数理解析研究所講究録
第 262 巻 1976 年 16-41

可解リー群のユニタリ表現論

東大　理　　藤原英徳

§序．この総合報告は、Type I の単連結可解リー群の dual を構成する Auslander－Kostant theory [1] の紹介である。

<u>Notations</u>．$\mathbb{R}$上有限次元リー環を $\mathfrak{g}$ で、その dual vector space を $\mathfrak{g}^*$ で表わす。$f \in \mathfrak{g}^*$ に対し、$\mathfrak{g}$ 上の交代双一次形式 B_f を、任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対し、$B_f(X, Y) = f([X, Y])$ で定義する。$\mathfrak{g}$ の任意の vector subspace $\mathfrak{a}$ に対し、

$$\mathfrak{a}_f = \{ X \in \mathfrak{g} ; \ B_f(X, Y) = 0 \quad \text{for } {}^\forall Y \in \mathfrak{a} \}$$

とおき、$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_f$ なる時、$\mathfrak{a}$ を f における isotropic subspace と呼ぶ。この時、$\mathfrak{a}$ が f における maximal isotropic subspace（以下 m.i.s. と略記する）。$\Leftrightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_f$. $\Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_f$ かつ $\dim \mathfrak{a} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}_f)$.

§ Mackey's little group theorem. cf. [11], [12]

まず最初に、後にしばしば用いられる一定理を準備する。

Gを局所compact群、Hをその閉正規部分群、$\hat{H}$をHのdual (i.e. 既約ユニタリ表現の同値類の集合)とする。この時、$V \in \hat{H}$、$g \in G$に対し、$V^g(a) = V(g^{-1}ag)$ for ${}^\forall a \in H$ とおくと$V \to V^g$によりGは$\hat{H}$に作用する。

<u>定理</u>. HをType Iとすると、GのVにおけるstabilizer SはGの閉部分群であり、UをSの既約表現で$U|_H$がVのmultipleである様なものとすると $\operatorname{ind}_{S\uparrow G} U$は既約である。又$U'$を$U'|_H$が$V$のmultipleである様な他の$S$の既約表現とすると、

$$\operatorname{ind}_{S\uparrow G} U \simeq \operatorname{ind}_{S\uparrow G} U' \iff U \simeq U' .$$

§ Kirillov theory. cf. [9], [15]

<u>定義</u>. $\mathfrak{g}$の部分リー環$\mathfrak{f}$が$f \in \mathfrak{g}^*$におけるm.i.s.の時、$\mathfrak{f}$をfにおけるreal polarizationと呼ぶ。$\mathfrak{g}$の部分リー環で、$f \in \mathfrak{g}^*$におけるisotropic subspaceとなっている物の集合を、$S(f, \mathfrak{g})$で、又fにおけるreal polarizationの集合を$M(f, \mathfrak{g})$で表わす。

<u>注意</u>. $\mathfrak{g}$が巾零なら$S(f, \mathfrak{g})$の中で最大次元を持つものの集合が丁度$M(f, \mathfrak{g})$であるが、一般にはそうはならない。($M(f, \mathfrak{g}) = \phi$の場合もある。)

Gを単連結巾零リー群、$\mathfrak{g}$をGのリー環、$f \in \mathfrak{g}^*$、$\mathfrak{f} \in S(f, \mathfrak{g})$とする。この時$\mathfrak{f}$に対応する$G$のanalytic subgroupを$H$とし、

$\chi_f(\exp X) = e^{if(X)}$ $(\forall X \in \mathfrak{h})$、$\operatorname{ind}_{H\uparrow G} \chi_f = \hat{\rho}(f, \mathfrak{h}, G)$ とおく。

<u>定理</u>. (1) $M(f, \mathfrak{g}) \neq \phi$.

(2) $\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g}) \Leftrightarrow \hat{\rho}(f, \mathfrak{h}, G)$ は既約.

(3) $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in M(f, \mathfrak{g})$ ならば、$\hat{\rho}(f, \mathfrak{h}_1, G) \simeq \hat{\rho}(f, \mathfrak{h}_2, G)$.

又 Kirillov 及び Dixmier は次の定理を証明した。

<u>定理</u>. 単連結巾零リー群の任意の既約ユニタリ表現は monomial である (i.e. 適当な連結リー部分群の1次元ユニタリ表現から induce される).

以上より $\hat{G}$ を G の dual とすると、$f \mapsto \hat{\rho}(f)$ なる $\mathfrak{g}^*$ から $\hat{G}$ の上への写像が定義される。他方 G は $\mathfrak{g}^*$ に coadjoint 表現 (i.e. adjoint 表現の反傾表現) で作用する. その作用で f を通る orbit を $O(f)$ で表わす。

<u>定理</u>. $f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$ とすると $\hat{\rho}(f_1) \simeq \hat{\rho}(f_2) \Leftrightarrow O(f_1) = O(f_2)$.

この事実により、写像 $\mathfrak{g}^* \to \hat{G}$ $(f \mapsto \hat{\rho}(f))$ は全単射 $\wedge : \mathfrak{g}^*/G \to \hat{G}$ を誘導する.

<u>注意</u>. $\mathfrak{g}^*/G$ 及び $\hat{G}$ は自然な topology を備え、G が単連結巾零リー群の場合、上の $\wedge$ は位相同型写像となる. (cf. [5])

§3 次元 Heisenberg 群の既約ユニタリ表現. cf. [2], [16]

後に見るように $\mathfrak{g}$ が可解の場合には、$M(f, \mathfrak{g}) = \phi$ なる事があり、$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の適当な部分リー環を導入して. 前節と異なる誘

導表現を構成する必要がある。この節では、$\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_3$（3次元Heisenberg リー環）に対して $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の適当な部分リー環を用いて $N_3=\exp\mathfrak{n}_3$ の1次元以外のすべての既約ユニタリ表現を正則函数の空間上に構成し、Kirillov theory との関係を見る。

$\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_3=\{P, Q, E;\ [P, Q]=E\}$、$G=N_3=$ リー環 $\mathfrak{n}_3$ を持つ単連結巾零リー群とする。

★ Kirillov method

$f\in\mathfrak{g}^*$, $f(E)=\lambda$ とする。

A) $\lambda=0$. $O(f)=\{f\}$: one point.

$$\mathfrak{g}_f=\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_3.$$

B) $\lambda\neq 0$. $O(f)=\{\phi\in\mathfrak{g}^*;\ \phi(E)=\lambda\}$: plane.

$$\mathfrak{g}_f=\{\mathbb{R}E\}.$$

A)の場合、f が $\mathfrak{n}_3$ の character を与え、N_3 の1次元ユニタリ表現が得られる。

B)の場合を考える為、$f=\lambda E^*$, $\mathfrak{h}_0=\mathbb{R}Q\oplus\mathbb{R}E\in M(f,\mathfrak{g})$ とする。$L^2(f,\mathfrak{h}_0)$ を N_3 上の複素数値可測函数で殆ど到る所

$$\phi(gh)=\chi_f(h)^{-1}\phi(g)\ ,\quad g\in N_3,\ h\in H_0=\exp\mathfrak{h}_0$$

をみたし、N_3/H_0 上の不変測度を $d\mu$ とする時、

$$\|\phi\|^2=\int_{N_3/H_0}|\phi|^2\,d\mu\ <+\infty$$

なるもののなす Hilbert space とすれば、$\hat{\rho}(f)=\hat{\rho}(f,\mathfrak{h}_0,N_3)$ は $L^2(f,\mathfrak{h}_0)$ 上に left translation で実現される。

さて任意の $g \in N_3$ は、$g = \exp xP \cdot \exp X$, $X \in \mathfrak{h}_0$ と一意的に表わされ、故に N_3/H_0 は $\mathbb{R}$ と同一視され、$d\mu$ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度 dx となる。今 $\phi \in L^2(f, \mathfrak{h}_0)$ に対し、$(I\phi)(x) = \tilde{\phi}(x) = \phi(\exp xP)$ とおくと、I は $L^2(f, \mathfrak{h}_0)$ と $L^2(\mathbb{R})$ の間のユニタリ同型を与え、$\hat{\rho}(f)$ を I により $L^2(\mathbb{R})$ 上に移したものを $\hat{\rho}^\lambda$ とすると、$\tilde{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$ に対し、

$$(\hat{\rho}^\lambda(\exp x_0 P)\tilde{\phi})(x) = \tilde{\phi}(x - x_0)$$

$$(\hat{\rho}^\lambda(\exp y_0 Q)\tilde{\phi})(x) = e^{-i\lambda x y_0}\tilde{\phi}(x)$$

$$(\hat{\rho}^\lambda(\exp u_0 E)\tilde{\phi})(x) = e^{i\lambda u_0}\tilde{\phi}(x) \quad .$$

☆ 正則函数の空間上における表現.

$f \in \mathfrak{g}^* = \mathfrak{n}_3^*$, $f(E) = \lambda \neq 0$、P、Q を $\ker f$ の base で、$[P, Q] = E$ なるものとし、f、B_f 等は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ まで線形に拡張して考える。今 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分リー環 $\mathfrak{h} = \mathbb{C}(P + iQ) \oplus \mathbb{C}E$ を考えると、これは $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の B_f に関する m.i.s. でもある。次に N_3 上の複素数値 C^∞-函数 ϕ と、$X \in \mathfrak{n}_3$ に対し、

$$(\phi * X)(g) = \frac{d}{dt}\phi(g\exp tX)\Big|_{t=0} \quad ,$$

又 $Y = X_1 + iX_2 \in \mathfrak{n}_3^{\mathbb{C}}$ に対し、$\phi * Y = \phi * X_1 + i\phi * X_2$ とおき、N_3 上の複素数値 C^∞-函数 ϕ で、任意の $X \in \mathfrak{h}$ に対して、

$$\phi * X = -i\langle f, X\rangle \phi$$

なるものを考える。特に、$\phi * E = -i\langle f, E\rangle \phi$ は、

$\phi(g \exp uE) = e^{-i\lambda u}\phi(g)$ を意味し、$|\phi|^2$ は N_3 の center Z で不変である。今 $\mathcal{H}(f, \mathfrak{f})$ で N_3 上の複素数値 C^∞-函数 ϕ で、

$$\phi * X = -i\langle f, X\rangle\phi \qquad \text{for } {}^\forall X \in \mathfrak{f} \quad \cdots\cdots ⊛$$

$$\|\phi\|^2 = \int_{N_3/Z} |\phi|^2 d\mu < +\infty$$

($d\mu = N_3/Z$ 上の左不変測度)

なるものの空間を表わす。後に見るように $\mathcal{H}(f, \mathfrak{f})$ はノルム

$$\|\phi\| = \left(\int_{N_3/Z} |\phi|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

に関し完備で Hilbert space をなす。$\mathcal{H}(f, \mathfrak{f})$ への left translation で得られる N_3 のユニタリ表現を π^λ と書く。次に $\mathcal{H}(f, \mathfrak{f})$ から正則函数から成るある空間への isometry を構成しよう。

<u>補題</u>. (1) N_3 上の函数 ϕ_0,

$$\phi_0(\exp(xP + yQ)\exp(uE)) = e^{-i\lambda u} e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)},$$

は ⊛ をみたす。

(2) ⊛ をみたす N_3 上の C^∞-函数 ϕ は、$\phi = \phi_0 \cdot \alpha$;

$$\alpha(\exp(xP + yQ)\exp(uE)) = F(x + iy)$$

F は $z = x + iy$ の正則函数,

の形である。

さて N_3 の任意の元は $\exp(xP + yQ)\cdot\exp(uE)$ の形に一意的に表わされるから、N_3/Z は複素平面 $\{z = x + iy\}$ と同一視され、測度 $d\mu$ は $dx \cdot dy$ となる。この時、上の補題より、空間 $\mathcal{H}(f, \mathfrak{f})$ は、正則函数 $F(z)$ で

$$\|F\|^2=\int e^{-\frac{\lambda}{2}|z|^2}|F(z)|^2dxdy<+\infty$$

なるものの空間$\mathcal{H}(\lambda)$とisometricで、isometry $J:\mathcal{H}(f,\mathfrak{f})\to\mathcal{H}(\lambda)$は、$\phi\in\mathcal{H}(f,\mathfrak{f})$に対し、$(J\phi)(x+iy)=e^{\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}\times\phi(\exp(xP+yQ))$で与えられる。$\pi^\lambda$をJで$\mathcal{H}(\lambda)$上に移したものを$T^\lambda$とすると、

<u>命題</u>. $(T^\lambda(\exp(x_0P+y_0Q))F)(z)=e^{-\frac{\lambda}{4}|z_0|^2}e^{\frac{\lambda}{2}z\bar{z}_0}F(z-z_0)$

ただし $z_0=x_0+iy_0$.

$(T^\lambda(\exp u_0E)F)(z)=e^{i\lambda u_0}F(z)$.

次に$\mathcal{H}(\lambda)\neq\{0\}$かどうかを考える。今Pを多項式、$\alpha$を複素数として$e^{\alpha z}P(z)$の形の正則函数の有限一次結合のなす空間を$\mathfrak{D}$とすると、$\lambda>0$なら$\mathfrak{D}\subset\mathcal{H}(\lambda)$となり、更に$\mathfrak{D}$は$T^\lambda$で不変である。

<u>命題</u>. (1) $\mathcal{H}(\lambda)\neq\{0\}\iff\lambda>0$.

(2) もし$\lambda>0$ならば、$\mathcal{H}(\lambda)$はノルム

$$\|F\|=\left(\int e^{-\frac{\lambda}{2}|z|^2}|F(z)|^2dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$$

に関して完備であり、$\mathfrak{D}$は$\mathcal{H}(\lambda)$のdenseな部分空間をなす。

★ ρ^λとT^λのユニタリ同値

次に表現T^λとρ^λがユニタリ同値である事を示す為、$\mathfrak{f}_0=\mathbb{R}Q\oplus\mathbb{R}E$として、$\phi\in\mathcal{H}(f,\mathfrak{f})$に対し$U\phi\in L^2(f,\mathfrak{f}_0)$を構成しよう。この時$U\phi$は、

$$(U\phi)(g \exp u_0 E) = e^{-i\lambda u_0}\phi(g)$$

$$(U\phi)(g \exp yQ) = (U\phi)(g)$$

をみたさねばならず、特に $U\phi$ は $\exp yQ$ により右不変である。そこで形式的に

$$(U\phi)(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(g \exp yQ)\, dy$$

とおき、この U を同型 I と J で移した $\tilde{U}$ を考える。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(f, \mathfrak{h}) & \xrightarrow{J} & \mathcal{H}(\lambda) \\ U \downarrow & & \downarrow \tilde{U} \\ L^2(f, \mathfrak{h}_0) & \xrightarrow[I]{} & L^2(\mathbb{R}) \end{array}$$

<u>定理</u>. (1) $\tilde{U}$ は（定数倍を除いて）$\mathcal{H}(\lambda)$ と $L^2(\mathbb{R})$ の間のユニタリ同型を与える。

(2) $\tilde{U}^{-1}$ は、$\phi \in L^2(\mathbb{R})$ に対し

$$(\tilde{U}^{-1}\phi)(z) = \frac{\lambda}{2\pi} e^{-\frac{\lambda}{4}z^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda \zeta z}\, e^{-\frac{\lambda \zeta^2}{2}} \phi(\zeta)\, d\zeta$$

で与えられる。

(3) $\tilde{U}$ は $\mathcal{T}^{\lambda}$ と $\hat{\rho}^{\lambda}$ の間の intertwining operator である。

§ 巾零リー群から exponential group へ. cf. [3], [4], [16]

Kirillov theory を準連結な可解リー群まで拡張しようとすると、いくつかの障害が生じる。まず exponential group の場合を考察する。

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{R}$ 上の n 次元可解リー環、$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$、

$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_i = i$、を $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ のイデアルの flag とする．この時 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の各 quotient $\mathfrak{g}_{i+1}/\mathfrak{g}_i$ $(0 \leqq i \leqq n-1)$ 上への adjoint action に応じて $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上の linear form λ_i が生じる．

<u>定義</u>．λ_i $(0 \leqq i \leqq n-1)$ を $\mathfrak{g}$ に制限したものを $\mathfrak{g}$ の roots という．

<u>定義</u>．G を単連結可解リー群、$\mathfrak{g}$ をそのリー環とする．$\exp : \mathfrak{g} \to G$ が全射である時、G を exponential group と呼ぶ．

<u>命題</u>．G を単連結可解リー群、$\mathfrak{g}$ をそのリー環とする時、次の (1) 〜 (6) は同値である。(cf. [6], [18])

(1) G は exponential group

(2) exp が単射である．

(3) exp が微分同型写像である。

(4) $\mathfrak{g}$ の roots は λ を $\mathfrak{g}$ 上の real linear form として $x \longmapsto \lambda(x)(1+i\alpha)$ の形である。

(5) $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}_4$ (diamond algebra；定義は後程) 及び $\mathfrak{g}_3$ (平面の運動群の universal covering group のリー環) に同型な部分リー環を含まない。

(6) $\mathfrak{g}$ は 0 でない純虚数値をとる root を持たない．

<u>定義</u>．可解リー環 $\mathfrak{g}$ が exponential リー環であるとは、その roots が上記命題の (4) をみたす事を言う．

★ $ax+b$ group

$\mathfrak{g}_2=\{e_1, e_2 ; [e_2, e_1]=e_1\}$ とし、G_2をリー環$\mathfrak{g}_2$をもつ単連結リー群とする。$G_2=\mathbb{R}\underset{s}{\times}\mathbb{R}$; $(x, y)\cdot(x', y')=(x+e^{y}x', y+y')$ である。G_2を $ax+b$ group と呼ぶ。今 $f\in\mathfrak{g}^*$, $f(e_1)=\lambda$ とすると、coadjoint表現の orbits は

イ) $\lambda=0$ の場合　　$O(f)=\{f\}$

ロ) その他2つの orbits (半平面)　　$O_+=\{f ; f(e_1)>0\}$

$O_-=\{f ; f(e_1)<0\}$

となる。今 $f=e_1^*$、$\mathfrak{f}=\mathbb{R}e_2$ とすると $\mathfrak{f}\in M(f, \mathfrak{g}_2)$。次の命題は Kirillov theory がそのままでは完全可解リー群までも拡張できない事を示している。

<u>命題</u>. $\rho(f, \mathfrak{f}, G_2)$ は可約である。

<u>証明</u>. 同型 $R: \mathcal{H}(f, \mathfrak{f}, G_2)\longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ を $(R\phi)(x)=\phi(\exp xe_1)=\tilde{\phi}(x)$ で定義し、R と Fourier 変換子: $L^2(\mathbb{R})\longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ を合成したもので ρ を移した表現を ρ_F とすると、$\psi\in L^2(\mathbb{R})$ に対し、

$$(\rho_F(\exp x_0e_1)\psi)(x)=e^{-ixx_0}\psi(x)$$
$$(\rho_F(\exp y_0e_2)\psi)(x)=e^{\frac{y_0}{2}}\psi(e^{y_0}x)$$

従って $x>0$ 又は $x<0$ で殆ど到る所$=0$ なるものから成る $L^2(\mathbb{R})$ の部分空間は共に ρ_F で不変である。　　q.e.d.

従って Kirillov theory を exponential group まで拡張する為には次の概念が必要である. (cf. [14])

<u>命題</u>. G を exponential group、$\mathfrak{g}$ をそのリー環、$f \in \mathfrak{g}^*$、$\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$、$H = \exp \mathfrak{h}$ とする。この時次の 1)〜3) は同値である。1) $H.f = f + \mathfrak{h}^{\perp}$.

2) $f + \mathfrak{h}^{\perp} \subset O(f)$ かつ $\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g})$.

3) 任意の $\varphi \in \mathfrak{h}^{\perp}$ に対し、$\mathfrak{h} \in M(f + \varphi, \mathfrak{g})$.

但し、$\mathfrak{h}^{\perp} = \{ \psi \in \mathfrak{g}^* ; \psi(\mathfrak{h}) = 0 \}$ とする。

<u>定義</u>。$\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ が上記命題の 1) をみたす時、Pukanszky condition をみたすと言う。

Pukanszky condition をみたす $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ の全体を $I(f, \mathfrak{g})$ で表わす。

<u>定理</u>. G を exponential group、$\mathfrak{g}$ をそのリー環、$f \in \mathfrak{g}^*$、$\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ とする。

1) $I(f, \mathfrak{g}) \neq \phi$.

2) $\hat{\rho}(f, \mathfrak{h}, G)$ が既約 $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$.

3) $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in I(f, \mathfrak{g}) \Longrightarrow \hat{\rho}(f, \mathfrak{h}_1, G) \simeq \hat{\rho}(f, \mathfrak{h}_2, G)$.

故に $\hat{\rho} : \mathfrak{g}^* \to \hat{G}$ が定義され、

4) $\hat{\rho}$ は全射である。(cf. [20])

5) $f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$ に対し、$\hat{\rho}(f_1) = \hat{\rho}(f_2) \Longleftrightarrow O(f_1) = O(f_2)$.

従って巾零リー群の場合と同様に、全単射 $\sigma : \mathfrak{g}^*/G \longrightarrow \hat{G}$ が得られる。

又 G が exponential group の場合、$\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g})$ から構成した

$\hat{\rho}(f, \mathfrak{h}, G)$の既約成分への分解に関しては、Vergne [21]により次の事実が知られている。$\mathfrak{g}$の任意の部分空間$\mathfrak{a}$に対し、$\mathfrak{a}^{\perp} = \{\lambda \in \mathfrak{g}^*;\ \lambda(\mathfrak{a}) = 0\}$とし、$U(f, \mathfrak{a})$で$f + \mathfrak{a}^{\perp}$と$f + \mathfrak{a}^{\perp}$の空でない開集合で交わるorbitsの集合を表わし、wをあるorbitとする時、$c(w : f : \mathfrak{a})$で$w \cap (f + \mathfrak{a}^{\perp})$の連結成分の数を表わす事にする。

<u>定理</u>．Gをexponential group、$\mathfrak{g}$をそのリー環、$f \in \mathfrak{g}^*$、$\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g})$とする．

1) $U(f, \mathfrak{h})$は有限集合である．

2) $w \in U(f, \mathfrak{h})$ならば$c(w : f : \mathfrak{h}) < +\infty$

3) $\hat{\rho}(f, \mathfrak{h}, G) = \sum_{w \in U(f, \mathfrak{h})} c(w : f : \mathfrak{h})\, \pi(w)$

§ 可解群へ．cf. [4], [16], [19]

まず$\mathfrak{g}_4$と$\mathfrak{g}_3$を例にとって、exponential groupから可解群への拡張に際し、更にいかなる障害が生じるかを見よう．

★ The oscillator group.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_4 = (H, P, Q, E)$; $[H, P] = -Q$、$[H, Q] = P$、$[P, Q] = E$．$\mathfrak{g}_4$はdiamond algebraと呼ばれるnon-exponentialなリー環であり、この$\mathfrak{g}_4$をリー環に持つ単連結リー群はoscillator group $G = N_3 \rtimes \mathbb{R}$である。ここに$N_3$は3次元Heisenberg群であり、$\mathbb{R} = \exp tH$．

<u>Orbits</u>: $f_0 = \alpha_0 H^* + \beta_0 P^* + \gamma_0 Q^* + \delta_0 E^*$

A) $\delta_0 = 0$.　i) $\beta_0^2 + \gamma_0^2 \neq 0 \implies$ 円柱.

　　　　　　ii) $\beta_0^2 + \gamma_0^2 = 0 \implies$ 1点.

B) $\delta_0 \neq 0$.　$\alpha - \dfrac{\beta^2+\gamma^2}{2\delta_0} = \alpha_0 - \dfrac{\beta_0^2+\gamma_0^2}{2\delta_0} = const.$

回転放物面.

今 $f_0 = \alpha_0 H^* + \delta_0 E^*$、$\delta_0 \neq 0$ とすると、$\mathfrak{g}_{f_0} = \mathbb{R}H \oplus \mathbb{R}E$. 故に $M(f_0, \mathfrak{g})$ の元は $\mathfrak{g}_{f_0}$を含む3次元の部分リー環であるが、明らかにそれは存在しない。この場合ある $\mathfrak{f} \in S'(f_0, \mathfrak{g})$ から $\hat{\rho}(f_0, \mathfrak{f}, G)$を作る事によってはGのいかなる既約表現も得られない(cf. [19]). しかし $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の部分リー環で B_{f_0} に関しm.i.s.になっている $\mathfrak{f}_1 = \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}(P+iQ) \oplus \mathbb{C}H$、$\mathfrak{f}_2 = \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}(P-iQ) \oplus \mathbb{C}H$ を考えると、$\delta_0 > 0$ (*resp.* $\delta_0 < 0$) の時、$\mathfrak{f}_1$ (*resp.* $\mathfrak{f}_2$)から *holomorphically induced representation* $\rho(f_0, \mathfrak{f}_1, G)$ (*resp.* $\rho(f_0, \mathfrak{f}_2, G)$)を構成する事によりGの既約表現が得られる。

☆ $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 = (H, P, Q)$; $[H, P] = -Q$、$[H, Q] = P$.

<u>Orbits</u>: $f_0 = \alpha_0 H^* + \beta_0 P^* + \gamma_0 Q^*$

A) $\beta_0^2 + \gamma_0^2 \neq 0 \implies \beta^2 + \gamma^2 = \beta_0^2 + \gamma_0^2$　円柱

B) $\beta_0^2 + \gamma_0^2 = 0 \implies O(f_0) = \{f_0\}$　1点

今 $f = \beta P^*$、$\beta \neq 0$ とすると、Gのfにおける固定群 G_f は、

$$G_f = exp(2\pi \mathbb{Z} H) \times exp\, \mathbb{R}P \qquad (\mathbb{Z} = integers)$$

であり、そのリー環は $\mathfrak{g}_f=\mathbb{R}P$ である。$\mathfrak{h}_0=\mathbb{R}P\oplus\mathbb{R}Q$ として、$M(f,\mathfrak{g})=\{\mathfrak{h}_0\}$ であり、又 $\mathfrak{h}_0$ は Pukanszky condition をみたす。にもかかわらず $\hat{\rho}(f,\mathfrak{h}_0,G)$ は既約表現 $U^{\beta,\lambda}$ ($\lambda\in\mathbb{T}$) の直積分となる。ここに $U^{\beta,\lambda}$ はいかにして得られるかというと、$\mathfrak{h}_0$ の任意の元 h に対し、$\pi_f(\exp h)=e^{if(h)}$ とおいて $\mathfrak{h}_0$ に対応する G の連結リー部分群 D^0（可換正規部分群）の character を得る。G の $\hat{D}^0$ への作用に関し π_f における固定群 D は、$D=\exp(2\pi\mathbb{Z}H)\times D^0$。今 $\mathcal{T}_f$ を、$\mathcal{T}_f|D^0$ が π_f の multiple となるような D の既約表現とすれば、Mackey's little group theorem により $\operatorname*{ind}_{D\uparrow G}\mathcal{T}_f$ は既約となる。明らかにこのような $\mathcal{T}_f$ は、$\lambda\in\mathbb{T}$ として

$$\mathcal{T}_f^{\lambda}(2\pi n,\exp h)=e^{2\pi i\lambda n}\,e^{if(h)}\quad \text{for } {}^{\forall}n\in\mathbb{Z},\ {}^{\forall}h\in\mathfrak{h}_0$$

の形である。この時、$U^{\beta,\lambda}=\operatorname*{ind}_{D\uparrow G}\mathcal{T}_f^{\lambda}$.

§ Auslander-Kostant theory. cf. [1], [4], [13], [16]

1°) polarizations.

前節の考察からもわかる通り、一般の可解群の場合には、まず $M(f,\mathfrak{g})$ の概念を $\mathfrak{g}^c$ まで拡張する必要がある。

<u>定義</u>. G をリー群、$\mathfrak{g}$ をそのリー環、$f\in\mathfrak{g}^*$ とする。f における G の polarization とは、$\mathfrak{g}^c$ の複素部分リー環 $\mathfrak{h}$ であって次の条件 1)〜3) をみたすものをいう。

1) $\mathfrak{h}$ は B_f に関し m.i.s. である。

2) $\mathfrak{f}+\bar{\mathfrak{f}}$ は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の部分リー環である。

3) $\mathfrak{f}$ は $Ad_G G_f$ で不変である。ここに G_f は G の coadjoint 表現に関する f における固定群を表わす。

以下しばらく、G をリー群、$\mathfrak{g}$ をそのリー環、$f\in\mathfrak{g}^*$ とし、f における G の polarization の集合を $P(f, G)$ で表わす。

定義. $\mathfrak{f}\in P(f, G)$ に関連して $\mathfrak{g}$ 及び $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の部分リー環を定義する。即ち、 $\mathfrak{d}=\mathfrak{f}\cap\mathfrak{g}$, $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{d}+i\mathfrak{d}$

$$\mathfrak{e}=(\mathfrak{f}+\bar{\mathfrak{f}})\cap\mathfrak{g},\quad \mathfrak{e}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{e}+i\mathfrak{e}$$

とおく。

$\mathfrak{d}$ は B_f に関する $\mathfrak{e}$ の直交補空間であり、B_f は $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ 上に正則な交代双一次形式 $\hat{B}_f$ を誘導する。又 $(\mathfrak{e}/\mathfrak{d})^{\mathbb{C}}\simeq \mathfrak{f}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}\oplus\bar{\mathfrak{f}}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ である。

定義. $J\in \mathrm{End}\,(\mathfrak{e}/\mathfrak{d})^{\mathbb{C}}$ を次の様に定義する。

$$J(x)=\begin{cases}-ix & \text{if } x\in\mathfrak{f}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}\\ ix & \text{if } x\in\bar{\mathfrak{f}}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}\end{cases}.$$

この時 J は $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ を不変に保ち、$\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ 上で $J^2=-1$ となる。今 $u, v\in\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ に対し、$S_f(u, v)=\hat{B}_f(u, Jv)$ とおくと、S_f は $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ 上の正則な対称双一次形式である。

定義. S_f が正定値であるか、又は $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}=\{0\}$ 即ち $\mathfrak{f}=\bar{\mathfrak{f}}$ の時、$\mathfrak{f}\in P(f, G)$ は positive であるという。

注意. 上記定義は任意の $X\in\mathfrak{f}$ に対し、$if([X,\bar{X}])\geqq 0$ な

る事と同値.

$f \in \mathfrak{g}^*$ における G の positive polarization の全体を $P^+(f, G)$ で表わす.

さて $\mathfrak{f} \in P(f, G)$ とし、$\mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ に対応する G の連結リー部分群をそれぞれ D^0, E^0 とし、$D = G_f \cdot D^0$, $E = G_f \cdot E^0$ とおくと、$\mathfrak{f}$ は $Ad_G G_f$ で不変だから D, E は G の部分群である。

定義. $D.f$ が $\mathfrak{g}^*$ の閉集合である時(これは $D.f = f + \mathfrak{e}^\perp$ と同値)、$\mathfrak{f}$ は weak Pukanszky condition をみたすといい、$E.f$ が $\mathfrak{g}^*$ の閉集合の時、$\mathfrak{f}$ は strong Pukanszky condition をみたすという.

注意. ① $\mathfrak{f} \in M(f, \mathfrak{g})$ が前に述べた Pukanszky condition をみたす. $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{f}^{\mathbb{C}} \in P^+(f, G)$ が weak Pukanszky condition をみたす.
$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{f}^{\mathbb{C}} \in P^+(f, G)$ が strong Pukanszky condition をみたす.
② strong Pukanszky condition は weak Pukanszky condition よりも実際強い条件で、少くとも G が exponential group の場合、後に述べる holomorphically induced representation $\rho(f, \mathfrak{f}, G)$ が既約になる為の条件は $\mathfrak{f} \in P^+(f, G)$ が weak Pukanszky condition をみたす事の様に思われる?

2) holomorphically induced representation.

次に strong Pukanszky condition をみたす $\mathfrak{f} \in P(f, G)$ に関連

してGの表現を構成する事を考えよう(weak Pukanszky condition の下に同様の構成が出来るわけであるが、簡単の為 strong の仮定を置く).

<u>定義</u>. $f \in \mathfrak{g}^*$ が integral とは、その differential が if なる character $\eta_f : G_f \longrightarrow \mathbb{T}$ が存在する事をいう.

<u>注意</u>. Gが連結の時、η_fの存在は orbit $G.f$ 上の canonical symplectic 2-form が integral である事と同値である(cf.[10]).

以下常にfは integral と仮定し、対応するG_fの character をη_fで表わす.

<u>命題</u>. $\mathfrak{f} \in P(f, G)$ が strong Pukanszky condition をみたす時、η_fはその differential が $if|\mathfrak{d}$ なるDの character $\chi_f : D \rightarrow \mathbb{T}$ に一意的に拡張される.

さて$X = E/D$とおくと、Xは連結であり、$\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$上の正則な$D$-不変交代双一次形式$\hat{B}_f$は$X$上に$E$-不変測度$\mu_X$を誘導する. E上の複素数値可測函数φで

$$\varphi(ab) = \chi_f(b)^{-1}\varphi(a) \qquad a \in E, \quad b \in D$$

なるものの空間を$M(E, \chi_f)$とおき、

$$\int_X |\varphi|^2 d\mu_X < +\infty$$

となる$\varphi \in M(E, \chi_f)$の同値類のなす Hilbert space を$\mathcal{H}(E, \chi_f)$とする. $\mathcal{H}(E, \chi_f)$は $\operatorname{ind}_{D \uparrow E} \chi_f$ の表現空間である。次に$C^\infty(E)$をE上の複素数値C^∞-函数の空間とし、$X, Y \in \mathfrak{e}$、$Z = X + iY \in \mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$、

$\varphi \in C^\infty(E)$ の時、 $\varphi * Z = \varphi * X + i\varphi * Y$

$$(\varphi * X)(a) = \frac{d}{dt}\varphi(a\exp tX)\Big|_{t=0} \qquad a \in E$$

とおき、更に

$$C^\infty(E, f, \mathfrak{f}) = \{\varphi \in C^\infty(E);\ \varphi * Z = -i\langle f, Z\rangle\varphi \ \text{ for } \forall Z \in \mathfrak{f}\}$$

$$\mathcal{C} = C^\infty(E, f, \mathfrak{f}) \cap M(E, \chi_f)$$

$$\mathcal{H}(f, \eta_f, \mathfrak{f}, E) = \mathcal{C} \cap \mathcal{H}(E, \chi_f)$$

とおく．

命題．$\mathcal{H}(f, \eta_f, \mathfrak{f}, E)$ は Hilbert space $\mathcal{H}(E, \chi_f)$ の閉部分空間である．

さて $\mathcal{H}(f, \eta_f, \mathfrak{f}, E)$ は $\operatorname*{ind}_{D\uparrow E} \chi_f$ で不変故 $\operatorname*{ind}_{D\uparrow E} \chi_f$ の部分表現を与えるが、それを $\operatorname*{ind}_{D\uparrow E}(\eta_f, \mathfrak{f})$ と書く．

$$\rho(f, \eta_f, \mathfrak{f}, G) = \operatorname*{ind}_{E\uparrow G}\left(\operatorname*{ind}_{D\uparrow E}(\eta_f, \mathfrak{f})\right)$$

とおくと、これは $\operatorname*{ind}_{D\uparrow G} \chi_f$ の部分表現である．$\rho(f, \eta_f, \mathfrak{f}, G)$ を holomorphically induced representation と呼ぶ．$\operatorname*{ind}_{D\uparrow G} \chi_f$ の表現空間を $\hat{\mathcal{H}}(f, \eta_f, \mathfrak{f}, G)$ で、$\rho(f, \eta_f, \mathfrak{f}, G)$ に対応するその部分空間を $\mathcal{H}(f, \eta_f, \mathfrak{f}, G)$ で表わす．

3°) 単連結可解リー群

以下 G は単連結可解リー群、$\mathfrak{g}$ はそのリー環を表わす。更に $\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{g}$ の巾零イデアルで $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ を含むものとし、$\mathfrak{n}$ に対応する G の連結リー部分群を N で表わす．又 $f \in \mathfrak{g}^*$、$f_0 = f|\mathfrak{n}$

$\in \mathfrak{n}^*$とする．$\mathfrak{n}$は$\mathfrak{g}$のイデアルであるから$\mathrm{Ad}\, G$で不変、従ってGのcoadjoint表現を$\mathfrak{n}^*$に制限する事により$\mathfrak{n}^*$はG－加群となる．この作用に関するGのf_0における固定群をG_{f_0}で表わす．

<u>定義</u>．$\mathfrak{f} \in P(f, G)$に対し、$\mathfrak{f} \cap \mathfrak{n}^{\mathbb{C}} \in P(f_0, N)$なる時、$\mathfrak{f}$は$\mathfrak{n}$-admissibleであるといい、更に$\mathfrak{f} \cap \mathfrak{n}^{\mathbb{C}}$が$\mathrm{Ad}_G\, G_{f_0}$で不変な時、$\mathfrak{f}$はstrongly $\mathfrak{n}$-admissibleであるという．

<u>注意</u>．$\mathfrak{f} \cap \mathfrak{n}^{\mathbb{C}}$が$B_{f_0}$に関し$\mathfrak{n}^{\mathbb{C}}$のm.i.s.の時、$\mathfrak{f}$は$\mathfrak{n}$-admissibleである．

この時まず次の存在定理が成り立つ．

<u>定理</u>．任意の$f \in \mathfrak{g}^*$に対しstrongly $\mathfrak{n}$-admissibleな$\mathfrak{f} \in P^+(f, G)$が存在する．この時$\mathfrak{f}$はstrong Pukanszky conditionをみたす。

<u>証明のidea</u>．$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$のうまいイデアル列で、ある$\mathfrak{g}_{i_0} = \mathfrak{n}$となっているものをとる．$f|\mathfrak{g}_i = f_i$とおき、$\mathfrak{g}_i$における$B_{f_i}$のradical (i.e. singular subspace)をV_iとする時、$\mathfrak{f} = \sum_i V_i$

q. e. d.

さて$f \in \mathfrak{g}^*$がintegral、$\mathfrak{f} \in P(f, G)$がstrong Pukanszky conditionをみたす時、holomorphically induced representation $\rho(f, \eta_f, \mathfrak{f}, G)$に関し、

i) その表現空間$\mathcal{H}(f, \eta_f, \mathfrak{f}, G)$は$\neq \{0\}$か？

ロ)既約か?

ハ)既約とする時、$\mathfrak{f}$に依らないか?

という問題が生じる。Gをexponential groupとしても、一般の$\mathfrak{f}\in P(f,G)$(weak Pukanszky conditionを仮定する)に対しては、これらの問題は(特に最も重要なイ)に関しては)殆ど何もわからない(cf. [8], [17])。

まず$G=N_{2k+1}$($2k+1$次元Heisenberg群)の時、この時は$^{\forall}f\in\mathfrak{g}^*$はintegralでかつ$\eta_f$は一意的な為、$\rho(f,\eta_f,\mathfrak{f},G)$を$\rho(f,\mathfrak{f},G)$、$\mathcal{H}(f,\eta_f,\mathfrak{f},G)$を$\mathcal{H}(f,\mathfrak{f},G)$と書くと、

$$\mathcal{H}(f,\mathfrak{f},G)\neq\{0\}\iff\mathfrak{f}\in P^+(f,G)$$

となり、$\mathfrak{f}\in P^+(f,G)$の時、前にN_3でみた様に$\rho(f,\mathfrak{f},G)$はKirillov theoryにより$O(f)$にassociateしたGの既約ユニタリ表現と同値である。

次にGが巾零リー群の場合は本質的にHeisenbergに帰着される。即ち$\mathfrak{f}\in P^+(f,G)$に対し、そのnon-real partにassociateした部分はHeisenbergである。

<u>定理</u>. Gを単連結巾零リー群、$\mathfrak{g}$をそのリー環、$f\in\mathfrak{g}^*$、$\mathfrak{f}\in P^+(f,G)$かつ$\mathfrak{f}\neq\overline{\mathfrak{f}}$とし、$\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$は$\mathfrak{f}$から前と同様にして定義された$\mathfrak{g}$の部分リー環とする。$\mathfrak{z}=\mathfrak{d}\cap\ker f$とおくと、$\mathfrak{d}$, $\mathfrak{z}$は$\mathfrak{e}$のイデアルであり、$\mathfrak{e}/\mathfrak{z}$は$\mathfrak{d}/\mathfrak{z}$をcenterとするHeisinberg algebraである。

この定理を用いると、G が巾零の場合 $\rho(f, \mathfrak{h}, G)$ はすべて $\pi(O(f))$ と同値である事が示される（但し、$\mathfrak{h} \in P^+(f, G)$）。

G が可解群の場合にも本質的には Heisenberg に帰着する事により次の定理が証明される。

<u>定理</u>. G を単連結可解リー群、$\mathfrak{g}$ をそのリー環、$f \in \mathfrak{g}^*$ は integral, $\mathfrak{h} \in P^+(f, G)$ は strongly $\mathfrak{n}$-admissible とする。この時、$\mathcal{H}(f, \eta_f, \mathfrak{h}, G) \neq \{0\}$ かつ $\rho(f, \eta_f, \mathfrak{h}, G)$ は G の既約ユニタリ表現で $\mathfrak{h}$ 及び $\mathfrak{n}$ に依らない。

<u>注意</u>。この定理の仮定はもっと弱める事ができて、$\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ が巾零となる様な $\mathfrak{g}$ の巾零イデアル $\mathfrak{n}$ に関し、$\mathfrak{h} \in P^+(f, G)$ が $\mathfrak{n}$-admissible であればよい (cf. [7])。

<u>定理の証明の idea</u>. $\rho(f, \eta_f, \mathfrak{h}, G)$ が $\mathfrak{h}$ を用いずに構成した G の既約ユニタリ表現と同値である事を証明する。即ち、$f_0 = f|\mathfrak{n} \in \mathfrak{n}^*$ から Kirillov theory を用いて $\rho(f_0)$ を構成し、この $\rho(f_0)$ から Mackey's little group theorem を用いて G の既約ユニタリ表現 $\rho(f, \eta_f, G)$ を得る。最後にこの $\rho(f, \eta_f, G)$ が holomorphically induced representation $\rho(f, \eta_f, \mathfrak{h}, G)$ と同値である事を示す。

<u>$\rho(f, \eta_f, G)$ の構成</u>. 1) $\rho = \rho(f_0)$ を $f_0 = f|\mathfrak{n} \in \mathfrak{n}^*$ に associate した N の既約ユニタリ表現とすると、G の $\hat{N}$ への作用に関する $\rho(f_0)$ における固定群は

$$G(\rho(f_0)) = G_{f_0}\cdot N = G_{f_0}\underset{s}{\times} N/M \ , \quad M = \{(s\ \ s^{-1})\ ;\ s\in N_{f_0}\}$$

となる。N_{f_0}は連結である。

ロ) $K = G_{f_0}\underset{s}{\times} N$ の既約ユニタリ表現でNに制限した時$\rho(f_0)$の multiple となるものの構成。

A) Kのユニタリ表現$\nu(f_0)$で$\rho(f_0)$を拡張したもので(従って$\nu(f_0)$は既約)、かつ

$$\nu(f_0)(s) = \chi_{f_0}(s)^{-1}\rho(f_0)(s) \quad \text{for} \quad s\in N_{f_0}\subset G_{f_0} \quad \cdots\cdots ①$$

となるものを構成する。$\rho(f_0)$の空間をH_0とする。

B) G_{f_0}の既約ユニタリ表現μで

$$\mu | N_{f_0} = \chi_{f_0}\cdot id \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

なるものを構成する。μの空間をH_1とする。

次にμをN上では trivial にKの表現に拡張する。この時、$\tau = \mu\otimes\nu(f_0)$は$H_0\otimes H_1$におけるKの既約ユニタリ表現で、$\tau | N$は$\rho(f_0)$の multiple である。しかるに①,②より

$$\mu\otimes\nu(f_0) | M = id \ .$$

故にτは$G(\rho(f_0)) = K/M$の表現となる。Mackey's little group theorem により $\rho(f, \eta_f, G) = \operatorname*{ind}_{G(\rho(f_0))\uparrow G} \tau$ はGの既約ユニタリ表現となる。 q.e.d.

上記定理により、Gを単連結可解リー群とする時、integral な$f\in\mathfrak{g}^*$と対応する character $\eta_f : G_f \longrightarrow \mathbb{T}$の対$(f, \eta_f)$に associate してGの既約ユニタリ表現$\rho(f, \eta_f)$が得られる。

<u>定理</u>. $f, f' \in \mathfrak{g}^*$ を integral とすると、

$$\rho(f, \eta_f) \simeq \rho(f', \eta_{f'}) \iff g.(f, \eta_f) = (f', \eta_{f'})$$

for some $g \in G$.

明らかに integral というのは coadjoint 表現の orbit に関する概念で、$f \in \mathfrak{g}^*$, $O(f)$ は integral とする時、対応する character $\eta_f : G_f \to \mathbb{T}$ の集合は $\pi_1(O(f))$ の character group $\widehat{\pi_1(O(f))}$ と 1 対 1 に対応し、結局 integral orbit Ω と $\pi_1(\Omega)$ の character η_Ω の対に associate して $\hat{G}$ の元 $\rho(\Omega, \eta_\Omega)$ が定まる。 G が単連結可解リー群の時、写像

$$\alpha : (\Omega, \eta_\Omega) \longmapsto \rho(\Omega, \eta_\Omega)$$

は単射となる。最後に G が Type I の単連結可解リー群の場合には次の事実が知られている。

<u>定理</u>. 単連結可解リー群 G が Type I である為には、$\mathfrak{g}^*$ におけるすべての orbit が integral でかつ局所閉集合なる事が必要十分であり、この時

$$\alpha : \bigcup_{\Omega \in \mathfrak{g}^*/G} \widehat{\pi_1(\Omega)} \longrightarrow \hat{G}$$

は全単射である。

References.

[1] L. Auslander, B. Kostant, Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, Invent. Math., 14 (1971), 255 – 354

[2] V. Bargmann, On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, I, Comm. on pure and appl. Math., 14 (1961), 187 – 214

[3] P. Bernat, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles, Ann. Ec. Norm. Sup., 82 (1965), 37 – 99

[4] P. Bernat, et al. Représentations des groupes de Lie resolubles, Dunod, Paris, 1972

[5] I. D. Brown, Dual topology of a nilpotent Lie group, Ann. Ec. Norm. Sup., 6 (1973), 407 – 411

[6] J. Dixmier, L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles, Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), 113 – 121

[7] M. Duflo, Sur les extensions des representations irreductibles des groupes de Lie nilpotents, Ann. Ec. Norm. Sup., 5 (1972), 71 – 120

[8] H. Fujiwara, On unitary representations of exponential groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 21 (1974), 465 – 471

[9] A. A. Kirillov, Unitary representations of nilpotent Lie groups, Uspekhi Math. Nauk, 17 (1962), 57 – 110

[10] B. Kostant, Quantization and unitary representations, Lecture notes, Springer, no. 170 (1970), 87–208

[11] G. W. Mackey, Induced representations of locally compact groups I, Ann. Math., 55 (1952), 101–139

[12] G. W. Mackey, Unitary representations of group extensions, Acta Math., 99 (1958), 265–311

[13] C. C. Moore, Representations of solvable and nilpotent groups and harmonic analysis on nil and solvmanifolds, Proc. A. M. S., Summer Conf., Williamstone, (1972)

[14] L. Pukanszky, On the theory of exponential groups, Trans. A. M. S., 126 (1967), 487 – 507

[15] L. Pukanszky, Leçons sur les représentations des groupes, Dunod, Paris, 1967

[16] S. R. Quint, Representations of Lie groups, Lecture notes, Univ. California, 1972

[17] H. Rossi, M. Vergne, Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group, J. Func. Anal., 13 (1973), 324–389

[18] M. Saito, Sur certains groupes de Lie resolubles I, II, Sci. Pap. Coll. Gen. Ed. Tokyo, 7 (1957), 1–11, 157–168

[19] R. F. Streater, The representations of the oscillator group, Commun. Math. Phys., 4 (1967), 217–236

[20] O. Takenouchi, Sur la facteur-représentation des groupes de Lie de type (E), Math. J. Okayama Univ., 7 (1957), 151–161

[21] M. Vergne, Etude de certaines representations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, Ann. Ec. Norm. Sup., 3 (1970), 353–384