数理解析研究所講究録
第 262 巻 1976 年 54-71

対称空間上の固有函数の境界値と積分表示

日本女子大　峰村 勝弘

§1. Helgason の結果と予想

周知の様に，S. Helgason は 1970年の Nice Congress で，単位円内部 $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$ における laplacian

$$\Delta=(1-x^2-y^2)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\quad ,\ z=x+iy$$

の固有函数はすべて，単位円周 $S=\{z\in\mathbb{C}\ |z|=1\}$ の上の hyperfunction φ とある複素数 μ により，次の Poisson 積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}\right)^{\mu}\varphi(e^{i\theta})\,d\theta$$

として得られることを示し，一般の (non-compact) 対称空間での成立を予想した。([1])．以下これを Helgason 予想と呼ぶことにする。まず上の定理を簡単に説明しよう。

Lie group $G=SU(1,1)=\left\{g=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \bar\beta&\bar\alpha\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha,\beta\in\mathbb{C}\ ,\ |\alpha|^2-|\beta|^2=1\right\}$ の $P_1(\mathbb{C})=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上の作用を

$$g(z)=(\alpha z+\beta)/(\bar\beta z+\bar\alpha)\quad ,\ z\in P_1(\mathbb{C})$$

により定める。 $K=\left\{\begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta}\end{pmatrix} \middle| \theta\in\mathbb{R}\right\}$ とおくと、Kは$0\in D$ の isotropy subgroup となる。GはDに推移的に作用するから、$G/K \ni gK \longmapsto g(0)\in D$ に同型となる。以下、G/K とDを同一視する。Gの subgroups M, A, Nを

$$M=\left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\},\ A=\left\{\begin{pmatrix} \operatorname{ch}t & \operatorname{sh}t \\ \operatorname{sh}t & \operatorname{ch}t\end{pmatrix} \middle| t\in\mathbb{R}\right\},\ N=\left\{\begin{pmatrix} 1+i\xi & -i\xi \\ i\xi & 1-i\xi\end{pmatrix} \middle| \xi\in\mathbb{R}\right\}$$

で定義し、$P=MAN$とおく。Pは $1\in S$ の isotropy subgroup となる。従って、$G/P\simeq S$となる。S上の hyperfunction 全体を $\mathcal{B}(S)$ と書く。

次に、S上の real-analytic functions全体を $\mathcal{A}(S)$ で表わす。Uを、Sを含む$\mathbb{C}$における開集合とし、$H(U)$でU上の holomorphic functions 全体のなす空間で、U内の compact sets 上の一様収束で位相を入れた top. vector space を表わす。$\mathcal{A}(S)$ の strong dual を $\mathcal{A}(S)'$ とすると

$$\mathcal{B}(S)\cong\mathcal{A}(S)'$$

が成立する。この同型対応については後に述べる。

さて $\psi\in\mathcal{A}(S)$ を一つとり固定しよう。任意の $\varphi\in\mathcal{A}(S)$ に対して

$$\psi(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(e^{i\theta})\psi(e^{i\theta})\,d\theta$$

とおくと、$\mathcal{A}(S)\ni\varphi\longmapsto\psi(\varphi)\in\mathbb{C}$ は $\mathcal{A}(S)'$ に属する。従って以下この対応で $\mathcal{A}(S)\subset\mathcal{A}(S)'$ とみなす。

$n\in\mathbb{Z}$に対して　$\varphi_n\in\mathcal{A}(S)$を

$$\varphi_n(e^{i\theta})=e^{in\theta}$$

で定める。このとき任意の$\varphi\in\mathcal{A}(S)'$は$\mathcal{A}(S)'$の位相で

$$\varphi=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\varphi_n$$

と展開される。ここで　a_nの満たすべき条件は

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|\,r^{|n|}<\infty \qquad (1>{}^{\forall}r\geq 0)$$

D上のG-不変な differential operators のなす algebra を$\mathbb{D}(D)$と書くことにすれば，$\Delta\in\mathbb{D}(D)$であり，$\mathbb{D}(D)$はΔにより生成される。すなわち．$\mathbb{D}(D)\cong\mathbb{C}[\Delta]$。　$\lambda\in\mathbb{C}$に対し．

$$\mathcal{A}(D,\lambda)=\{u\in\mathcal{B}(D)\mid \Delta u=\lambda(\lambda+1)u\}$$

とおく。ここで$\mathcal{B}(D)$はD上のhyperfunctions全体のなす空間である。Δは elliptic であるから．$\mathcal{A}(D,\lambda)$の元は real analytic である。

$$P(z,e^{i\theta})=\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}$$

とおくと，任意にθを固定したとき　$P_\lambda(z,e^{i\theta})=P(z,e^{i\theta})^{\lambda+1}$は$\mathcal{A}(D,\lambda)$に属することが容易に確かめられる。従って　$\varphi\in\mathcal{A}(S)'$に対して　D上の函数　$\mathcal{P}_\lambda(\varphi)$を

$$(\mathcal{P}_\lambda(\varphi))(z)=\varphi(P_\lambda(z,\cdot))$$

で定義すると．$\mathcal{P}_\lambda(\varphi)\in\mathcal{A}(D,\lambda)$となる。

また．$u\in\mathcal{A}(D,\lambda)$，$g\in G$に対し

$$(\pi(g)u)(z) = u(g^{-1}(z)) \quad , \quad z \in D$$

とおけば π により $\mathcal{A}(D,\lambda)$ は G-module となる。一方

$\varphi \in \mathcal{B}(S)$ に対し

$$(\pi_\lambda(g)\varphi)(\omega) = |\bar{\alpha}\omega - \beta|^{2\lambda}\varphi(g^{-1}(\omega)),$$

$$\omega \in S, \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

とおけば π_λ により $\mathcal{B}(S)$ は G-module となり，$\mathcal{P}_\lambda$ は $\mathcal{B}(S)$ から $\mathcal{A}(D,\lambda)$ への G-homomorphism を与えていることがわかる：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(S) & \xrightarrow{\mathcal{P}_\lambda} & \mathcal{A}(D,\lambda) \\ {\scriptstyle \pi_\lambda(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi(g)} \\ \mathcal{B}(S) & \xrightarrow{\mathcal{P}_\lambda} & \mathcal{A}(D,\lambda) \end{array} \quad 。$$

さて，$\varphi_n \in \mathcal{A}(S)$ に対して $f_\lambda^n = \mathcal{P}_\lambda(\varphi_n)$ とおこう。すると

$\mathcal{A}(S) \ni \varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi_n$ に対して

$$\mathcal{P}_\lambda(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n f_\lambda^n$$

となり，又 f_λ^n に関しては

$$\begin{cases} f_\lambda^n(e^{i\theta}z) = e^{in\theta} f_\lambda^n(z) \\ f_\lambda^n(r) = (1-r^2)^{\lambda+1} r^{|n|} \dfrac{\Gamma(|n|+\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(|n|+1)} \\ \qquad \times F(\lambda+1, |n|+\lambda+1, |n|+1; r^2) \quad (0 \le r < 1) \end{cases}$$

となることがわかる。一方任意の $f \in \mathcal{A}(D,\lambda)$ は

$$f(e^{i\theta}z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{in\theta}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta}z)e^{-in\theta}d\theta$$

と展開されるが，$\lambda\notin-\mathbb{N}$ のとき $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta}z)e^{-in\theta}d\theta$ は f_λ^n の scalar 倍になることがわかる。従って

$$f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}b_n f_\lambda^n \qquad (b_n\in\mathbb{C})$$

という展開が得られる。ここで，先の f_λ^n の具体的な形を見てやることによって，この係数 b_n は S 上の hyperfunction の φ_n による展開の係数の満たす条件

$$(1) \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}}|b_n|\,r^{|n|}<\infty \qquad (1>r\geq 0)$$

を満足するので，$\varphi=\sum b_n\varphi_n$ とおくと $\varphi\in\mathcal{A}(S)'$ であり，$\mathcal{P}_\lambda(\varphi)=f$ となることが容易にわかる。故に，$\lambda\notin-\mathbb{N}$ のとき $\mathcal{P}_\lambda$ が全射であることが結論される。

実は，この方法で，Lorentz group の場合は全く同様に，同じ定理が証明出来るのだが，$SU(n,1)$, $Sp(n,1)$, F_{II} では弱い形の定理しか証明出来ない。又この方法は f_λ^n の explicit な形を必要とするため，対称空間の rank が 2 以上の場合は実行不可能である。

§2. 固有函数の境界値

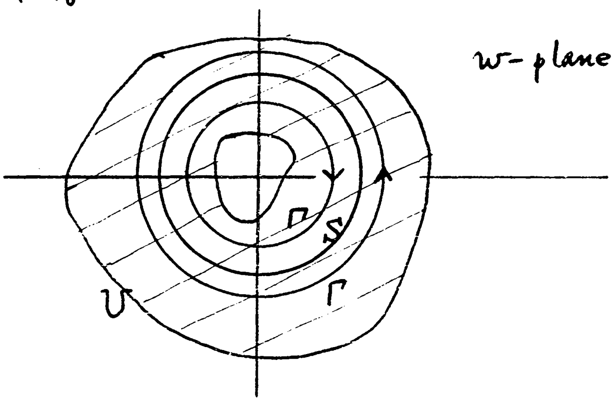
この§では，§1とは見方を変えて，同じ問題を考えてみる。まず§1での$\mathcal{B}(S) \cong \mathcal{A}(S)'$の同型対応について述べよう。（詳しくは[ ]）。定義より

$$\mathcal{B}(S) = \varinjlim_{U \supset S} H(U-S)/H(U)$$

である。$F \in H(U-S)$の定める$\mathcal{B}(S)$の元φを$\varphi = [F, U]$あるいは$\varphi(\omega) = [F(w)]_{w=\omega}$などと記す。$\varphi$の$S$上の積分$\int_S \varphi(\omega)d\omega$を

$$\int_S \varphi(\omega)d\omega = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(w)\frac{dw}{w}$$

で定める。但しΓは



で与えられる積分路である。積分は代表元Fと積分路Γの取り方に依らない。$\psi \in \mathcal{A}(S)$と$\varphi \in \mathcal{B}(S)$に対して，ある$U \supset S$，$F \in H(U-S)$が存在して，$\varphi = [F]$，$\psi \in H(U)$となる。そこで，$[\psi(w)F(w)]$により$\psi$と$\varphi$の積$\psi\varphi$を定義する。この積により$\mathcal{B}(S)$は$\mathcal{A}(S)$-moduleとなる。$U \supset S$に対し

$U_0=\{w\in U \mid |w|<1\}$, $U_\infty=\{w\in U \mid |w|>1\}$ とおく。
$\varepsilon_0, \varepsilon_\infty \in H(\mathbb{C}-S)$ を $|w|<1$ のとき $\varepsilon_0(w)=1$, $\varepsilon_\infty(w)=0$ とし $|w|>1$ のとき $\varepsilon_0(w)=0$, $\varepsilon_\infty(w)=-1$ として定義する。
$\psi\in \mathcal{A}(S)$に対し $\psi\in H(U)$ なる Uをとり, $G\in H(U-S)$を $G(w)=\varepsilon_0(w)\psi(w)$ で定めれば $\psi\mapsto[G]$ は $\mathcal{A}(S)$から $\mathcal{B}(S)$へのinjectionを与える。以下この対応で $\mathcal{A}(S)\subset \mathcal{B}(S)$ と考える。$\psi\in H(D)$に対して $[\varepsilon_0\psi]=[\varepsilon_\infty\psi]$であることに注意する。

さて, $\varphi\in \mathcal{B}(S)$と$\psi\in \mathcal{A}(S)$に対して pairing (φ,ψ)を

$$(\varphi,\psi)=\int_S(\psi\varphi)(\omega)\,d\omega$$

で定める。このpairingでφは$\mathcal{A}(S)'$の元とみなせ,

$$\mathcal{B}(S)\cong\mathcal{A}(S)'$$

が得られる。容易に,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(S) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathcal{A}(S)' \\ \mathcal{A}(S) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

が可換であることがわかる。従って,上の同一視で $\varphi\in\mathcal{B}(S)$ のPoisson積分は

$$(\mathcal{P}_S(\varphi))(z)=\int_S P_\lambda(z,\omega)\varphi(\omega)\,d\omega$$

$$=(\varphi(w), P_\lambda(z,w))$$

で与えられる。

次に、$\varphi \in \mathcal{B}(S)$ の Poisson 積分を φ の定義函数を使って、具体的に書き下してみよう。

$$P(z,w)=\frac{1-|z|^2}{|z-w|^2}$$

は $w \in S$ に関して real analytic である。$w^{-1}=\bar{w}$ に注意すると

$$\frac{1-|z|^2}{|z-w|^2}=\frac{w}{w-z}-\frac{w}{w-\frac{1}{\bar{z}}}$$

と書き直せる。そこで

$$Q(z,w)=\frac{w}{w-z}-\frac{w}{w-\frac{1}{\bar{z}}}$$

とおけば、$z \in D$ を fix するごとに $Q(z,w)$ は S の近傍で正則で、$Q(z,w)=P(z,w)\ (w \in S)$ をみたす。

$Q(z,w)=P(z,w)>0$ であるから $Q_\lambda(z,w)=Q(z,w)^{\lambda+1}$ が S の近傍で一価正則で、$Q_\lambda(z,w)=P_\lambda(z,w)$ なるように定義出来る。従って $\varphi=[F,U] \in \mathcal{B}(S)$ に対して、Γ を次の様にとれば

$$(\mathcal{P}_\lambda(\varphi))(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q_\lambda(z,w)F(w)\frac{dw}{w}.$$

例　$\mathcal{P}_0(\varphi_n)$　$\varphi_n(e^{i\theta})=e^{in\theta}$

① $n>0$ の場合

$$\varphi_n(\omega)=[\varepsilon_0(w)\,w^n]_{w=\omega}$$

$$\left(\mathcal{P}_0(\varphi_n)\right)(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\frac{w}{w-z}-\frac{w}{w-\frac{1}{\bar z}}\right)\varepsilon_0(w)\,w^n\frac{dw}{w}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(z)}\frac{w^n}{w-z}\,dw=z^n$$

② $n<0$ の場合

$$\varphi_n(\omega)=[\varepsilon_0(w)\,w^{-|n|}]_{w=\omega}=[\varepsilon_\infty(w)\,w^{-|n|}]_{w=\omega}$$

$$\left(\mathcal{P}_0(\varphi_n)\right)(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\frac{w}{w-z}-\frac{w}{w-\frac{1}{\bar z}}\right)\varepsilon_\infty(w)\,w^{-|n|}\frac{dw}{w}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(D)}\left(\frac{w}{w-z}-\frac{w}{w-\frac{1}{\bar z}}\right)w^{-|n|}\frac{dw}{w}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{1}{\bar z})}\left(\frac{w}{w-z}-\frac{w}{w-\frac{1}{\bar z}}\right)w^{-|n|}\frac{dw}{w}$$

$$=\left(\frac{1}{\bar z}\right)^{-|n|}=\bar z^{|n|}$$

従って　$\mathcal{P}_0(\varphi_n)=\begin{cases} z^n & n\geq 0\\ \bar z^{|n|} & n<0\end{cases}$

この結果は確に $f_\lambda^n(z)$ の $\lambda=0$ の場合に一致している。

まて、$f_\lambda^n=\mathcal{P}_\lambda(\varphi_n)$ の hyperfunction としての境界値が次の様

にして取ることが出来る。超幾何函数に対するGaussの変換公式　$(\alpha+\beta-\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ とする。)

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma ; z)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1 ; 1-z)$$
$$+ \Gamma(\alpha+\beta-\gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1 ; 1-z)$$

により

$$f^n_\lambda(r) = (1-r^2)^{\lambda+1} r^{|m|} \frac{\Gamma(|m|+\lambda+1)\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(|m|-\lambda)\Gamma(-\lambda)}$$
$$\times F(\lambda+1, |m|+\lambda+1, 2\lambda+2 ; 1-r^2)$$
$$+ (1-r^2)^{-\lambda} r^{|m|} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2} F(|m|-\lambda, -\lambda, -2\lambda ; 1-r^2)$$

$$(-2\lambda-1 \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

と表わされる。ここで $D-\{0\}$ に次の様なparameterを入れる。

$$\begin{array}{ccc} D-\{0\} & \approx & S \times (0,1) \\ \wr & & \wr \\ G/K - \{eK\} & \approx & K/M \times (0,1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ kaK & \longleftrightarrow & (kM, y) \end{array} \qquad y = e^{-\alpha(\log a)}$$

容易に、$D \ni z = re^{i\theta}$ とするとき　$r = (1-y)/(1+y)$ となることがわかる。従って

$$f_\lambda^n(r) = y^{\lambda+1}\left(\frac{2}{1+y}\right)^{2\lambda+2}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{|n|}\frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(|n|-\lambda)\Gamma(-\lambda)}$$
$$\times F(\lambda+1, |n|+\lambda+1, 2\lambda+2; \frac{4y}{(1+y)^2})$$
$$+ y^{-\lambda}\left(\frac{2}{1+y}\right)^{-2\lambda}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{|n|}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}F(|n|-\lambda, -\lambda, -2\lambda; \frac{4y}{(1+y)^2})$$

ここで

$$\varphi(e^{i\theta}, y) = \left(\frac{2}{1+y}\right)^{2\lambda+2}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{|n|}\frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(|n|-\lambda)\Gamma(-\lambda)}$$
$$\times F(\lambda+1, |n|+\lambda+1, 2\lambda+2; \frac{4y}{(1+y)^2}) \times e^{in\theta}$$

$$\psi(e^{i\theta}, y) = \left(\frac{2}{1+y}\right)^{-2\lambda}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{|n|}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}$$
$$\times F(|n|-\lambda, -\lambda, -2\lambda; \frac{4y}{(1+y)^2}) \times e^{in\theta}$$

とおき，$f_\lambda^n(re^{i\theta}) = e^{in\theta} f_\lambda^n(r)$ に注意すれば；

$$f_\lambda^n(re^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta}, y)\, y^{\lambda+1} + \psi(e^{i\theta}, y)\, y^{-\lambda}$$

が得られる。さてここで $\varphi(e^{i\theta}, 0)$，$\psi(e^{i\theta}, 0)$ に意味がある。

そこで $\varphi(\omega) = \varphi(\omega, 0)$，$\psi(\omega) = \psi(\omega, 0)$ とおいて

$$\beta_\lambda(f_\lambda^n) = \psi$$
$$\beta_{-(\lambda+1)}(f_\lambda^n) = \varphi$$

と定める。直ちに

$$\begin{cases} \beta_\lambda(f_\lambda^n) = 2^{-2\lambda}\dfrac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}\varphi_n \end{cases}$$

(2) $\left\{ \beta_{-(\lambda+1)}(f_\lambda^n) = 2^{2\lambda+2} \dfrac{\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\lambda)} \cdot \dfrac{\Gamma(|n|+\lambda+1)}{\Gamma(|n|-\lambda)} \varphi_n \right.$

がわかる。一方任意の $f \in \mathcal{A}(D,\lambda)$ は

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n f_\lambda^n$$

と展開出来る。ここで

$$F(w) = \varepsilon_0(w) \sum_{n\geq 0} b_n w^n + \varepsilon_\infty(w) \sum_{n<0} b_n w^n$$

$$G(w) = \varepsilon_0(w) \sum_{n\geq 0} b_n \frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)}{\Gamma(|n|-\lambda)} w^n$$

$$+ \varepsilon_\infty(w) \sum_{n<0} b_n \frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)}{\Gamma(|n|-\lambda)} w^n$$

とおくと，$\{b_n\}$ が (1) の条件を満たしていることから F, G 共に $H(\mathbb{C}-S)$ に属することがわかる。そこで

$$\beta_\lambda(f) = 2^{-2\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2} \left[F(w) \right]_{w=\omega}$$

$$\beta_{-(\lambda+1)}(f) = 2^{2\lambda+2} \frac{\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\lambda)} \left[G(w) \right]_{w=\omega}$$

とおいて $\mathcal{A}(D,\lambda)$ から $\mathcal{B}(S)$ への map. β_λ と $\beta_{-(\lambda+1)}$ を定義する。明らかに (2) の拡張になっている。

では Poisson kernel の $\omega=1$ の場合，すなわち $P(z,1)$ に対

して $\beta_\lambda(P(z,1))$ を求めてみよう。まず $w=1$ における delta function は $\delta=\left[\frac{1}{1-w}\right]$ で与えられることに注意しておく。

$$f_\lambda^n(z)=P_\lambda(\varphi_n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_\lambda(z,e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta$$

より

$$P_\lambda(z,e^{i\theta})=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-in\theta}f_\lambda^n(z)$$

が得られる。従って $\theta=0$ として

$$P_\lambda(z,1)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f_\lambda^n(z)$$

となる。$\beta_\lambda(P_\lambda(z,1))$ の定義函数 F は

$$F(w)=2^{-2\lambda}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}\left\{\varepsilon_0(w)\sum_{n\geq 0}w^n+\varepsilon_\infty(w)\sum_{n>0}w^{-n}\right\}$$

$$=2^{-2\lambda}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}\left\{\varepsilon_0(w)\frac{1}{1-w}+\varepsilon_\infty(w)\frac{1}{w-1}\right\}$$

$$=2^{-2\lambda}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}\cdot\frac{1}{1-w}$$

となる。故に $\beta_\lambda(P_\lambda(z,1))=2^{-2\lambda}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}\delta$ が得られる。ここでは省略するが、β_λ, $\beta_{-(\lambda+1)}$ は共に $\mathcal{A}(D,\lambda)$ から $\mathcal{B}(S)$ への G-homomorphism である。すなわち

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}(D,\lambda) & \xrightarrow{\beta_\lambda} & \mathcal{B}(S) \\
{\scriptstyle \pi(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\lambda(g)} \\
\mathcal{A}(D,\lambda) & \xrightarrow[\beta_\lambda]{} & \mathcal{B}(S)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}(D,\lambda) & \xrightarrow{\beta_{-(\lambda+1)}} & \mathcal{B}(S) \\
{\scriptstyle \pi(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{-(\lambda+1)}(g)} \\
\mathcal{A}(D,\lambda) & \xrightarrow{\beta_{-(\lambda+1)}} & \mathcal{B}(S)
\end{array}
$$

は共に可換である。このことを認めれば

$$\beta_\lambda \mathcal{P}_\lambda = 2^{-2\lambda}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}\ \mathrm{id}.$$

(id. は恒等作用素) となることが次の様にして導びかれる。

$$
\begin{aligned}
\beta_\lambda \mathcal{P}_\lambda(\varphi)(\omega) &= \beta_\lambda \int_{S'} P_\lambda(z,\omega_0)\varphi(\omega_0)\,d\omega_0 \\
&= \int_{S'} \beta_\lambda P_\lambda(z,\omega_0)\varphi(\omega_0)\,d\omega_0 \\
&= \int_{S'} \beta_\lambda P_\lambda(\omega_0^{-1}z,1)\varphi(\omega_0)\,d\omega_0 \\
&= \int_{S} \delta(\omega_0^{-1}\omega)\varphi(\omega_0)\,d\omega_0 = \varphi(\omega)
\end{aligned}
$$

さて、ここで Harish-Chandra の球函数の理論を援用すると、β_λ, $\beta_{-(\lambda+1)}$ は injective であることが容易に導びかれる。(但し $\lambda \notin \mathbb{Z}$ は仮定している。) それを示そう。$u \in \mathcal{A}(D,\lambda)$ とし $u \neq 0$, $\beta_\lambda(u)=0$ として矛盾を出す。β_λ の G-hom. であることから $u(0)=1$ と仮定してよい。

ここで, $u_K(z) = \int_K u(k(z))dk$ とおく。明らかに $u_K(0)=1$ である。従って Harish-Chandra の球函数の理論より

$$u_K = \mathcal{P}_\lambda(1)$$

と表わされる。従って $\beta_\lambda(u_K) = 2^{-2\lambda}\dfrac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}$ が得られるが, 一方では

$$\beta(u_K) = \int_K \pi_\lambda(k)\beta_\lambda(u)\,dk = \int_K 0\,dk = 0$$

であるので矛盾。

ここで, $2^{-2\lambda}\dfrac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}$ は Harish-Chandra の c-function を用いて, $c(-\sqrt{-1}(\lambda+\frac{1}{2})\alpha)$ と表わされることにも注意しておく。

さて, 以上の β_λ の性質をまとめると

(3) $\begin{cases} \text{(i)} & \lambda \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z} \text{ のとき } \beta_\lambda : \mathcal{A}(D,\lambda) \longrightarrow \mathcal{B}(S) \text{ が定義出来て, } G\text{-homomorphism} \\ \text{(ii)} & \beta_\lambda \circ \mathcal{P}_\lambda = c(-\sqrt{-1}(\lambda+\frac{1}{2})\alpha)\cdot id \\ \text{(iii)} & \beta_\lambda \text{ は injective} \end{cases}$

(3) から, $\lambda \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ のとき $\mathcal{P}_\lambda$ が surjective であることが次の様に示される。$u \in \mathcal{A}(D,\lambda)$ に対し

$$\varphi = c(-\sqrt{-1}(\lambda+\tfrac{1}{2})\alpha)^{-1}\beta_\lambda(u)$$

とおく。すると $\beta_\lambda \mathfrak{P}_\lambda(\varphi) = c(-\sqrt{-1}(\lambda+\frac{1}{2})\alpha)\varphi = \beta_\lambda(u)$. β_λ は injective だから $\mathfrak{P}_\lambda(\varphi) = u$ となる。

最後に. $\lambda=0$ の場合の $\beta_{-1}\mathfrak{P}_0$ について述べておこう。β_{-1} はもともと定義されていないが, 次の様にしても $\beta_{-1}\mathfrak{P}_0$ に意味がつけられる。$\beta_{-(\lambda+1)}\mathfrak{P}_\lambda$ を考えてみると

$$\beta_{-(\lambda+1)}\mathfrak{P}_\lambda : \varphi_n \longmapsto f_\lambda^n \longmapsto 2^{2\lambda+2}\frac{\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\lambda)}\cdot\frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)}{\Gamma(|n|-\lambda)}\varphi_n$$

ここで $\lambda\to 0$ としてみると 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$2^{2\lambda+2}\frac{\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\lambda)}\cdot\frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)}{\Gamma(|n|-\lambda)} \longrightarrow -2|n|$$

となる。そこで $\beta_{-1}\mathfrak{P}_0(\varphi_n) = -2|n|\varphi_n$ と考えよう。
$\beta_{-(\lambda+1)}\mathfrak{P}_\lambda$ は $\mathcal{B}(S)$ から $\mathcal{B}(S)$ への G-hom. であるから $\beta_{-1}\mathfrak{P}_0$ も $\mathcal{B}(S)$ から $\mathcal{B}(S)$ への G-hom. すなわち intertwining operator である。さて, D に先の座標 $(e^{i\theta}, y)$ を入れて考える. すると容易に, 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$n\geq 0 \text{ のとき} \quad \left(\frac{\partial z^n}{\partial y}\right)_{y=0} = -2|n|e^{in\theta}$$

$$n<0 \text{ のとき} \quad \left(\frac{\partial \bar{z}^{|n|}}{\partial y}\right)_{y=0} = -2|n|e^{in\theta}$$

となることがわかる。前に述べたように

$$z^n = \beta_0(\varphi_n) \quad (n \geq 0), \qquad \bar{z}^{|n|} = \beta_0(\varphi_n) \quad (n<0)$$

であるから

$$z^n|_{y=0} = \varphi_n \quad (n \geq 0), \qquad \bar{z}^{|n|}|_{y=0} = \varphi_n \quad (n<0)$$

に注意すれば $\beta_{-1}\beta_0$ は $z^n, \bar{z}^{|n|}$ の Dirichlet data に対し Neumann data を対応させていることがわかる。

§3. 一般の対称空間におけるHelgason予想の肯定的解決

§2において、任意の固有函数に対して、その境界値をとる写像が構成されたが、そこでは、固有函数の球函数展開を用いた。しかし実は一般の（higher rankの）対称空間において各不変微分作用素がMartin境界に関して確定特異点型であることより、genericな固有値に関しては（球函数展開することなしに）固有函数の境界値をとる写像が構成され、§2の(3)の(i)〜(iii)と同様の性質を持つことが示され、従って積分表示出来ることが証明される。これらに関しては 岡本-峰村[5]，峰村[4]，SL(3, ℝ)に関しては 大島[6]，一般の対称空間での完全な証明は［3］，写像 β の構成については（確定特異点型微分方程式の理論についても）大島[7]，柏原-大島［2］を参照されたい。

文献

[1] Helgason, S. Group Representations and Symmetric Spaces, Actes, Congrés intern. Math., 1970. Tome 2, 313-319.

[2] 柏原正樹-大島利雄, The boundary value problem for the systems of differential equations with regular singularity, to appear.

[3] 柏原正樹-木幡篤孝-峰村勝弘-岡本清郷-大島利雄-田中誠, Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, to appear.

[4] 峰村勝弘, 対称空間上の不変微分作用素の同時固有函数, 数理研講究録"超函数と線型微分方程式 IV"に掲載予定.

[5] 岡本清郷-峰村勝弘, 対称空間上の境界値問題について, 数理研講究録 227 (1975), 70-74.

[6] 大島利雄, 対称空間上の境界値問題について, 数理研講究録"対称空間上の不変微分方程式"に掲載予定.

[7] ———, 確定特異点型境界値問題について, 数理研講究録"超函数と線型微分方程式 IV"に掲載予定.