数理解析研究所講究録
第257巻 1975年 36-50

Openness

名大理　鈴村秀司

Introduction. ある種の構造に関係する性質ないし構造があるとき，もとの構造のわずかな変形によっても，その性質ないし構造が変化しないとき，そのような関係をopenness が成立する関係と呼ぶ。Sikata [1] はRiemannian structure と differential structure との関係について opennessが成立することを示した。ここではそのような関係の例をいくつか考えてみる。ひとつは，Part I で証明を与えたRiemannian structure と tangential structure との関係，他のひとつは，Part II で取りあつかう Riemannian structure と isometric imbedding される Euclidean space の次元との関係である。しかし後者は完全には証明されていない。

tangential structure は obstruction を通して immersion と関係があるので，Part I 及び Part II は openness と immesion，openness と imbedding の関係を考えたものだといえる。

Part I. Tangential equivalence (immersion)

M_1, M_2を二つの n-次元 Riemannian manifold とし，d_1, d_2 をそれぞれM_1 M_2の metric であるとする。M_1, M_2の間には同相写像があると仮定する。

定義1. 次をfのLipschitz constantという。

$$l(f) = \sup\{k \mid \tfrac{1}{k} < d_2(f(x), f(y))/d_1(x,y) < k,\ x \neq y\}$$

主定理. $l(f)$を適当におさえれば，TM_1とTM_2はtangential equivalentである。

準備. $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は locally finite なM_1の open covering で，各U_λ; $x_1^\lambda \cdots x_n^\lambda$ は local coordinate である。exp はTM_2からM_2への exponential map とし，AはTM_2内の zero cross-section の開近傍とする。M_2は compact であるので，適当に$\eta > 0$をとり，$\exp_q : A_q \to M_2$ が into-diffeomorphic になるようにできる。ここで $A_q = \{v \in A \cap T_qM_2 \mid \|v\| < 2\eta\}$，$\|\ \|$ はd_2から入るノルムとする。同様に，適当に$\delta > 0$をとり，$\exp_p : B_p \to M_1$ が into-diffeomorphic になるようにできる。ここで $B_p = \{u \in T_pM_1 \mid \|u\| < 2\delta\}$，$\|\ \|$は$d_1$から入るノルムとする。$\exp_{f(p)}^{-1} \circ f \circ \exp_p(B_p) \subset A_{f(p)}$ となるようにδ, ηを選んでおく。

M_1の点pがU_λでおおわれていたとき，T_pM_1内に次のようにして n-simplexを定義する。$\{(\frac{\partial}{\partial x_1^\lambda})_p, \cdots (\frac{\partial}{\partial x_n^\lambda})_p\}$ はT_pM_1の一つ

の直交基底とみなせる。そこで $P_i^\lambda = \delta\, \left(\frac{\partial}{\partial x_i^\lambda}\right)_p / \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x_i^\lambda}\right)_p \right\|$ とおき，$\sigma_\lambda(p) = P_0^\lambda P_1^\lambda \cdots P_n^\lambda$ とおけば，$\sigma_\lambda(p)$ は p に関して連続に変化する n-simplex である。

定義2. $f_{\sigma_\lambda(p)} : T_p M_1 \to T_{f(p)} M_2$ を次のように定義する。

$$T_p M_1 \ni v = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i^\lambda \Rightarrow f_{\sigma_\lambda(p)}(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, g(P_i^\lambda)$$

ここで，$g = \exp_{f(p)}^{-1} \circ f \circ \exp_p$

これで g の従って f の $\sigma_\lambda(p)$ による線形近似ができた。$f_{\sigma_\lambda(p)}$ の線形性及び p についての連続性は明らかである。問題となるのは non-degenerate であるかどうかということである。

補助定理1. $l(f)$ を適当におさえれば，$f_{\sigma_\lambda(p)}$ は non-degenerate である。即ち，

$$l(f) < \eta_1 \quad \Rightarrow \quad f_{\sigma_\lambda(p)} : \text{non-degenerate}.$$

この証明には次を用いる。

補助定理2. $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad g \equiv \exp_{f(p)}^{-1} \circ f \circ \exp_p$ on B_p

$$|\langle g(u), g(v) \rangle - \langle u, v \rangle| \leqq 2(l(g)^2 - 1)(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

補助定理1 の証明. $(\det(f_{\sigma_\lambda(p)}))^2 = \left(\frac{\mathrm{vol}(f_{\sigma_\lambda(p)}(\sigma_\lambda(p)))}{\mathrm{vol}(\sigma_\lambda(p))}\right)^2 = \frac{\det(\langle g(P_i^\lambda), g(P_j^\lambda)\rangle)}{\det(\langle P_i^\lambda, P_j^\lambda \rangle)}$

であるので，$\left| (\det(f_{\sigma_\lambda(p)}))^2 - 1 \right| \leqq \frac{n!}{\delta^{2n}} 4(l(g)^2 - 1) \cdot \delta^{2n} \cdot \frac{1}{4}(5^n - 1)$

ただし，ここで $l^2 \leqq 2$ を仮定した。$A(n) = n!(5^n - 1)$ とおけば，

$$(\det(f_{\sigma_\lambda(p)}))^2 \geqq 1 - A(n)(l(g)^2 - 1)$$

従って。$l(g) < \sqrt{1 + \frac{1}{A(n)}}$ とおけばよい。$l(g)$ と $l(f)$ の関係は次の補助定理3によって与えられるので，$l(f)$ を次のようにする。

$$l(f) < \eta_1 = \frac{1}{(1+\rho)^2}\sqrt{1+\frac{1}{A(n)}}$$ 証明終り。

補助定理3. $T_pM_1 \ni x, y$ に対し，$\forall\rho > 0$ のとき $\exists\varepsilon_1 > 0$ で，$\|x\|, \|y\| < \varepsilon_1$ ならば

$$|d_1(\exp_p x, \exp_p y) - \|x-y\|| \leq \rho\|x-y\|$$

が成立する。

一応これで $f_{\sigma_\lambda(p)}$ が non-degenerate であることが示されたのであるが，ここまでは一つの local coordinate のみについて考えただけであるので，次に，各 local coordinate からできる $f_{\sigma_\lambda(p)}$ をつなぎ合せて，特定の local coordinate によらない h_p を構成する。

補助定理4. M_1 上には1の分割 $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在する。

定義2'. $h_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{f(p)}M_2$ を次のように定義する。

$$T_pM_1 \ni v \Rightarrow h_p(v) = \sum_{U_\lambda \ni p} \varphi_\lambda(p) f_{\sigma_\lambda(p)}(v).$$

h_p の線形性及び p についての連続性は，$f_{\sigma_\lambda(p)}$，φ_λ の定義より明らかである。問題は non-degenerate かどうかである。

補助定理5. $T_pM_1 \ni v$，$\frac{\delta}{2} < \|v\| < 2\delta$ のとき，

$$\|g(v) - f_{\sigma_\lambda(p)}(v)\| < \sqrt{l(g)^2 - 1}\,\|v\|\,C_1(n)$$

ここで，$C_1(n) = 2\sqrt{1+\frac{16}{((n-1)!\,\Theta(\sigma_\lambda))^2}+\frac{24}{(n-1)!\,\Theta(\sigma_\lambda)}}$，$\Theta(\sigma_\lambda) = \frac{vol(\sigma_\lambda(p))}{(diam(\sigma_\lambda(p)))^n}$

証明。$v = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i^\lambda$ とおけば，

$$\|g(v) - f_{\sigma_\lambda(p)}(v)\|^2 = \|g(v)\|^2 + \|f_{\sigma_\lambda(p)}(v)\|^2 - 2\langle g(v), f_{\sigma_\lambda(p)}(v)\rangle$$

イ) $\|g(v)\|^2 \leq \|v\|^2 + 4(l(g)^2-1)\|v\|^2$ （∵ 補助定理2）

ロ) $\|f_{\sigma_\lambda(p)}(v)\|^2 = \langle f_{\sigma_\lambda(p)}(v), f_{\sigma_\lambda(p)}(v)\rangle = \sum_{ij} a_i a_j \langle g(P_i^\lambda), g(P_j^\lambda)\rangle$

$a_i a_j \geqq 0 \quad a_i a_j \langle g(P_i^\lambda), g(P_j^\lambda)\rangle \leqq 4(l(g)^2-1)\delta^2 a_i a_j + a_i a_j \langle P_i^\lambda, P_j^\lambda\rangle$

$a_i a_j < 0 \quad a_i a_j \langle g(P_i^\lambda), g(P_j^\lambda)\rangle \leqq -4(l(g)^2-1)\delta^2 a_i a_j + a_i a_j \langle P_i^\lambda, P_j^\lambda\rangle$

$\sum_{ij} a_i a_j \langle g(P_i^\lambda), g(P_j^\lambda)\rangle \leqq \sum_{ij} a_i a_j \langle P_i^\lambda, P_j^\lambda\rangle + 4(l(g)^2-1)\delta^2 \sum_{ij} |a_i a_j|$

$\therefore \quad \|f_{\sigma_\lambda(p)}(v)\|^2 \leqq \|v\|^2 + 4(l(g)^2-1)\delta^2 \sum_{ij} |a_i a_j|$

ハ) $\langle g(v), f_{\sigma_\lambda(p)}(v)\rangle = \sum_i a_i \langle g(v), g(P_i^\lambda)\rangle$

$a_i \geqq 0 \quad a_i \langle g(v), g(P_i^\lambda)\rangle \geqq a_i \langle v, P_i^\lambda\rangle - a_i 2(l(g)^2-1)(\|v\|^2 + \|P_i^\lambda\|^2)$

$a_i < 0 \quad a_i \langle g(v), g(P_i^\lambda)\rangle \geqq a_i \langle v, P_i^\lambda\rangle + a_i 2(l(g)^2-1)(\|v\|^2 + \|P_i^\lambda\|^2)$

$\therefore \langle g(v), f_{\sigma_\lambda(p)}(v)\rangle \geqq \|v\|^2 - 2(l(g)^2-1)\sum_{i=1}^{n}(\|v\|^2 + \|P_i^\lambda\|^2)|a_i|$

イ), ロ), ハ) より,

$$\|g(v) - f_{\sigma_\lambda(p)}(v)\|^2 \leqq 4(l(g)^2-1)\|v\|^2\left\{1 + \frac{\delta^2}{\|v\|^2}\sum_{ij}|a_i a_j| + \sum_i \frac{\|v\|^2 + \|P_i^\lambda\|^2}{\|v\|^2}|a_i|\right\}$$

$$\leqq 4(l(g)^2-1)\|v\|^2\left\{1 + 4n^2\left(\frac{\|v\|}{n!\,\Theta(\sigma_\lambda)\delta}\right)^2 + n\cdot 12\cdot\frac{\|v\|}{n!\,\Theta(\sigma_\lambda)\delta}\right\}$$

$$\leqq 4(l(g)^2-1)\|v\|^2\left\{1 + \frac{16}{((n-1)!\,\Theta(\sigma_\lambda))^2} + \frac{24}{(n-1)!\,\Theta(\sigma_\lambda)}\right\}$$

ここで, $\Theta(\sigma_\lambda) = \frac{vol(\sigma_\lambda(p))}{(diam(\sigma_\lambda(p)))^n}$, $\quad |a_i| \leqq \frac{\|v\|}{n!\,\Theta(\sigma_\lambda)\cdot\delta}$ (Whitney [3] IV)とした。証明終り。

補助定理6. $U_\lambda \cap U_\mu \ni p$, $\frac{\delta}{2} < \|v\| < 2\delta$ のとき,

$$\|f_{\sigma_\lambda(p)}(v) - f_{\sigma_\mu(p)}(v)\| < \sqrt{l(g)^2-1}\,\|v\|\,C_2(n)$$

ここで, $C_2(n) = \frac{2}{(n-1)!\,\Theta(\sigma_\mu)} C_1(n)$.

証明. $v = \sum_i a_i P_i^\mu$ とおけば,

$$\|f_{\sigma_\lambda(p)}(v) - f_{\sigma_\mu(p)}(v)\| = \|\sum_i a_i f_{\sigma_\lambda(p)}(P_i^\mu) - \sum_i a_i f_{\sigma_\mu(p)}(P_i^\mu)\|$$

$$\leqq \sum_i |a_i|\,\|f_{\sigma_\lambda(p)}(P_i^\mu) - g(P_i^\mu)\|$$

$$\leq n\cdot\frac{\|v\|}{n!\,\Theta(\sigma_\mu)\delta}\sqrt{l(g)^2-1}\;\|v\|\,C_1(n)$$
$$<\frac{2}{(n-1)!\,\Theta(\sigma_\mu)}\sqrt{l(g)^2-1}\;\|v\|\,C_1(n)$$

ここで，$C_2(n)=\dfrac{2}{(n-1)!\,\Theta(\sigma_\mu)}C_1(n)$．補助定理6を用いた。証明終り。

補助定理7．$U_\lambda\cap U_\mu\ni P$，$\frac{\delta}{2}<\|v\|<2\delta$ に対して，

$$l(f)<\eta_2\quad\Rightarrow\quad\|f_{\sigma_\lambda(p)}(v)-f_{\sigma_\mu(p)}(v)\|^2<\|f_{\sigma_\lambda(p)}(v)\|^2+\|f_{\sigma_\mu(p)}(v)\|^2$$

が成立するように η_2 が選べる。

証明．$\|f_{\sigma_\lambda(p)}\|$，$\|f_{\sigma_\mu(p)}\|$ を下から評価する．　$v=\sum_i a_i P_i^\lambda$

イ) $\|f_{\sigma_\lambda(p)}(v)\|^2=\langle f_{\sigma_\lambda(p)}(v),\ f_{\sigma_\lambda(p)}(v)\rangle=\sum_{ij}a_ia_j\langle g(P_i^\lambda),g(P_j^\lambda)\rangle$

$a_ia_j\geq 0\qquad a_ia_j\langle g(P_i^\lambda),g(P_j^\lambda)\rangle\geq -4(l(g)^2-1)\delta^2a_ia_j+a_ia_j\langle P_i^\lambda,P_j^\lambda\rangle$

$a_ia_j<0\qquad a_ia_j\langle g(P_i^\lambda),g(P_j^\lambda)\rangle\geq 4(l(g)^2-1)\delta^2a_ia_j+a_ia_j\langle P_i^\lambda,P_j^\lambda\rangle$

$\sum_{ij}a_ia_j\langle g(P_i^\lambda),g(P_j^\lambda)\rangle\geq -4(l(g)^2-1)\delta^2\sum_{ij}|a_ia_j|+\|v\|^2$

$$\therefore\ \|f_{\sigma_\lambda(p)}(v)\|^2\geq\|v\|^2-4(l(g)^2-1)\delta^2\sum_{ij}|a_ia_j|$$
$$\geq\|v\|^2-4(l(g)^2-1)\cdot\delta^2\left(\frac{2}{n!\,\Theta(\sigma_\lambda)}\right)^2\cdot n^2$$
$$\geq\|v\|^2\left\{1-4^3(l(g)^2-1)\frac{1}{((n-1)!\,\Theta(\sigma_\lambda))^2}\right\}$$

ロ) $\|f_{\sigma_\mu(p)}(v)\|^2\geq\|v\|^2\left\{1-4^3(l(g)^2-1)\dfrac{1}{((n-1)!\,\Theta(\sigma_\lambda))^2}\right\}$

$\therefore\ \|f_{\sigma_\lambda(p)}(v)\|^2+\|f_{\sigma_\mu(p)}(v)\|^2\geq 2\|v\|^2\left\{1-4^3(l(g)^2-1)\dfrac{1}{((n-1)!\,\Theta(\sigma_\lambda))^2}\right\}$

$\sigma_\lambda(p)$ と $\sigma_\mu(p)$ は合同であるので $\Theta(\sigma_\lambda)=\Theta(\sigma_\mu)$ とする。そこで補助定理6を用いて，

$$\|v\|^2(l(g)^2-1)C_2(n)^2<2\|v\|^2\left\{1-4^3(l(g)^2-1)\frac{1}{((n-1)!\,\Theta(\sigma_\lambda))^2}\right\}$$

となるようにすればよい。

$$(l(g)^2-1)\left\{C_2(n)^2+\frac{2\cdot 4^3}{((n-1)!\,\Theta(\sigma_\lambda))^2}\right\}<2$$

$$C_3(n) = C_2(n)^2 + \frac{2\cdot 4^3}{((n-1)!\,\Theta(\sigma_\lambda))^2}$$

$$l(g) < \sqrt{1+\frac{2}{C_3(n)}}$$

ここで再び補助定理３を用いて.

$$l(f) < \eta_2 = \frac{1}{(1+\rho)^2}\sqrt{1+\frac{2}{C_3(n)}} \quad (\eta_2 < \eta_1 \text{ としておく})$$

とおけばよいことになる。証明終り。

補助定理８. $U_\lambda \cap U_\mu \ni p$, $l(f) < \eta_2$ のとき, $T_pM_1 \ni {}^\forall v \neq 0$

$$\|f_{\sigma_\lambda(p)}(v) - f_{\sigma_\mu(p)}(v)\|^2 < \|f_{\sigma_\lambda(p)}(v)\|^2 + \|f_{\sigma_\mu(p)}(v)\|^2$$

が成立する。従って, $\measuredangle(f_{\sigma_\lambda(p)}(v), f_{\sigma_\mu(p)}(v)) < \frac{\pi}{2}$.

証明. 補助定理７, $f_{\sigma_\lambda(p)}$, $f_{\sigma_\mu(p)}$ の線形性より明らか。

以上の準備で h_p が non-degenerate であることが示される。

定理. $l(f) < \min\{\eta_1, \eta_2\}$ のとき h_p は non-degenerate である。

証明. $M_1 \ni {}^\forall p$ に対して, p をおおう local coordinate を $U_{\lambda_1} \cdots U_{\lambda_s}$ とする $T_pM_1 \ni {}^\forall v \neq 0$ を fix する。

$$H \equiv \{ w \in T_{f(p)}M_2 \mid \langle w, f_{\sigma_{\lambda_1}(p)}(v)\rangle > 0 \}$$

補助定理１より, $f_{\sigma_{\lambda_1}(p)}(v) \neq 0$. 従って $H \neq \phi$. H は convex-set であること, 及び $H \not\ni 0$ は容易にわかる。さらに補助定理８より $f_{\sigma_{\lambda_j}(p)}(v) \in H$. 従って $h_p(v) = \sum_{j=1}^{s} \varphi_{\lambda_j}(p) f_{\sigma_{\lambda_j}(p)}(v) \in H$. 故に $h_p(v) \neq 0$. 証明終り.

h_p は p に関して連続であったから TM_1 から TM_2 への bundle map を与える。以上で主定理は証明された。

Part II PL-isometric imbedding (imbedding)

Nash [2]は，Riemannian manifoldはそれがどのようなRiemannian structureを持とうと，manifoldの次元にのみ関係する十分高い次元のEuclid spaceにisometric imbeddingされることを示した。ここで我々はRiemannian structureとisometric imbeddingされるEuclid spaceの次元との関係について調べたいのであるが，まだ完全な結果は得られていない。その時次のことがまず問題となると思われる。即ち，MをRiemannian manifoldとし，R^Nにisometric imbeddingされていると仮定する。このとき，そのRiemannian structureをどのくらいの範囲で変化させるなら，同じR^Nにisometric imbeddingされるかという問題である。

この問題を解決する最初の手がかりとして，MのR^N内における多面体近似Kを考える。そして，その頂点間の距離をふらせて，どのくらいの変化までだったら，その変化させた距離をみたす多面体が同じ次元のEuclid spaceの中に実現できるかを考えてみる。Kにある仮定をつけることにすれば次の定理が得られる。

Theorem. Kの頂点間の距離を中心とし，その振動の幅を$m_1^2 \cdot \delta \cdot \frac{n!(n+1)!}{8\sqrt{en}}$以下にすれば，振動させた距離をみたす多面体Lが$R^N$内に存在する。

Kは次の条件をみたすと仮定する。

1) $\dim K = n$.　$N \geqq n$.

2) $K_0 = \{K$の0-dim simplex$\} = \{P_1, \cdots P_m\}$.

3) $K_n = \{K$のn-dim simplex$\} \ni \sigma$ に対し一様にΘ_0が定まる。$\Theta(\sigma) \geqq \Theta_0 > 0$　$\Theta(\sigma) = \dfrac{vol(\sigma)}{\delta_\sigma^n}$, $\delta_\sigma = diam(\sigma)$.

4) $K_0 \ni P_i$　$n_i = {}^{\#}St(P_i)_0 - 1$　#；集合の元の個数.

$n+1 \leqq n_i \leqq 2n$.

5) $K_0 \ni P_i$ に対し一様にΘ_1が定まる。

$\Theta(\sigma_{P_i}) \geqq \Theta_1 > 0$　$St(P_i)_0 = \{P_i, P_{i1}, \cdots P_{in_i}\}$,

$\sigma_{P_i} \equiv P_i P_{i1} P_{i2} \cdots P_{in_i}$; n_i-simplex.

$K_n \ni \sigma$ の各頂点を変動させて新しくτをR^N内に作るとき，それがつぶれないように変動し得る範囲を求める。

Lemma 1. $K_n \ni \sigma$ に対しある$\xi > 0$が定まり，次が成立する。$R^N \ni Q_1, \cdots, Q_{n+1}$ が $\|Q_i - P_i\| < \xi$ $(i = 1, \cdots, n+1)$をみたすならば，$\tau = Q_1 \cdots Q_{n+1}$ は non-degenerate n-simplexである。ここで$\sigma = P_1 \cdots P_{n+1}$ とする。

Proof. $alt(P_i)$を点P_iから$\sigma_i^{n-1} = P_1 \cdots \hat{P_i} \cdots P_{n+1}$ によって生成される平面までの距離とすれば，$vol(\sigma) = \frac{1}{n} \cdot alt(P_i) \cdot vol(\sigma_i^{n-1})$,
これより $alt(P_i) = \dfrac{n \cdot vol(\sigma)}{vol(\sigma_i^{n-1})} \geqq \dfrac{n \cdot vol(\sigma)}{\frac{1}{(n-1)!}(\delta_\sigma)^{n-1}} = n!\,\delta_\sigma\,\Theta(\sigma) \geqq n!\,\delta\,\Theta_0$ となる。最後の不等式は3)を用いる。$\delta = \min\limits_{\sigma \in K_n} diam(\sigma)$.
$alt(P_i) \leqq \|P_i - P_j\|$ $(j = 1, \cdots, \hat{i}, \cdots, n+1)$であるので，$\xi = n!\,\delta\,\Theta_0/4$

とおけばてはnon-degenerate n-simplexとなる。詳細はWhitney [3] IV.

次にKの近くにあるKと同型な多面体の集合を考える。

Definition 1. $M \equiv \{(Q_1, \cdots, Q_m) \mid Q_i \in R^N \ \|Q_i - P_i\| < \xi\}$

ここでξはLemma 1のξである。

$U_\xi(P_i) = \{x \in R^N \mid \|x - P_i\| < \xi\}$ とすればMは$\prod_{i=1}^{m} U_\xi(P_i)$と同型な$N\cdot m$次元manifoldで、その点は$K$と同型な多面体$L$とみなすことができる。

次にMの点即ち多面体に対しそのとなり合う頂点間の距離を与える写像を考える。

Definition 2. $P : M \longrightarrow R^A$ を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
P(Q) = (& \|Q_{11} - Q_1\|, \|Q_{12} - Q_1\|, \cdots, \|Q_{1n_1} - Q_1\|, \\
& \|Q_{21} - Q_2\|, \|\widehat{Q_{22} - Q_2}\|, \cdots, \|Q_{2n_2} - Q_2\|, \\
& \cdots \\
& \|\widehat{Q_{m1} - Q_m}\|, \|\widehat{Q_{m2} - Q_m}\|, \cdots, \|\widehat{Q_{mn_m} - Q_m}\|)
\end{aligned}
$$

ここで$St(Q_k)_0 = \{Q_k, Q_{k1}, \cdots Q_{kn_k}\}$, $Q = (Q_1, \cdots, Q_m)$.

$\wedge$は一度出た頂点間の距離ははぶくという記号である。上述において、1段目の個数をn_1^*, 2段目の個数をn_2^*, $\cdots$, m段目の個数をn_m^* とすれば, $n_1^* = n_1$, $n_2^* \leq n_2$, $\cdots$, $n_m^* = 0$ であり, $A = n_1^* + n_2^* + \cdots + n_m^* = \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + \cdots + n_m)$となる。仮定4)より, $n \cdot m \geqq A \geqq \frac{n+1}{2} \cdot m$。

これで $N\cdot m$ 次元 manifold M から A 次元 manifold R^A への微分可能写像ができた。さらに P の線形化写像 dP を定義しておく。

Definition 3. $dP : T_K M \longrightarrow T_{P(K)} R^A$ を次のように定義する。ただし $K=(P_1, \cdots P_m)$ とみなす。

$$dP(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(P(K+\varepsilon t) - P(K))$$

$$t = (t_1, \cdots, t_m) \in T_K M, \quad t_i \text{ vector in } R^N$$

以上で準備はできた。我々の問題は言い換えると, K の M における近傍 U を適当にとれば $P(U)$ は R^A で open set になっているかということである。そのためには次の Lemma が必要である。

Lemma 2. $dP : T_K M \longrightarrow T_{P(K)} R^A$ は onto-map である。

Proof. $T_{P(K)} R^A \ni e_1, \cdots, e_A$ を standard な base とするとき, これらの vector に写るような vector が $T_K M$ でさがすことができることを示す。ここでは e_1 に写る $T_K M$ の vector の構成法を示す。$St(P_1)_0 = \{P_1, P_{11}, P_{12}, \cdots, P_{1n_1}\}$ としておく。

$$\pi_j = \{ v \in R^N \mid v \perp \overrightarrow{P_1 P_j} \} \quad (j = 1, \cdots, n_1)$$

とすれば, $\dim \pi_j = N - 1$. さらに次のことが成立する。

$$\dim \pi_2 \cap \cdots \cap \pi_{n_1} = N - (n_1 - 1)$$

これは数学的帰納法と仮定 5) を用いて示される。仮定 1), 4) によって $N-(n_1-1) > 0$ であるので, R^N の直交分解ができる。

$$R^N = \pi_2 \cap \cdots \cap \pi_{n_1} \oplus \{\{\overrightarrow{P_1P_{12}}, \cdots, \overrightarrow{P_1P_{1n_1}}\}\}$$

$\overrightarrow{P_1P_{11}}, \cdots, \overrightarrow{P_1P_{1n_1}}$ は仮定5)より一次独立である。$\overrightarrow{P_1P_{11}} \notin \{\{\overrightarrow{P_1P_{12}}, \cdots \cdots \overrightarrow{P_1P_{1n_1}}\}\}$. 故に,

$$\overrightarrow{P_1P_{11}} = t_{11} \oplus \alpha, \quad t_{11} \neq 0, \quad t_{11} \in \pi_2 \cap \cdots \cap \pi_{n_1},$$

と分解できる。再び仮定5)より, $\sigma_{11}^{n_1-1} = P_1P_{12} \cdots P_{1n_1}$, $\sigma_{11}^{n_1} = P_1 \cdot P_{11}P_{12} \cdots P_{1n_1}$ はつぶれないsimplexである。

$$h_{11} = alt(P_{11}) = \frac{n_1 \cdot vol(\sigma_{11}^{n_1})}{vol(\sigma_{11}^{n_1-1})}$$

とおけば, 直交分解の性質より次が成立する。

$$\left\langle \frac{t_{11}}{\|t_{11}\|}, \frac{P_1 - P_{11}}{\|P_1 - P_{11}\|} \right\rangle = \frac{h_{11}}{\|P_1 - P_{11}\|}$$

$T_kM \ni (t_{11}, 0, \cdots, 0) = \tilde{v}$ とおけば,

$$\begin{aligned} dP(\tilde{v}) = \Big(& \left\langle t_{11}, \frac{P_1 - P_{11}}{\|P_1 - P_{11}\|} \right\rangle, \left\langle t_{11}, \frac{P_1 - P_{12}}{\|P_1 - P_{12}\|} \right\rangle, \cdots, \left\langle t_{11}, \frac{P_1 - P_{1n_1}}{\|P_1 - P_{1n_1}\|} \right\rangle, \\ & \left\langle 0, \frac{P_2 - P_{21}}{\|P_2 - P_{21}\|} \right\rangle, \left\langle 0, \frac{P_2 - P_{22}}{\|P_2 - P_{22}\|} \right\rangle, \cdots, \left\langle 0, \frac{P_2 - P_{2n_2}}{\|P_2 - P_{2n_2}\|} \right\rangle, \\ & \cdots \\ & \left\langle 0, \frac{P_m - P_{m1}}{\|P_m - P_{m1}\|} \right\rangle, \left\langle 0, \frac{P_m - P_{m2}}{\|P_m - P_{m2}\|} \right\rangle, \cdots, \left\langle 0, \frac{P_m - P_{mn_m}}{\|P_m - P_{mn_m}\|} \right\rangle \Big) \\ = \Big(& \frac{\|t_{11}\|}{\|P_1 - P_{11}\|} h_{11}, 0, \cdots, 0 \Big) \end{aligned}$$

$\left\langle t_{11}, \frac{P_1 - P_{12}}{\|P_1 - P_{12}\|} \right\rangle = \cdots = \left\langle t_{11}, \frac{P_1 - P_{1n_1}}{\|P_1 - P_{1n_1}\|} \right\rangle = 0$ は $t_{11} \in \pi_2 \cap \cdots \cap \pi_{n_1}$ より明らか。dP はlinearだから $v_1 = \frac{\|P_1 - P_{11}\|}{\|t_{11}\| h_{11}} \tilde{v}$ とおけば,

$$dP(v_1) = e_1$$

となる。同様に, $v_2, \cdots, v_l$ が構成できて $dP(v_i) = e_i$ となる。これで dP のontoは示された。証明終り。

Theorem 1. $\mathbb{P}: M \longrightarrow R^s$ は open map である。

Proof. lemma 2より陰函数定理が用いることができるので証明できたことになる。

これで openness は示された。

次に重要なことは頂点間に与えられた距離がどのくらいの範囲にわたって振動し得るかということである。そのためには $d\mathbb{P}$ の逆写像を構成し，そのノルムを求めなければならない。

Definition 4. $G: T_{P(K)}R^s \longrightarrow T_K M$ を次のように定義する。

$$G(e_i) = v_i \quad (i = 1, \cdots, s)$$

Lemma 3. $T_K M = \{t = (t_1, \cdots, t_m) \mid t_i \in R^N\}$ のノルムを $\|t\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|t_i\|^2$ とすると，

$$\|G(x)\| \leqq \sqrt{2n} \cdot \frac{2\delta}{h} \|x\| \qquad x \in T_{P(K)}R^s$$

が成立する。$h = \min h_{ij} \quad j \in \{1, \cdots, n_i\}$, $\delta = \min_{\sigma \in K_n} \operatorname{diam}(\sigma)$.

Proof. $T_{P(K)}R^s \ni x = a_1 e_1 + \cdots + a_s e_s$.

$$\|G(x)\|^2 = \| a_1 v_1 + \cdots + a_s v_s \|^2$$

$$= \| a_{11} \frac{\|P_1 - P_{11}\|}{\|t_{11}\| h_{11}} t_{11} + \cdots + a_{1n_1} \frac{\|P_1 - P_{1n_1}\|}{\|t_{1n_1}\| h_{1n_1}} t_{1n_1} \|^2$$

$$+ \| a_{21} \frac{\|P_2 - P_{21}\|}{\|t_{21}\| h_{21}} t_{21} + \cdots + a_{2n_2} \frac{\|P_2 - P_{2n_2}\|}{\|t_{2n_2}\| h_{2n_2}} t_{2n_2} \|^2$$

$$\cdots$$

$$+ \| a_{m1} \frac{\|P_m - P_{m1}\|}{\|t_{m1}\| h_{m1}} t_{m1} + \cdots + a_{mn_m} \frac{\|P_m - P_{mn_m}\|}{\|t_{mn_m}\| h_{mn_m}} t_{mn_m} \|^2$$

$$\leqq n_1^* \left[a_{11}^2 \left(\frac{\|P_1 - P_{11}\|}{h_{11}} \right)^2 + \cdots + a_{1n_1}^2 \left(\frac{\|P_1 - P_{1n_1}\|}{h_{1n_1}} \right)^2 \right]$$

$$+ n_2^* \left[a_{21}^2 \left(\frac{\|P_2 - P_{21}\|}{h_{21}} \right)^2 + \cdots + a_{2n_2}^2 \left(\frac{\|P_2 - P_{2n_2}\|}{h_{2n_2}} \right)^2 \right]$$

$$+ n_m^* \left[a_{m1}^2 \left(\frac{\|P_m - \hat{P}_{m1}\|}{h_{m1}} \right)^2 + \hat{\cdot} \cdot \hat{\cdot} + a_{mn_m}^2 \left(\frac{\|P_m - \hat{P}_{mn_m}\|}{h_{mn_m}} \right)^2 \right]$$
$$\leqq 2n \cdot \max\left(\frac{\|P_i - P_j\|^2}{h_{ij}} \right) \cdot (a_1^2 + \cdots + a_s^2)$$
$$\leqq 2n \cdot \frac{(2\delta)^2}{h^2} \|x\|^2$$
$$\therefore \quad \|G(x)\| \leqq \sqrt{2n} \frac{2\delta}{h} \|x\|$$

ここで $h = \min h_{ij}$, $\|P_i - P_j\| \leqq 2\delta$ とおいた。

この評価式で $\|x\|$ の変化がどのくらいならば，$\|G(x)\|$ の変化がどのくらいであるかがわかった。これから $G(x)$ が $\exp_{P_k}$ の cut-locus 以内に入るためには x をどれくらいまで制限したらよいかわかる。

Lemma 4. $D(\exp_{P_k}) = \{ t = (t_1, \cdots, t_m) \mid \|t\| < \xi \}$ とおく。

$$\exp_{P_k} : D(\exp_{P_k}) \longrightarrow M \quad \text{diffeomorphic}$$

となる。

Proof. $M \cong \prod_{i=1}^{m} U_\xi(P_i)$ $\quad T_K M \cong \prod_{i=1}^{m} T_{P_i} U_\xi(P_i)$ より明らか。

Theorem 2. K の頂点間の距離を中心とし，その振動の幅を $\frac{n!(n+1)!}{8\sqrt{2n}} \cdot \delta \cdot \Theta^2$ 以下にすれば，振動させた距離をみたす多面体 L が R^N 内に存在する。

Proof. Lemma 4. Lemma 3 より $G(x) \in D(\exp_{P_k})$ となるような x の範囲を求めればよい。$\sqrt{2n} \frac{2\delta}{h} \|x\| < \xi$ ならば $\|G(x)\| < \xi$ 従って，$G(x) \in D(\exp_{P_k})$. Lemma 1 より $\xi = \frac{n!\delta\Theta_0}{4}$. $h \leqq \delta \cdot \Theta_1 \cdot (n+1)!$ $\Theta_0 \geqq \Theta_1$ [Whitney[3] IV] より $\|x\| < \frac{n!(n+1)!}{8\sqrt{2n}} \delta \cdot \Theta^2$ とすればよい。

参考文献

[1] Sikata. On a distance function on the set of differentiable structure.

[2] Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds.

[3] Whitney. Geometric Integration Theorey.