

Topologically stable unfolding について

千葉 九 理 福田 拓生

Introduction Thom の初等カタストロフィー理論は、基本的には、 C^r 級関数の C^r 級同相による分類である。所で、このように分類すると、余次元 ≥ 6 の関数の類の数は連続濃度となる。(cf, Arnold [1], Siersma [7])。従って、それらの安定開折 = 普遍開折の C^r 同値類の数も連続濃度となる。カタストロフィー理論の応用から考えると、現象が観察される空間(いゝかえるとコントロール空間)の次元が 6次元以上の場合には、分類したものが多すぎて役に立たない。

一方、 C^r 級関数を同相写像で分類することにより、Thom の初等カタストロフィーと同様の議論を組立てることが出来る。カタストロフィー理論の基本的アイデアが関数の minima のタイプを分類することであることを考えると、同相写像による分類で充分である。そして、この場合には、上記の欠点(類の数 $\geq \infty$) が解消されることが、何となく知られている。(cf. T. Fukuda [2], F. Looyenga [3], J. Mather [4] には

implicit にこのことが含まれている。)しかしこの事実をきちんと述べたものはみあたらず、その証明を与えているものはないようである。

関数の開折を位相型で分類することは、カタストロフィー理論のみでなく、hyper surfaceの特異点、写像の特異点、Analytic spaceの局所論において非常に重要であると思われる。この小論の目的は上の事実の証明の概略を与えることである。証明することは次のことである。

主定理 次元 n を任意に固定したとき 次元 n の topologically stable unfolding をもつ関数の位相型とそれらの n 次元の top. stable unfolding の位相型は 有限個である。

目次

- §1 諸定義 (universal unfoldings と stable unfoldings)
- §2 Thomの初等カタストロフィーから
- §3 Topologically stable unfoldings
- §4 Key lemma の証明
- §5 主定理の証明

§1 では 展開 (unfolding) の概念を導入する。§2 では、Thom の初等カタストロフィ理論の骨子を述べられる。§3 では位相型による分類においても、同様の骨組ができることを述べる。§4 と §5 で そのことが証明される。

§1 諸定義 (universal unfolding と stable unfolding)

記号. $C^\infty(M, N) = \{f: M \rightarrow N \mid C^\infty \text{級写像}\}$

$J^k(M, N) = M$ から N への写像の k -jets のなす C^∞ 級多様体

$J^k(m, n) = \{z \in J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \mid \text{原点を原点に移す写像の } k\text{-jets}\}$

$jkf: M \rightarrow J^k(M, N)$: M の各点 p に対して写像 $f: M \rightarrow N$ の

点 p における k -jet $jkf(p)$ を対応させる写像。

$L^k(n) = \mathbb{R}^n$ の原点を fix する C^∞ 級同相写像の原点における

k -jets のなすリー群

$L^k(n)(jkf(o))$: $jkf(o) \in J^k(n, 1)$ とあるとき, $L^k(n)$ は

$J^k(n, 1)$ にリー変換群として作用するか, その $jkf(o)$

を通る orbit.

$\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$: n 変数の実係数の多項式のなす環。

$M_n = \{f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \mid f(o) = 0\}$: 原点に対応する $\mathbb{R}[X_1,$

$\dots, X_n]$ の極大イデアール。

E_n : \mathbb{R}^n の原点の近傍で定義された C^∞ 級関数の原点における germs の石環

M_n : E_n の極大イデアル

$f: (X, p) \rightarrow (Y, q)$: 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ の点 p における germ をあらわす: $f(p) = q$

定義 1.1 C^∞ 級写像 $f_i: M_i \rightarrow N_i$, $i=1,2$ が C^∞ 級 (resp. C^0 級) 右同値であるとは, $N_1 = N_2 = \mathbb{R}^n$ であって, C^∞ 級 (resp. C^0 級) 同相写像 $h: M_1 \rightarrow M_2$ と平行移動 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が存在して $f_1 = T \circ f_2 \circ h$ が成立するときという。写像芽の右同値についても同様に定義する。

定義 1.2 C^∞ 級写像芽 $f: (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}, c)$ に対して

$$F(x, b) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

をみる C^∞ 級写像芽 $F: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (a, b)) \rightarrow (\mathbb{R}, c)$ を f の n 次元 unfolding (unfolding) という。

注意 1.3 $u \in \mathbb{R}^2$ に対して F_u を $F_u(x) = F(x, u)$ で定義する。そのとき, f の unfolding は \mathbb{R}^2 をパラメータとする変形族 (deformation) $\{F_u\}_{u \in \mathbb{R}^2}$ と考えることができる。

定義 1.4 $F: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2, (a, b)) \rightarrow (\mathbb{R}, c)$ 及び $G: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d, (a, b)) \rightarrow (\mathbb{R}, c')$ をそれぞれ f 及び g の開折とする。そのとき、組 $\Phi = (H, \varphi, \alpha)$ が次の条件を満たすとき、 Φ を G から F への C^0 級 (resp. C^∞ 級) 開折写像 (unfolding morphism) といい：

(i) $H: (\mathbb{R}^{n+d}, (a', b')) \rightarrow (\mathbb{R}^n, a)$ は C^0 級 (resp. C^∞ 級) 写像芽で制限 $H|_{\mathbb{R}^n \times \{b'\}}: (\mathbb{R}^n \times \{b'\}, (a', b')) \rightarrow (\mathbb{R}^n, a)$ は C^0 級 (C^∞) 同相。

(ii) $\varphi: (\mathbb{R}^d, b') \rightarrow (\mathbb{R}^2, b)$ 及び $\alpha: (\mathbb{R}^d, b') \rightarrow (\mathbb{R}, c-c')$ は C^0 級 (C^∞ 級) 写像芽である。

(iii) 等式 $G(x, v) = F(H(x, v), \varphi(v)) + \alpha(v)$, $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ が成立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 & \\
 & \uparrow H \times \varphi & \searrow F \\
 \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{G - \alpha} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

注意 1.5 G から F への開折写像 $\Phi: G \rightarrow F$ が存在するとき、そのとき、 F 及び G を注意 1.3 のように変形族 $\{F_u\}$ 及び $\{G_v\}$ と考え、上の条件 (iii) は、任意のパラメータ $v \in \mathbb{R}^d$ に対して、 G_v と F_u が (C^∞ 又は C^0) 右同値となるようなパラメータの間の対応 $u = \varphi(v)$ が存在し、しかも連続性 (C^∞ 又は C^0) をもつことを意味している。こ

のことは、 G が f の南折として持つ情報は全て f の南折としての F の情報の中に含まれていることを示している。

定義 1.6 F, G を同じ f の南折とする。そのとき、 $(C^\infty$ または $C^0)$ 南折図射 $\Phi = (H, \varphi, \alpha) : G \rightarrow F$ が $(C^\infty$ または $C^0)$ f -南折図射 であるとは Φ がさらに

$$(iv) H|_{\mathbb{R}^n \times \{b\}} = id_{\mathbb{R}^n}$$

をみたすときにいう。

定義 1.4 より 但ちに $(C^\infty$ 級 または C^0 級) 南折図同型の概念をうる。

定義 1.7 $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (a, b)) \rightarrow (\mathbb{R}, c)$ 及 $\omega : G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (a', b')) \rightarrow (\mathbb{R}, c')$ を $f : (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}, c)$ 及 $\omega : g : (\mathbb{R}^n, a') \rightarrow (\mathbb{R}, c')$ の同じ次元 (ie. $n=A$) の南折とする。そのとき、南折図射 $\Phi = (H, \varphi, \alpha) : G \rightarrow F$ が $(C^\infty$ 級 または C^0 級) 南折図同型 であるとは 南折図射 $\Phi' : (H', \varphi', \alpha') : F \rightarrow G$ が存在して

$$(v) \varphi' = \varphi^{-1} \quad (H' \times \varphi') = (H \times \varphi)^{-1}, \quad \alpha' = -\alpha$$

をみたすときにいう。このように南折図同型が存在するとき、 F と G は南折として $(C^\infty$ 級 または C^0 級) 同値であるという。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{H \times \varphi} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \\
 \uparrow H \times \varphi' & \searrow G \circ d & \downarrow F \\
 \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F \circ \alpha'} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

同様にして, f -南折図同型, f の南折として同値なる概念を得る。注意 1.5 と定義 1.6 より次の普遍南折の概念を得る。

定義 1.8 f の南折 F が f の (C^∞ 級又は C^0 級)の普遍南折 (differentiably 又は topologically universal unfolding) であるとは, f の他の任意の南折 G に対し (C^∞ 級又は C^0 級)の南折図射 $\alpha: G \rightarrow F$ が存在するときをいう。

定義 1.7 より, 次の安定南折の概念を得る。

定義 1.9 $f: (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}, c)$ の南折 $F: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2, (a, b)) \rightarrow (\mathbb{R}, c)$ が (C^∞ 級又は C^0 級) 安定南折 (differentiably or topologically stable unfolding) であるとは, 実 (a, b) の任意の近傍 $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ と F の任意の代表元 $\hat{F} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ に対し, \hat{F} の $C^\infty(U, \mathbb{R})$ における Whitney topology での近傍 $N(\hat{F})$ が存在して 次の条件をみたすときをいう。

(条件) 任意の写像 $\widehat{G} \in N(\widehat{F})$ に対し、集 $(a', b') \in U$ が存在して \widehat{G} の (a', b') における写像芽

$$G: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (a', b')) \rightarrow (\mathbb{R}, \widehat{G}(a', b'))$$

が n 次元開折として F に (C^∞ 級又は C^0 級)同値になる。

§2 Thom の初等カタストロフィーから。

定義 2.1 C^∞ 関数芽 $f: (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}, b)$ が C^∞ - k -determinate (又は C^0 - k -determinate) であるとは $f^k(a) = f^k g(a)$ なる全ての $g: (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}, b)$ に対し常に f と g が (C^∞ 又は C^0) 右同値になるときにいう。

補題 2.2 $f \in m_n$ とする。そのとき

$$m_n^k \subset m_n \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle_{\mathcal{E}_n} + m_n^{k+1}$$

$$\Rightarrow f \text{ は } C^0\text{-}k\text{-determinate}$$

$$\Rightarrow m_n^{k+1} \subset m_n \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle_{\mathcal{E}_n}$$

(証明については J. Mather [10], G. Wassermann [9], 又は野口-福田 [6] を参照)

この論文で使う C^0 - k -determinacy に関して 次の定理がある。

補題2.3 (Thom [8]) 任意の正の整数 r 及び n に対して r 及び n のみで定まる自然数 Δ が存在して 次の条件をみたす: (i) $\pi_{\pi}^{\Delta}: J^{\Delta}(n, 1) \rightarrow J^r(n, 1)$ を自然な射影とするとき 任意の jet $z \in J^r(n, 1)$ に対して, $\pi_{\pi}^{-1}(z)$ の中に proper な代数多様体 Σ_z (これを分岐多様体という。) が存在する。

(ii) $j^{\Delta}f(0) \in \pi_{\pi}^{-1}(z) - \Sigma_z$ ならば, f は C^0 - Δ -determinate である。

定義2.4 $F \in M_{m+r}$ を $f \in M_n$ の開折とする。 $\tilde{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ を F の代表元とする。 $u \in \mathbb{R}^r$ に対して $\tilde{F}_u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を $\tilde{F}_u(x) = \tilde{F}(x, u)$ で定義する。 $j^k \tilde{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ を $j^k \tilde{F}(x, u) = j^k \tilde{F}_u(x)$ で定義する。 $j^k \tilde{F}$ を F の 自然な k -拡大 (natural k -extension) という。

定義2.5 f の開折 F が C^0 - k -横断的 (C^0 - k -transversal) であるとは F の自然な k -拡大 $j^k \tilde{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = J^k(n, 1) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ が $j^k f(0)$ を通る $L^k(n)$ の軌道 $L^k(n)(j^k f(0)) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ に横断的なときという。

Thom の初等カタストロフィーの分類において 基本的な役割を果たすのは 次の二つの定理である。

定理 A. C^∞ - k -determinate な $f \in M_n$ の南折 $F \in E_{n+r}$ について 次の 3 条件は同値である。

- (i) F は C^∞ -universal unfolding
- (ii) F は C^∞ -stable unfolding
- (iii) F は C^∞ - k -transversal

定理 B $f \in M_n$ に対して 次の 3 条件は同値である。

- (i) ある $k > 0$ に対して f は C^∞ - k -determinate
- (ii) $\text{codim}_f \left(\underset{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{R}} M_n / \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle_{\mathbb{R}} \right) < +\infty$
- (iii) f は C^∞ -普遍 (又は安定) 南折をもつ。

以上の定理 A, B は Thom の横断性定理と 次の補題に基づいている。

補題 C $f \in M_n$ は C^∞ - k -determinate とする。そのとき f の南折で 同じ次元で 共に k -transversal な $F, G \in M_{n+r}$ は 南折として C^∞ -同値である。

Thom の初等カタストロフィーにおいて Malgrange の予備定

理が使われるのは この補題Cにおいて、そしてここでのみである。(この節の議論については, Wasserzmann [9], 野口-福田 [6] の7章, を参照。補題C \Rightarrow 定理A, B については, 本論 §5 をcf.)

§3 Topologically stable unfoldings

Topologically stable unfolding についても前節の定理A, B 及び補題C に相当する定理が成立つ。さて 安定性の観点からみると、 C^0 級関数の範疇で考える必要はなく、多項式の範疇で考えれば充分であることを注意して、今後考える関数 及び 開折 は全て多項式で与えられるものとする。

§2 において $L^k(n)$ -orbit の果たした役割をここでは Canonical stratification が果たす。 $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ は §1 の記号で述べた実係数の n 変数の多項式環とし、 $P(n, k) = \{f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \mid \deg f \leq k\}$ とおく。 $P(n, k)$ はある次元のユークリッド空間と同視できる: $P(n, k) = \mathbb{R}^{N(k)}$ 。

次に 次の sequence を考える。

$$(*) \quad P(n, k) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\alpha} P(n, k) \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} P(n, k)$$

但し, α, π は次式で定義されるものである:

$$\alpha(f, x) = (f, f(x)), \quad \pi(f, y) = f.$$

このとき 次の定理を得る。

定理 3.1 ([2]) $P(n, k) \times \mathbb{R}^n, P(n, k) \times \mathbb{R}$ 及び $P(n, k)$ の stratification $\mathcal{S}_1^k, \mathcal{S}_2^k, \mathcal{S}_3^k$ で次の条件をみたすものが存在する。

(i) α は Thom-map である。

(ii) π は stratified map である。

(iii) $\mathcal{S}_1^k, \mathcal{S}_2^k, \mathcal{S}_3^k$ の strates は 各々, semi-algebraic な submanifold で その数は有限個である。

Thom-map, stratification の概念については [2] 又は [5] を参照のこと。写像の系列 (*) が条件 (i) (ii) をみたすとき, Thom の 2nd isotopy lemma が使えることを注意しておく。上の定理と 2nd isotopy lemma より 次の系を得る。

系 3.2 (f, x) と (g, y) が \mathcal{S}_1^k の同じ strate に属すならば, f の x における芽と g の y における芽は C^0 -右同値である。従って $P(n, k)$ の元の位相型は有限個しかない。

注意 3.3 1) $l \geq k > 0$ に対して 写像

$$\pi_k^l: P(n, l) \rightarrow P(n, k)$$

を l 次の多項式に対して、そこから $k+1$ 次以上の項をとりさ
 べてできる k 次の多項式を対応させる写像とする。 $P(n, l)$,
 $P(n, k)$ を前述の如く Euclid 空間 $\mathbb{R}^{N(l)}$, $\mathbb{R}^{N(k)}$ とみなすと、
 π_k^l は $\mathbb{R}^{N(l)}$ から $\mathbb{R}^{N(k)}$ への自然な射影となる。同じ記号で自然

な射影
$$\pi_k^l: P(n, l) \times \mathbb{R}^n \rightarrow P(n, k) \times \mathbb{R}^n$$

をもあらわすものとする。

[2]の方法によると、 $f \in P(n, k)$ の $x \in \mathbb{R}^n$ における芽が
 C^0 - k -determinate のとき、 (f, x) の $P(n, k) \times \mathbb{R}^n$ における近傍 U
 が存在して、 $(\pi_k^l)^{-1}(U)$ の \mathcal{S}_i^l による stratification は U の
 \mathcal{S}_i^k による stratification に $\mathbb{R}^{N(l)-N(k)}$ を直積したものにな
 っている。

2) $\Sigma_k = \{ (f, x) \in P(n, k) \times \mathbb{R}^n \mid f \text{ の } x \text{ における芽が } C^0\text{-}k\text{-determinate ではない} \}$

とおくと、上の 1) と補題 2.3 を組み合わせると、 Σ_k は
 $P(n, k) \times \mathbb{R}^n$ の closed semi-algebraic set となる。

3) E. Looyenga [3] によると 定理 3.1 の条件をみ
 たりしたもの Σ_k の maximal なもの (すなわち (i) (ii) の性質をもつ他の
 stratification は全て $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ の細分となっている) が存在
 する。これを canonical stratification といいよ。

組 $(f, \alpha) \in \mathbb{P}(n, k) \times \mathbb{R}^n$ に対して (f, α) の属する S_k の strata を $\underline{S}_k(f, \alpha)$ であらわす。

定義 3.4 $f \in M_n = \{g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \mid g(0) = 0\}$ の topological codimension を次の様に定義する。

$$\text{top. codim } f = \lim_{k \rightarrow \infty} \{ \text{codim } \underline{S}_k(\pi_k(f), 0) \text{ in } \mathbb{P}(n, k) \times \mathbb{R}^n \} - n$$

ここで $\pi_k(f) = \pi_k^l(f)$ if $\deg f = l$ である。

注意 3.3 1) より, f が k -determinate ならば,

$$\text{top. codim } f = \text{top. codim } \pi_k f = \text{codim } \underline{S}_k(\pi_k(f), 0) \text{ in } \mathbb{P}(n, k) \times \mathbb{R}^n - n$$

となる。

以後 多項式とその芽をあまり区別しないで用いる。

定義 3.5 $F \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r]$ を $f \in M_n$ の南折とする。次の式で定義される写像 $T^k F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{P}(n, k) \times \mathbb{R}^n$ を F の natural Taylor k -extension とする:

$$T^k F(x, u) = (\pi_k(F_u), x)$$

定義 3.6 $f \in M_n$ の南折 $F \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r]$ が

C^0 - k -横断的であるとは、 F の natural Taylor k -extension が $S_k(\pi_k f, 0)$ に横断的なときをいう。

そのとき、§2 の定理と並行した次の定理を得る。

定理 A' C^0 - k -determinate な $\text{top codim} < \infty$ の $f \in M_n$ の
開折 $F \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_r]$ に対し次の関係が成立つ：

F は C^0 - k -transversal (upto f -isomorphic) $\iff F$ は C^0 -stable
unfolding (upto f -iso) $\iff F$ は C^0 -universal unfolding.

注意 C^0 のカテゴリーでは必ずしも stable unfolding と
universal unfolding が一致しない。(Cf, §2 定理 A)

定理 B' $f \in M_n$ に対し次の条件は同値である：

- (1) ある $k > 0$ に対し f は C^0 - k -determinate
- (2) $\text{top codim } f < \infty$
- (3) f は C^0 -stable unfolding をもつ。

以上の定理の証明は §5 で与えられる。これらの証明は Thom の横断性定理と 次の補題 C' にもとづいている。

補題 C' (KEY lemma) $f, g \in M_n$ を C^0 - k -determinate
 で $S_k(\pi_k f, 0) = S_k(\pi_k g, 0)$ とする。そのとき f, g の
 C^0 - k -横断的 n 次元 n -次元 n -折 $F, G \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_k]$
 は全て n -折として C^0 -同値である。

又ここで使われる Thom の横断性定理とは 次のタイプのものである。

補題 D' (Thom の横断性定理)

(1) $f \in M_n$ が $\text{top codim } f \leq r$ とする。すると f の任意の r -次元 n -折は C^0 - k -transversal なもので ϵ くらゐも近似できる。

(2) $S \subset \mathbb{P}(n, k) \times \mathbb{R}^n$ を submanifold とする。そのとき
 $\{F \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_k] \mid T^k F \text{ は } S \text{-transversally}\}$
 は $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_k]$ の中で稠密である。

§4. Key lemma C' の証明.

$f, g \in M_n$, $F, G \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_k]$ を Key lemma C' におけるものとする。注意 3.3 (2) より, C^0 - k -determinate

という性質が Open な性質なので, f, g 及 $\omega: F_u, G_u, u \in \mathbb{R}^2$ は全て k 次以下の多項式と仮定して一般性を失わぬ。

又 lemma C' は F と G が充分近いときに証明すれば充分である ([9] 又は [6] 附録 III 参照)。従って, F と G は充分近いと仮定する。そのとき

$$I = (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$$

$$F_t = (1-t)F + tG \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_r], t \in I,$$

とおく。 ε が充分小で, F と G が充分近いならば, 全ての $t \in I$ に対して F_t も k -transversal である。次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \times I & \xrightarrow{i_1} & \mathbb{P}(n, k) \times \mathbb{R}^n \\ \bar{\alpha} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \alpha \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times I & \xrightarrow{i_2} & \mathbb{P}(n, k) \times \mathbb{R} \\ \bar{\pi} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^2 \times I & \xrightarrow{i_3} & \mathbb{P}(n, k) \end{array}$$

ここに, 右の従の sequence は §3 の最初に定義した (*) である。他の写像は 次の式で定義される。

$$i_1(x, u, t) = (F_t)_u, x, \quad i_2(y, u, t) = (F_t)_u, y$$

$$i_3(u, t) = (F_t)_u$$

$$\bar{\alpha}(x, u, t) = (F_t(x, u), u, t), \quad \bar{\pi}(y, u, t) = (u, t)$$

各 F_t が k -transversal なので, i_1, i_2, i_3 はそれぞれ右側の縦の列の stratification (定理 3.1 で与えられた) $\mathcal{S}_1^k, \mathcal{S}_2^k, \mathcal{S}_3^k$ に横断的である。従って上の図式の左側の系列に $\mathcal{S}_1^k, \mathcal{S}_2^k, \mathcal{S}_3^k$ から stratification が induce でき

$$(**) \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \times I \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times I \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathbb{R}^2 \times I$$

に対し

(1) $\bar{\alpha}$ は Thom-map

(2) $\bar{\pi}$ は stratified map

となる。更に各 F_t が k -transversal であることを考慮すると $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$ も (I 自身を strata と考え) stratified map となり結局

$$(*) \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \times I \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$$

に Thom の 2nd isotopy lemma が適用でき、 F と G は unfolding とし 2 同値 になる。

key lemma 証明了

§5. 主定理の証明

主定理の証明 定理Bによると $\text{top.codim } f < \infty$ なる

f は ある $k > 0$ に対し C^0 - k -determinate である。定理3.1の考察によると, $\text{Top Orb}(f)_\ell = \{g \in P(n, \ell) \mid g \text{ と } f \text{ は } C^0\text{-右同値}\}$ は 任意の $\ell \geq k$ に対し, $P(n, \ell)$ の semi-algebraic set になる。一応明らか

$$\text{top.codim } f \text{ (def 3.4)} \geq \underset{-n}{\text{codim Top Orb}(f)_\ell \text{ in } P(n, \ell)}$$

である。従って補題2.3によると, 各整数 q に対してある整数 $k(q)$ が存在し, 定まると

$$\text{top.codim } f \leq q \Rightarrow \text{codim of Top Orb}(f)_\ell \text{ in } P(n, \ell) - n \leq q$$

$$\Rightarrow f \text{ は } C^0\text{-}k(q)\text{-determinate}$$

となる。従って $\text{top.codim } f \leq q$ の多項式とその stable unfolding を分類するには, $P(n, k(q))$ の多項式で $\text{codim} \leq q$ のものとその stable unfolding を分類するとよい。定理A'によるとそのためには $P(n, k(q))$ の多項式で $\text{codim} \leq q$ のものとその C^0 - k -transversal unfolding を分類するとよい。Key lemma C'によると $\text{codim} \leq q$ なる $P(n, k(q))$ を分類するとよい。所で定理3.1及び系3.2によるとこれは有限個である。

主定理証明了

定理B'の証明 (1) ある $k > 0$ に対して f は C^0-k -determinate
 と (2) $\text{top codim } f < \infty$ の同値性は 定義と補題2.3より明
 らか。 (1) + (2) \Rightarrow (3) f は C^0 -stable unfolding^(註2) は定理A'より
 明らか

(3) \Rightarrow (2) の証明. 背理法を使う。 $\text{top codim } f = \infty$ とする。
 F を f の任意の n 次元開折とすると、 F が C^0 -安定開折で
 ないことを示す。 $\text{top codim } f = \infty$ となるので、 ある k が存在し
 て、 $\text{codim } S_R(\pi_k f, 0) \text{ in } \mathbb{P}(n, k) \times \mathbb{R}^n > n + k$
 となる。 補題D'(§3の最後)より、 $S_R(\pi_k f, 0)$ に横断的 \bar{G} 、
 (すなわち交わりぬ) $G \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_k]$ で F は ϵ くら
 まで近似できる。 このような G に対しては、 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ のどんな点
 (x, u) における G の芽をとっても F と開折として同値には
 ならない。 従って F は C^0 -安定開折ではない。

定理A'の証明 C^0 -安定開折 $\iff C^0-k$ -横断開折 (up to iso)
 の証明

(\implies) 補題Dより、 F を f の安定開折とすると、 F は
 k -横断的 \bar{G} の開折 G で近似できる。 F は C^0 -stable となるので
 G は F と f -同型である。 従って F は C^0-k -transversal (up
 to f -iso) である。

(\impliedby) F を f の C^0-k -横断開折とする。 そのとき、

$N(F) = \{ G \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_r] \mid T^k G \text{ が } S_k(\pi_k f, 0) \text{ に横断的に交わる} \}$

とあくと, $N(F)$ は F の近傍である. $\forall G \in N(F)$ に対 $u \in (\alpha_0, u_0)$ を $T^k G$ が $S_k(\pi_k f, 0)$ に交わる点とすると, G の (α_0, u_0) における芽は, key lemma C' により, F と同値な南折である。
従って F は C^0 -stable unfolding である。

C^0 - k -横断南折 \Rightarrow C^0 -普遍南折の証明

F を f の C^0 - k -横断南折とす。 $G \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, v_1, \dots, v_s]$ を他の任意の f の南折とす。 $G^*, F^* \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s]$

$$\begin{aligned} \text{を} \quad G^*(x, u, v) &= G(x, v) - f(x) + F(x, u) \\ F^*(x, u, v) &= F(x, u) \end{aligned}$$

とあくと, 次のことがなりたつ。(証明は trivial)

(1) f -南折図射 $\Phi: G \rightarrow G^*$ が存在する。

(2) F^* と G^* は k -横断的 ($\odot F$ is so) ため、

f の南折として同値

(1) f -南折図射 $\Psi: F^* \rightarrow F$ が存在する。

従って, f -南折図射: $G \rightarrow F$ が存在し, F は C^0 -universal unfolding となる。

以上

文献

- [1] V.I. Arnold: Normal formes of functions near degenerate critical points, Weyl groups A_k, D_k, E_k and Lagrange singularities, Funct. Annal. and its Appl. vol. 6, No4, 3-25 (1972).
- [2] T. Fukuda: Types topologiques des polynômes, to appear in Publ. Math. I.H.E.S.
- [3] E. Looyenga: Structural stability of families of C^∞ functions and the canonical stratification of $C^\infty(N)$, mimeographed I.H.E.S.
- [4] J. Mather: Stratifications and Mappings, in "Dynamical systems" ed. by M. Peixoto, proceedings of Salvador symposium on dynamical systems, Academic Press (1973).
- [5] _____: Notes on topological stability, mimeographed, Harvard Univ.
- [6] 野田広-福田拓生: 初等カタストロフィー, 共立全書, 1976 刊予定
- [7] D. Siersma: The singularities of C^∞ -functions of right-codim. ≤ 8 , Indag. Math. 35. No1, 31-37 (1973)
- [8] R. Thom: Local topological properties of differentiable mappings, Colloquim on Differential Analysis, Oxford Univ. Press. (1964)
- [9] G. Wassermann: Stability of Unfoldings, Springer Lecture notes in Math, 393, Springer-Verlag, 1974.
- [10] J. Mather: Un published notes on Right-Equivalence

訂正とお詫い, 最終日午後に話した, "位数の位相型は Thom-Boardman Singularities で分類できる" は誤りでした。 "どうも貴重な時間をつぶしてすみません" でした。