数理解析研究所講究録
第256巻 1975年 97-109

Reductive algebra について

東北大 教養 御園生善尚

$\mathfrak{A}$をヒルベルト空間H上の単位元をもつ弱閉な有界作用素の algebra とする．$\mathfrak{A}$で不変なHの任意の部分空間が$\mathfrak{A}$を約するとき，$\mathfrak{A}$を <u>reductive</u> であるという．有界作用素の不変部分空間問題と関連して，いわゆる *transitive algebra problem* がある．この問題の一般化として，Radjavi および Rosenthal は

$\mathfrak{A}$が reductive ならば$\mathfrak{A}$は self-adjoint か

という問題 — reductive algebra problem — を提唱した．Reductive algebra について多くの研究がなされているが [4]，まだ問題は完全に解決されていない．この報告の目的は von Neumann algebra $\mathfrak{A}' \wedge (\mathfrak{A}^*)'$ に注意した考察を，Hoover [3]，Azoff [1] に従って解説することである．

<u>1</u> <u>グラフ部分空間</u> Hをヒルベルト空間，nを自然数とするとき，Hのnコピーの直和を$H^{(n)}$で表わす．AをH上の

作用素とするとき，Aのnコピーの直和として表わされる$H^{(n)}$上の作用素を$A^{(n)}$で表わす．SをH上の作用素の集合とするとき，$S^{(n)} = \{A^{(n)} \mid A \in S\}$とし，$M_n(S)$を各成分がSの要素である$n \times n$行列の集合とする．B(H)をH上のすべての有界作用素の作るalgebraとし，$S \subset B(H)$とするとき$(S^{(n)})' = M_n(S')$および$(M_n(S))' = S'^{(n)}$がなりたつ．Aで不変なHの部分空間の集合をLat Aで表わし，$\mathrm{Lat}\, S = \bigcap_{A \in S} \mathrm{Lat}\, A$とする．$\mathrm{Lat}\, A^{(n)}$，$\mathrm{Lat}\, S^{(n)}$等も同様にして定義する．

以下，$\mathfrak{A}$ ($\subset B(H)$)は単位元をもつalgebraとする．このとき，次の補題がなりたつ．[4, Theorem 7.1]

<u>補題 1.1</u>　$\mathfrak{A}$の強位相に関する閉包は

$$\{B \in B(H) \mid \mathrm{Lat}\, \mathfrak{A}^{(n)} \subset \mathrm{Lat}\, B^{(n)} \text{ for all } n\}$$

に等しい．またこれは弱位相に関する閉包に等しい．

$H^{(n)}$の自明でない部分空間 M が

$$x = (x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n) \in M, \; x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$

をみたすとき，Mを$H^{(n)}$の<u>グラフ部分空間</u>という．このとき，$\mathcal{D} = \{x_1 \mid x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \in M\}$を定義域とするH上の(必らずしも有界とは限らない)作用素$T_2, \cdots, T_n$が存在して

$$M = \{x \oplus T_2 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$$

と表わせる．$T_2, \cdots, T_n$ を M に関する<u>グラフ変換</u>という．

$x = (x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n) \in H^{(n)}$ に対して，x_i を対応させる $H^{(n)}$ から H への projection を π_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) で表わす．S を B(H) の部分集合とし，M を $S^{(n)}$ で不変な $H^{(n)}$ の部分空間とするとき，$\pi_1(M)$ を S の <u>characteristic manifold</u> という．($\pi_i(M)$ ($i = 2, 3, \cdots, n$) も characteristic manifold になる.)

S の characteristic manifold の集合を Char S で表わす．

$$\mathrm{Lat}\, S \subset \mathrm{Char}\, S$$

であることは明らかである．

<u>補題 1.2</u> $\mathcal{B}$ を $\mathfrak{A}$ を含む弱閉な algebra とする．$\mathfrak{A} \subsetneqq \mathcal{B}$ とし，n を $\mathrm{Lat}\, \mathfrak{A}^{(n)} \neq \mathrm{Lat}\, \mathcal{B}^{(n)}$ をみたす最小の自然数とすれば

$$M \in \mathrm{Lat}\, \mathfrak{A}^{(n)}, \quad M \notin \mathrm{Lat}\, \mathcal{B}^{(n)}$$

をみたす $H^{(n)}$ のグラフ部分空間 M が存在する．

証明　補題 1.1 から，$M_1 \in \mathrm{Lat}\, \mathfrak{A}^{(n)}$, $M_1 \notin \mathrm{Lat}\, \mathcal{B}^{(n)}$ をみたす $H^{(n)}$ の部分空間 M_1 が存在する．

$$M_2 = \{ (x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n) \in M_1 \mid x_1 = 0 \}$$

とすれば，M_2 は $\mathfrak{A}^{(n)}$ で不変な $H^{(n)}$ の部分空間であるが，$H^{(n-1)}$ の部分空間と考えることができる．このとき $M_2 \in \mathrm{Lat}\, \mathfrak{A}^{(n-1)}$ であるから仮定より $M_2 \in \mathrm{Lat}\, \mathcal{B}^{(n-1)}$．すなわち $M_2 \in \mathrm{Lat}\, \mathcal{B}^{(n)}$.
いま $M = M_1 \ominus M_2$ とすれば，M が求めるグラフ部分空間である．

<u>定理 1.3</u>　$\mathfrak{A}$が自明でない characteristic manifold をもたないならば，$\mathfrak{A}$は $B(H)$ で稠密である．

証明　補題 1.1から

$$\mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(n)} = \mathrm{Lat}\,B(H)^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

を示せばよい．Mを自明でない $\mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(n)}$ の元とする．補題 1.2からグラフ部分空間として一般性を失なわない．

$$M = \{x \oplus T_2 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$$

とする．仮定から $\mathcal{D} = \pi_1(M) = H$ をうる．したがって，閉写像定理から，$T_2, \cdots, T_n$ は有界である．

$\lambda_i \in \sigma(T_i)$ を任意にとるとき，$T_i - \lambda_i I$ のグラフ

$$\{x \oplus (T_i - \lambda_i I)x \mid x \in H\}$$

は $\mathfrak{A}^{(2)}$ で不変であるから，$\{(T_i - \lambda_i I)x \mid x \in H\}$ は $\mathfrak{A}$ の characteristic manifold で，$\{0\}$ または H である．$\{(T_i - \lambda_i I)x \mid x \in H\} = H$ とすれば，閉写像定理から，$(T_i - \lambda_i I)^{-1} \in B(H)$ となり仮定に反する．ゆえに

$$\{(T_i - \lambda_i I)x \mid x \in H\} = \{0\}$$

すなわち　$T_i = \lambda_i I$ である．iは任意であるから

$$M \in \mathrm{Lat}\,B(H)^{(n)}$$

<u>2</u>　<u>Reductive algebras</u>　$\mathfrak{A}$をH上の弱閉な algebra とする．$\mathfrak{A}$で不変なHの任意の部分空間が$\mathfrak{A}$を約するとき，$\mathfrak{A}$を

reductive であるという．$\mathfrak{A}$ が reductive ならば $\mathfrak{A}^* = \{A^* \mid A \in \mathfrak{A}\}$ および $\mathfrak{A}''$ が reductive であることが容易に示される．$\mathfrak{A}' \wedge (\mathfrak{A}^*)'$ は von Neumann algebra で，これを $\mathcal{I}(\mathfrak{A})$ または単に $\mathcal{I}$ で表わし，$\mathfrak{A}$ の invariant algebra という．

定理 2.1 $\mathfrak{A}$ が reductive で，$\mathcal{I}$ が properly infinite ならば $\mathfrak{A}$ は self-adjoint である．

証明 補題 1.1 から

$$\mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(n)} \leq \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{*(n)} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

を示せばよい．すなわち，すべての自然数 n に対して，$\mathfrak{A}^{(n)}$ が reductive であることを示せばよい．$\mathcal{I}$ が properly infinite であるから

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} P_i = I, \quad P_i \sim I \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

をみたす互いに直交する projection $P_1, P_2, \cdots, P_n$ が存在する．ゆえに $\mathfrak{A}^{(n)}$ は $\mathfrak{A}$ とユニタリ同値で，$\mathfrak{A}$ が reductive であるから，$\mathfrak{A}^{(n)}$ も reductive である．したがって定理が証明された．

定理 2.2 $\mathfrak{A}$ が reductive で，$\mathcal{I}$ が cyclic vector をもつならば $\mathfrak{A}$ は self-adjoint である．

証明 $A \in \mathfrak{A}$，$x_i \in H \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ を任意にとり

$$\mathfrak{U} = \{ T \mid \|(T - A^*)x_i\| < \varepsilon, \ i = 1, 2, \cdots, n \}$$

とする．いま

$$\phi(T) = \sum_{i=1}^{n} (T x_i, x_i)$$

とすれば，ϕ は $\mathcal{J}'$ 上の positive normal linear functional である．$\mathcal{J}$ が cyclic vector をもつから，$\mathcal{J}'$ は separating vector をもつ．ゆえに，すべての $T \in \mathcal{J}'$ に対して

$$\phi(T) = (T x_0, x_0)$$

となるような $x_0 \in H$ が存在する．$\{A x_0 \mid A \in \mathfrak{A}\}$ の閉包を M とすれば，$M \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}$ であることは明らかである．仮定から $\mathfrak{A}$ は reductive であるから，$M \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^*$．ゆえに $A^* x_0 \in M$ をうる．したがって

$$\| B x_0 - A^* x_0 \| < \varepsilon$$

をみたす $B \in \mathfrak{A}$ が存在する．

$$\begin{aligned} \| B x_0 - A^* x_0 \|^2 &= ((B - A^*)^* (B - A^*) x_0, x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} ((B - A^*)^* (B - A^*) x_i, x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \| (B - A^*) x_i \|^2 \end{aligned}$$

であるから

$$\| (B - A^*) x_i \| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

これは $B \in \overline{\mathfrak{A}}$ であることを示している．$\mathfrak{A}$ は強閉であるから $A^* \in \mathfrak{A}$．$A \in \mathfrak{A}$ は任意であったから，$\mathfrak{A}$ が self-adjoint であることが示された．

Reductive algebra problem :

$\mathfrak{A}$ が reductive $\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ は self-adjoint か？

を一歩ゆるめて，

$$\mathfrak{A}\text{ が reductive} \Rightarrow \mathfrak{A}' \text{ は self-adjoint か？}$$

という問題を考えよう。この問題を考えるに当って，次の補題を示そう．

<u>補題 2.3</u>　$\mathfrak{A}$ が reductive であるとき，$\mathcal{J}$ の center は $\mathfrak{A}''$ に含まれる．

証明　P を $\mathcal{J}$ の任意の central projection とし，その値域を M とする．$M \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}'$ であることを示そう．$A \in \mathfrak{A}'$ を任意にとり $\{Ax \mid x \in M\}$ の閉包を M_1 とすれば，$M_1 \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}$ である．M_1 への projection を Q とし，$Q_1 = Q - PQ$ とすれば，$\mathfrak{A}$ が reductive であるから，$Q \in \mathcal{J}$ でかつ Q_1 は P と直交する．

$$(Q_1 A P)^2 = 0$$

であるから，[4, Lemma 9.2] により，$Q_1 A P \in \mathfrak{A}^{*\prime}$ である．したがって $Q_1 A P \in \mathcal{J}$ となり，$Q_1 A P$ は P と可換である．ゆえに

$$Q_1 A P = Q_1 A P P = P Q_1 A P = 0$$

これは $Q_1 = 0$ であることを示している．ゆえに $PQ = Q$．すなわち $M_1 \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}'$．同様にして

$$(I - P) H \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}'$$

が示される．したがって $P \in \mathfrak{A}''$ をうる．P は $\mathcal{J}$ の任意の

central projection であったから補題が示された.

Hの部分空間Mが von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ を約するとき, $\mathfrak{A}|M$ はまた von Neumann algebra である. $\mathfrak{A}$ が reductive の場合, $\mathfrak{A}|M$ の弱閉包がまた reductive であることは容易に示されるが

$\mathfrak{A}|M$ が弱閉であるか

という問題は未解決である. P が $\mathcal{J}$ の central projection であれば

$$\mathcal{J}_P = \mathfrak{A}'_P \wedge (\mathfrak{A}^*)'_P$$

であることを注意しておく.

<u>定理 2.4</u> $\mathfrak{A}$ が reductive で, $\mathcal{J}_P$ が可換でかつ infinite uniform multiplicity であるような central projection が存在しないとき, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^{*\prime}\ (= \mathcal{J})$ である.

証明 補題 2.3 から, $\mathcal{J}$ の central projection P は $\mathfrak{A}'$ に属するから

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'_P \oplus \mathfrak{A}'_{I-P} = (\mathfrak{A}_P)' \oplus (\mathfrak{A}_{I-P})'$$
$$= (\overline{\mathfrak{A}_P})' \oplus (\overline{\mathfrak{A}_{I-P}})'$$

したがって, $\mathcal{J}$ が pure type の場合に定理を示せばよい.

$\mathcal{J}$ が I_∞, II_∞, III 型の場合は, 定理 2.1 から, $\mathfrak{A}$ が self-adjoint であり, $\mathcal{J}$ も self-adjoint である.

$\mathcal{J}$ が II_1 型の場合

$$P_1 \sim P_2 , \quad P_1 + P_2 = I$$

をみたす互いに直交する $\mathcal{J}$ の projection P_1 と P_2 が存在する．$\mathcal{B} = \mathcal{A}_{P_1}$ とすれば

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}^{(2)} , \quad \mathcal{A}' = M_2(\mathcal{B}')$$

ゆえに，$\mathcal{A}'$ が self-adjoint であることを示すには，$\mathcal{B}'$ が self-adjoint であることを示せばよい．$T \in \mathcal{B}'$ とすれば，T は $K = P_1 H$ 上の作用素で

$$M = \{ (x \oplus Tx) \mid x \in K \}$$

は $\mathcal{B}^{(2)}$ で不変である．$\mathcal{B}^{(2)}$ は reductive であるから，M は $\mathcal{B}^{(2)}$ を約する．ゆえにすべての $B \in \mathcal{B}$ に対して

$$(B^*)^{(2)} (x \oplus Tx) = (B^* x , B^* Tx) \in M$$

これは

$$B^* T = T B^*$$

がすべての $B \in \mathcal{B}$ に対してなりたつことを示している．ゆえに $T \in (\mathcal{B}^*)'$ ．したがって $T^* \in \mathcal{B}'$ をうる．すなわち $\mathcal{B}'$ は self-adjoint である．

$\mathcal{J}$ が I_n 型 $(2 < n < \infty)$ の場合は上と同様にして証明できる．$\mathcal{J}$ が I_1 型の場合について示そう．$\mathcal{J}$ は uniform multiplicity n $(n < \infty)$ であると仮定して一般性を失なわない．このとき

$$\mathcal{J} = \mathcal{B}^{(n)} , \quad H = K^{(n)}$$

と仮定できる．ここに$\mathcal{B}$はK上の maximal abelian self-adjoint algebra である．いま$T \in \mathfrak{A}'$とすれば，補題 2.3 から$T \in \mathcal{J}'$である．$n = 1$の場合は，$\mathcal{J}$は maximal abelian であるから$T \in \mathcal{J}$．すなわち$\mathfrak{A}' \in \mathcal{J}$で，$\mathfrak{A}'$は self-adjoint である．$n > 1$とすれば，$\mathcal{J}' = M_n(\mathcal{B})$であるから

$$T = (T_{ij}), \quad T_{ij} \in \mathcal{B} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

と表わせる．［4, Theorem 7.20］から

$$U T U^* = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ 0 & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & S_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix}, \quad S_{ij} \in \mathcal{B}$$

となるような$\mathcal{J}'$のユニタリ作用素Uが存在する．$U\mathfrak{A}U^*$は reductive で，その invariant algebra は$U\mathcal{J}U^* = \mathcal{J}$である．ゆえに，あらかじめ$\mathfrak{A}$として$U\mathfrak{A}U^*$を考えることにより，$i > j$ならば$T_{ij} = 0$と仮定して一般性を失なわない．

いま

$$T' = T - T_{11}^{(n)}$$

とすれば，$T' \in \mathfrak{A}'$であるから

$$M = \mathfrak{N}(T') \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}$$

しかるに，T'の第1列はすべて0であるから，任意の$x \in K$に対して$(x, 0, \cdots, 0) \in M$．これは$M = H$であることを示

している．すなわち $T'=0$．ゆえに $T=T_{11}\in\mathcal{J}$ をうる．これは $\mathfrak{A}'=\mathcal{J}$ であることを示している．したがって $\mathfrak{A}'$ は self-adjoint である．

3 Characteristic manifols $\mathfrak{A}\subset B(H)$ を algebra とし，$R(\mathfrak{A})$ を $\mathfrak{A}$ より生成される von Neumann algebra とする．

定理 3.1 ある $k(\neq 1)$ に対して，$\mathfrak{A}^{(k)}$ の任意の characteristic manifold が $R(\mathfrak{A})^{(k)}$ で不変ならば，$\mathfrak{A}$ は $R(\mathfrak{A})$ で弱稠密である．

証明 補題 1.1 から

$$M\in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(n)} \Rightarrow M\in \mathrm{Lat}\,R(\mathfrak{A})^{(n)} \quad (n=1,2,\cdots)$$

を示せばよい．補題 1.2 から，M をグラフ部分空間として一般性を失なわない．

$$M=\{x\oplus T_2x\oplus\cdots\oplus T_nx \mid x\in\mathcal{D}\}$$

とする．いま

$$M_1=\{\overbrace{x\oplus x\oplus\cdots\oplus x}^{k}\oplus T_2x\oplus\cdots\oplus \overbrace{x\oplus\cdots\oplus x}^{k}\oplus T_nx \mid x\in\mathcal{D}\}$$

とすれば，$M_1\in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(kn)}$ である．ゆえに

$$M_i=\{x\oplus\cdots\oplus x\oplus T_ix \mid x\in\mathcal{D}\}\in \mathrm{Char}\,\mathfrak{A}^{(k)}$$

$(i=2,3,\cdots,n)$ である．したがって M_i は $R(\mathfrak{A})^{(k)}$ で不変である．ゆえに，任意の $B\in R(\mathfrak{A})$ に対して

$$BT_i\subseteq T_iB \quad (i=2,3,\cdots,n)$$

これは M が $R(\mathfrak{A})^{(n)}$ で不変であることを示している。

Voiculescu [5] は $\mathfrak{A}^{(3)}$ で不変な $H^{(3)}$ の任意の有界作用素の値域が $R(\mathfrak{A})^{(3)}$ で不変ならば，$\mathfrak{A}$ は $R(\mathfrak{A})$ で弱稠密であることを示したが，定理はその一般化になっている。

以下この節では，$\mathfrak{A}$ に対して条件：

(C) Char $\mathfrak{A}$ の任意の manifold は $R(\mathfrak{A})$ で不変である

を付加して考えよう。容易にわかることは

(i) $\mathfrak{A}$ が弱閉で (C) をみたせば $\mathfrak{A}$ は reductive である。

(ii) $\mathfrak{A}$ が (C) をみたせば，$\mathfrak{A}$ の弱閉もまた (C) をみたす。

<u>定理 3.2</u> $\mathfrak{A}$ は弱閉でかつ条件 (C) をみたすとする。さらに

$$\sum P_i = I, \quad P_i \sim P_j$$

をみたす $\mathcal{I}$ の互いに直交する projection $\{P_i\}$ が存在すれば，$\mathfrak{A}$ は self-adjoint である。

証明 $\{P_i\}$ を有限個の集合と仮定して一般性を失なわない。これを $\{P_1, P_2, \cdots, P_k\}$ とする。$\mathcal{B} = R(\mathfrak{A})_{P_1}$, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_{P_1}$ とすれば $R(\mathfrak{A}) = \mathcal{B}^{(k)}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1^{(k)}$ であり，PH 上で $\mathcal{B} = R(\mathfrak{A}_1)$ である。したがって，$\mathfrak{A}$ が (C) をみたすことから，$\mathfrak{A}_1^{(k)}$ の characteristic manifold は $\mathfrak{A}$ の characteristic manifold で $\mathcal{B} = R(\mathfrak{A}_1)^{(k)}$ で不変である。ゆえに $\mathfrak{A}_1$ は $R(\mathfrak{A}_1)$ で弱稠密であり，これは $\mathfrak{A}$ が $R(\mathfrak{A})$ で弱稠密であることを示している。$\mathfrak{A}$ は弱閉であった

から $\mathfrak{A} = R(\mathfrak{A})$. すなわち $\mathfrak{A}$ は self-adjoint である.

<u>系 3.3</u> $\mathfrak{A}$ が弱閉で (c) をみたし, $\mathcal{J}$ が I_n 型 (n は奇数) の部分を含まないならば, $\mathfrak{A}$ は self-adjoint である.

<u>系 3.4</u> $\mathfrak{A}$ が弱閉で (c) をみたし, $\mathcal{J}$ が I_n 型 ($n \geq 2$) であれば, $\mathfrak{A}$ は self-adjoint である.

文　献

[1] E A Azoff, Invariant linear manifolds and the self-adjointness of operator algebras, to appear

[2] C Foias, Invariant para-closed subspaces, Indiana Univ. Math. J., 21(1972) 887-906

[3] T.B.Hoover, Operator algebras with reducing invariant subspaces, Pacific J.Math.,44(1973) 173-179.

[4] H.Radjavi and P.Rosenthal, Invariant subspaces, Berlin Springer verlag,(1973)

[5] D.Voiculescu, Sur les sous-espaces parafermes invariants d'une algebre de von Neumann, Bull.Sc.Math.,2^e serie, 96(1972) 161-168