と similar to unitary operator である.

系 6. 1. 定理 6 において, $p \geq 2$ ならば T は para-

normal であるならば, T は unitary である.

証明. 定理 6 の証明におよぶ $A = S^{-1/2} T S^{1/2}$ は unitary であるから, $\sigma(T) \subset \{z : |z| = 1\}$ である. para-normal operator の spectrum は unit circle 上に偏るから A は unitary である (see [3]) から, T は unitary である.

注意. $p = 1$ の時, 系 6.1 が成り立つかどうかは恐らくまだ知られていない. (系 4.1 参照)

§4. similarity と operator の factorization の関係について, 若干の結果を述べる.

定理 7 [6] (see [1]). (i) operator $T \in B(H)$ が adjoint T^* と unitary 同値であるための必要十分条件は

$$T = JA, \quad J \text{ symmetry, } A \text{ self-adjoint}$$

となることである.

(ii) invertible operator $T \in B(H)$ が T^{-1} と unitary 同値であるための必要十分条件は

$$T = JV, \quad J \text{ symmetry, } V \text{ involutory}$$

となることである. ここで V が involutory であるとは $V = V^{-1}$ となることである.

証明. (\Leftarrow) $T = JA$, $J = J^* = J^{-1}$, $A = A^*$ とすると

$$JTJ = AJ = T^*$$

$T = JV$, $J = J^* = J^{-1}$, $V = V^{-1}$ とすると,

$$JTJ = VJ = V^{-1}J^{-1} = T^{-1}$$

で (i), (ii) とともに十分性は明らか.

(\Rightarrow) $TU = UT^*$ (resp. $TU = UT^{-1}$), U unitary と仮定すると, Fuglede の定理で

$$TU^* = U^*T^* \quad (\text{resp. } TU^* = U^*T^{-1})$$

$$\therefore T^*U = UT \quad (\text{resp. } T^{-1}U = UT)$$

故に,

$$TU^2 = (TU)U = \begin{Bmatrix} UT^*U \\ UT^{-1}U \end{Bmatrix} = U^2T$$

U^2 のスペクトル表現 $U^2 = \int e^{i\theta} dE_\theta$ を考へ,

$$V = \int e^{i\theta/2} dE_\theta$$

とあげば, V は unitary operator で

$$V^2 = U^2, \quad VU = UV, \quad VT = TV.$$

このとき, $J = V^{-1}U$ とあげば

$$J^* = U^{-1}V = VU^{-1} = V^{-1}U = J = J^{-1}$$

$$(i) \quad T^*U = UT \text{ より}$$

$$(JT)^* = T^*J = T^*V^{-1}U = V^{-1}T^*U = V^{-1}UT = JT$$

で JT は self-adjoint であり, $T = J(JT)$.

$$(ii) \quad T^{-1}U = UT \text{ より}$$

$$(JT)^{-1} = T^{-1}J = T^{-1}V^{-1}U = V^{-1}T^{-1}U = V^{-1}UT = JT.$$

で JT は involutory であり, $T = J(JT)$.

系 7. 1. (i) T が T^* と similar to normal operator ならば, T は 2 つの self-adjoint operators の product

(ii) T が T^{-1} と similar to unitary operator ならば, T は 2 つの symmetry の product.

証明. similar to normal operators は unitary 固有値を有するから (i) は定理 7 は明らか.

また (ii) のときは, 定理 7 より

$$T = JV, \quad J = J^* = J^{-1}, \quad V = V^{-1}.$$

このとき,

$$T^{-1} = T^* = V^{-1}J^{-1} = VJ = (JV)^* = V^*J$$

$$\therefore V^* = V^*JJ = VJJ = V, \quad V^* = V^{-1} = V.$$

V は symmetry である.

系 7. 2. [6]. $S^{-1}TS = T^*$ かつ S が normal operator と congruent ならば, T は 2 つの self-adjoint operators の product である.

証明. $S = RNR^*$, R invertible, N normal とする. $T_0 = R^{-1}TR$ とおけば, $TS = ST^*$ より $T_0N = NT_0^*$.

$N = UP$ は N の polar decomposition とすると, $UP = PU$ であるから, $T_0N = NT_0^*$ より

$$(P^{-1/2}T_0P^{1/2})U = U(P^{-1/2}T_0P^{1/2})^*.$$

U は unitary operator であるから, 定理 7 より

$$P^{-1/2} T_0 P^{1/2} = A_1 B_1; \quad A_1, B_1 \text{ self-adjoint.}$$

故に, $T_0 = (P^{1/2} A_1 P^{1/2})(P^{-1/2} B_1 P^{-1/2})^{-1}$, $P^{1/2} A_1 P^{1/2}$ およ
 $U = P^{-1/2} B_1 P^{-1/2}$ は self-adjoint である. $R = VQ$ は polar
 decomposition とする.

$$\begin{aligned} T &= R T_0 R^{-1} = VQ (P^{1/2} A_1 P^{1/2})(P^{-1/2} B_1 P^{-1/2})^{-1} Q^{-1} V^{-1} \\ &= V(Q P^{1/2} A_1 P^{1/2} Q) V^{-1} V(Q^{-1} P^{-1/2} B_1 P^{-1/2} Q^{-1}) V^{-1}. \end{aligned}$$

$A = VQ P^{1/2} A_1 P^{1/2} Q V^{-1}$, $B = VQ^{-1} P^{-1/2} B_1 P^{-1/2} Q^{-1} V^{-1}$ は共に
 self-adjoint operators である.

注意. U がある invertible operator X normal opera-
 tor と congruent とあるかという問題は知られていない.

系 7. 3. $S^{-1} T S = T^{-1}$ である S が unitary operator
 と similar ならば, T は 2 つの involutory operators の
 product である.

証明. 系 7. 2 の証明と殆んど同じであるから省略す
 る.

系 7. 4 [6]. $T^* = S^{-1} T S$ のとき, S に関する次の条件
 は同値である.

$$(i) \quad S T = T^* S \quad (ii) \quad S^2 T = T S^2 \quad (iii) \quad S^* S T = T S^* S$$

更に, 上のいずれか一つが満たされれば, T は 2 つの self-
 adjoint operators の積に書ける.

証明. (i), (ii), (iii) の同値性は簡単であるから, 後の

部分を証明する.

$S = VP$ を S の polar decomposition とする. ここで V は unitary で P は positive, invertible とする.

$$S^*S = P^2, P^2T = TP^2, \therefore PT = TP, T^*P = PT^*$$

$$\therefore TVP = TS = ST^* = VPT^* = VT^*P$$

P は invertible であるから

$$TV = VT^*, V^{-1}TV = T^*$$

定理 7 より T は symmetry と self-adjoint operator の積である.

注意. $S^{-1}TS = T^{-1}$ の場合に系 7. 4 に対応するものはどうなるのかは完全には分らない. しかし, 次のことは分る: $S^{-1}TS = T^{-1}$ の時 (i) $ST = T^{-1}S$ (ii) $S^2T = TS^2$ は同値で, どちらか一方が満たされて S が self-adjoint の時は T は 2 つの involution の積である.

実際 (i), (ii) の同値性は簡単に分る. また, 上の条件がみたすことで, S が self-adjoint であれば, polar decomposition

$$S = VP, V \text{ unitary}, P \geq 0 \text{ invertible}$$

において

$$S = VP = PV^{-1} (= S^*)$$

$$P^2T = PV^{-1}VPT = S^2T = TS^2 = TPV^{-1}VP = TP^2$$

$$\therefore PT = TP, T^{-1}P = PT^{-1}$$

さて, $TS = TVP$, $ST^{-1} = VPT^{-1} = VT^{-1}P$ かつ $P \geq 0$
 は invertible かつ 2×1 である.

$$TVP = VT^{-1}P \Rightarrow TV = VT^{-1} \Rightarrow T^{-1} = V^{-1}TV$$

故に, 定理 7 より T は symmetry と involutory の積である.

定理 8 [6]. $T \in B(H)$ に関する次の条件は同値である.

(i) T は 2 つの invertible self-adjoint operators の積である.

(ii) symmetry J と positive invertible operator P が存在して, $(PJP)^{-1}T(PJP) = T^*$

(iii) symmetry J と positive invertible operator P が存在して, $J(P^{-1}TP)J = (P^{-1}TP)^*$

(iv) invertible operator R と normal operator N が存在して, $(R^*NR)^{-1}T(R^*NR) = T^*$.

(v) ある invertible operator S が存在して $S^{-1}TS$ は self-adjoint と unitary 同値である.

証明 (iv) \Leftarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Rightarrow (v) は明らかである.

(v) \Rightarrow (i) : $S^{-1}TS$ と $(S^{-1}TS)^*$ が unitary 同値であれば, 定理 7 より

$$\exists A, B \text{ self-adjoint: } S^{-1}TS = AB$$

$$S = UP \quad (U \text{ unitary, } P \geq 0) \quad \text{\textcircled{E} polar decomposition}$$

とす。

$$\begin{aligned} T &= SABS^{-1} = UPABP^{-1}U^{-1} \\ &= (UPAPU^{-1})(UP^{-1}BP^{-1}U^{-1}), \end{aligned}$$

∴, $UPAPU^{-1}$, $UP^{-1}BP^{-1}U^{-1}$ は self-adjoint である。

(iv) \Rightarrow (i) : 系 7. 2.

(i) \Rightarrow (ii) : $T = AB$; A, B self-adjoint invertible とす。 $A = JP$, $P \geq 0$, J symmetry $\in A$ の polar decomposition とす。 $JP = PJ$ ∴

$$(P^{1/2}JP^{1/2})^{-1}T(P^{1/2}JP^{1/2}) = A^{-1}TA = BA = T^*$$

注意. $U^{-1}T^{-1}U = T^*$ の場合は定理 7.1 に対応する結果は
どうなるかわからない。

次の予想がある [1].

T^* , T^{-1} が similar $\Leftrightarrow \exists X$ invertible: $T = X^{*-1}X$

T , T^{-1} が similar $\Leftrightarrow T$ は 2 つの involutory operators の積

参 考 文 献

- [1] Man-Duen Choi, Adjunction and inversion of invertible Hilbert-space operators, *Indiana Univ. J.* 23(1973), 413 - 419.
- [2] C. R. DePrima, Remarks on " Operators with inverses similar to their adjoints ", *Proc. Amer. Math. Soc.* 43(1974), 478 - 480.
- [3] V. Istrătescu, T. Saitô and T. Yoshino, On a class of operators, *Tohoku Math. J.* 18(1966), 410 - 413.
- [4] S. M. Patel, Operators with left inverses similar to their adjoints, *Proc. Amer. Math. Soc.* 41(1973), 127 - 131.
- [5] H. Radjavi and P. Rosenthal, Invariant subspaces for products of Hermitian operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* 43(1974), 483 - 484.
- [6] H. Radjavi and J. P. Williams, Products of self-adjoint operators, *Michigan Math. J.* 16(1969), 177 - 185.
- [7] T. Saitô, Hyponormal operators and related topics, *Lectures on Operator Algebras, Lecture Notes in Math.* 247, Springer-Verlag, 1972.
- [8] T. Saitô, On a theorem by S. M. Patel, to appear.
- [9] U. N. Singh and Kanta mangla, Operators with inverses similar to their adjoints, *Proc. Amer. Math. Soc.* 38(1973), 258 - 260.
- [10] J. G. Stampfli, Minimal range theorem for operators with their spectra, *Pacific J. Math.* 23(1967), 601 - 612.
- [11] J. P. Williams, Operators similar to their adjoints, *Proc. Amer. Math. Soc.* 20(1969), 121 - 123.