数理解析研究所講究録
第 264 巻 1976 年 1-21

非線形双曲型方程式の半群論的取扱いについて

早大 教育　　大春愼之助

本論文の目的は非線形双曲型方程式を非線形半群の近似の立場から取扱うことについて論ずることである。非線形半群の生成定理を非線形発展系に応用することについては多くの研究がある。(例えば Barbu [1], Brezis [3], Bénilan [2], Crandall [5], Konishi [11], Webb [18] 等.) 一方, 非線形半群の近似についても, 線形半群の近似理論を拡張することが試みられた。(例えば Brezis-Pazy [4], Crandall-Pazy [6], Miyadera [13], Miyadera-Oharu [14], Goldstein [7] 等.) これ等の結果を適当な形に変形して, 非線形発展系の差分解法に応用することを考えることは一つの興味ある問題である。Oharu-Takahashi [16] ではこの立場に立って単独の保存型方程式を取扱った。ここでは, [16] と同じ考えで変数係数を含む保存型方程式に対する半群解を差分近似を通して構成することについて述べる。第一節では半群の近似について述べ, 第二節では第一節に与える結果を用いて保存型方程式を取扱う。

§1. 非線形半群の近似.

1.1. Banach空間 X における発展方程式. Banach空間 X における作用素 A_0, B_0 に対して次のような発展方程式を考える：

(1.1) $$u'(t) = (A_0 + B_0)u(t), \quad t > 0.$$

A_0 と B_0 に対して次の(1.2)を満足する線形集合 X_0 と, X 上の下半連続な非負値凸関数 $p(\cdot)$ で X_0 をその essential domain とするものが存在すると仮定する：

(1.2) $$\overline{D(A_0) \cap X_0} = X, \quad X_0 \subset D(B_0).$$

各 $\alpha > 0$ に対して

$$X_\alpha = \{u \in X : p(u) \leqq \alpha\}$$

とおく. X_α は閉かつ凸で, $X_0 = \bigcup_{\alpha > 0} X_\alpha$ である. 作用素 B_0 は A_0 よりも"regular"なものを考える. そこで初期値 u_0 を X_0 の中に取り, 初期条件

(1.3) $$u(0) = u_0 \in X_0$$

の下で(1.1)の解を求めることを考える. 後に仮定するように, 作用素 B_0 は各 X_α 上で連続となるようなものとする. 従ってここでは A_0 のみを近似することを考え, その近似がどのような条件を満足すれば初期値問題(1.1), (1.3)の半群解が存在するか, ということについて論ずる.

1.2. A_0 の近似. この節では A_0 を各 X_α において別々に近似することとし, 次のような近似を取扱う. $(0,\infty)$ 上の正値非増加

関数 $h(\alpha)$ と，各 $\alpha>0$, $h\in(0,h(\alpha))$ に対して X_α 上の作用素 $A_{\alpha,h}$: $X_\alpha\to X_0$ が存在して次の条件を満足すると仮定する。

(A_0) X の稠密な部分集合 D が存在して，$D\subset D(A_0)\cap X_0$ かつ

$$\lim_{h\to 0+} A_{\alpha,h}u = A_0u\in X_0, \qquad \alpha>0,\ u\in X_\alpha\cap D;$$

(A_1) 非負定数 a, a' が存在して，$u\in X_\alpha$, $h\in(0,h(\alpha))$, $\alpha>0$ に対して

$$p((I+hA_{\alpha,h})u)\leqq(1+ah)p(u)+a'h;$$

(A_2) 非負定数 ω が存在して，$h\in(0,h(\alpha))$, $\alpha>0$ に対して

$$Lip_{X_\alpha}((I+hA_{\alpha,h}))\leqq 1+\omega h,$$

ここで左辺は $I+hA_{\alpha,h}$ の X_α 上での最小の Lipschitz 定数を表わす.

(A_2) より各 $A_{\alpha,h}$ は X_α 上で Lipschitz 連続である．従って，条件 (A_0) は作用素 A_0 が各 X_α 上で Lipschitz 連続な作用素で近似されるということを意味する．また，(A_2) より各 $A_{\alpha,h}-\omega$ は X で dissipative となるから，各 $\lambda\in(0,1/\omega)$ に対して resolvent

$$J_{\alpha,h}(\lambda)=(I-\lambda A_{\alpha,h})^{-1}$$

が存在する．$\omega_1=\max\{\omega,a\}$ として

$$\nu(\beta,\lambda)=(1-\lambda a)^{-1}(\beta+\lambda a'),\quad \beta\geqq 0,\ \lambda\in(0,1/\omega_1) \tag{1.4}$$

とおくと，不動点定理を用いて次が成立することがわかる:

$$R(I-\lambda A_{\alpha,h})\supset X_\beta,\qquad \alpha\geqq\nu(\beta,\lambda),\ h\in(0,h(\alpha)); \tag{1.5}$$

$$p(J_{\alpha,h}(\lambda)u)\leqq\nu(p(u),\lambda),\qquad \alpha\geqq\nu(\beta,\lambda),\ h\in(0,h(\alpha)),\ u\in X_\beta. \tag{1.6}$$

そこで (1.5) に基づき次の条件を仮定する.

(C) X_0 から X への作用素の族 $\{J_\lambda : \lambda\in(0,1/\omega_1)\}$ が存在して，

$\lambda \in (0, 1/\omega_1)$, $u \in X_0$, $\alpha \geqq \nu(p(u), \lambda)$ に対して

$$\lim_{h \to 0+} J_{\alpha,h}(\lambda)u = J_\lambda u.$$

<u>注意 1.1.</u> p が下半連続であることから

(1.7) $\quad p(J_\lambda u) \leqq \nu(p(u), \lambda), \quad \lambda \in (0, 1/\omega_1), \ u \in X_0$

となるから，J_λ は X_0 をそれ自身に写す。

<u>注意 1.2.</u> p が X_0 の indicator であるとき，$X_\alpha \equiv X_0$, $A_{\alpha,h} \equiv A_h$ と考えられ，(A_1) は自動的に満足される．従って条件(C)はBrezis-Pazy [4] で取扱われている条件と同じになり，従来考えられている半群の近似が得られる．条件 (A_2) に於てとくに $a = a' = 0$ とすると，作用素 $I + hA_{\alpha,h}$ と $J_{\alpha,h}(\lambda)$ は X_α をそれ自身に写す．従って各 $A_{\alpha,h}$ は X_α 上の半群 $\{T_{\alpha,h}(t)\}$ の生成作用素となり，この場合 Oharu-Takahashi [16] で取扱った半群の収束定理が得られる．

<u>注意 1.3.</u> $A_0 - \omega$ が dissipative で次の条件を満足すると仮定する：

(C′) 各 $\lambda \in (0, 1/\omega_1)$, $\beta > 0$, $u \in X_\beta$, $\alpha \geqq \nu(\beta, \lambda)$ と，$(0, h(\alpha))$ に含まれる任意の null sequence $\{h_i\}$ に対して $v \equiv \lim_{i \to \infty} J_{\alpha,h_i}(\lambda)u$ が存在して，$v \in D(A_0)$ かつ $\lim_{i \to \infty} A_{\alpha,h_i} J_{\alpha,h_i}(\lambda)u = A_0 v$ が成立する．

すると，条件(C)が $J_\lambda = (I - \lambda A_0)^{-1}/X_0$, $\lambda \in (0, 1/\omega_1)$ に対して成立し，集合 $D(A) = (I - \lambda A_0)^{-1}[X_0]$ は λ に無関係で，J_λ は一価作用素 $A = A_0/D(A)$ の resolvent になる．

条件(C)を仮定する意味は次の命題によって述べられる．

命題 1.1. 条件 (A_i), (C) の下で，$J_\lambda = (I-\lambda A)^{-1}$ となる作用素 A が存在して次の性質を持つ：

(a) $R(I-\lambda A) = X_0 \supset D(A)$, $\lambda \in (0, 1/\omega_1)$;

(b) $\bar{A} - \omega$ は m-dissipative で，$\bar{J}_\lambda = (I - \lambda \bar{A})^{-1}$;

(c) $A \supset A_0/D$ で $\overline{D(A)} = X$.

証明は条件(C)と $J_{\alpha,h}(\lambda)$ の性質を用いて J_λ が resolvent relation

$$J_\lambda u = J_\mu[(\mu/\lambda)u + (1-\mu/\lambda)J_\lambda u], \quad u \in X_0, \ \lambda, \mu \in (0, 1/\omega_1)$$

を示すことによって与えられる．この証明に於て X_0 が線形集合であることを用いる．

1.3. 収束定理. (1.1) に与えた作用素 B_0 は条件 (A_1) と (A_2) に類似した以下の条件を満足すると仮定する：

(B_1) 非負定数 b, b' が存在して，$u \in X_\alpha$, $\alpha > 0$, $h \in (0, h(\alpha))$ に対して

$$p((I+hA_{\alpha,h})u) \leqq (1+bh)p(u) + b'h;$$

(B_2) 任意の $\alpha > 0$ に対して，定数 $\gamma_\alpha > 0$ が存在して

$$Lip_{X_\alpha}(B_0) \leqq \gamma_\alpha.$$

(B_1) より作用素 B_0 は X_0 をそれ自身に写すから，以後 $B = B_0/X_0$ とかく。任意の $u_0 \in X_0$ と $\sigma > 0$ と $\alpha \geqq e^{(a+b)\sigma}\{p(u_0) + (a'+b')\sigma\}$ に対して

$$u_{h,k} = (I + hA_{\alpha,h} + hB)^k u_0, \quad h \in (0, h(\alpha)/2), \ kh \in [0, \sigma]$$

と定義する．各 $u_{h,k}$ は意味を持ち，(A_1) と (B_1) によって $\{u_{h,k}\} \subset X_\alpha$, かつ差分方程式

$$\frac{u_{h,k+1} - u_{h,k}}{h} = (A_{\alpha,h} + B)u_{h,k}, \quad u_{h,0} = u_0 \tag{1.8}$$

を満足する．(1.8) は初期値問題 (1.1), (1.3) に対する近似スキームで，$\{u_{h,k}\}$ は (1.1) に対する差分近似解と考えられる．スキーム (1.8) は初期値 u_0 と区間 $[0,\sigma]$ に依存することに注意する．

定理 1.2. 条件 (A_i), (B_i), (C) の下で，作用素 $A+B$ は次の性質を持つ X_0 上の半群 $\{T_t : t \geqq 0\}$ を生成する：

$\beta > 0$, $\sigma > 0$, $\alpha \geqq e^{2(a+b)\sigma}\{\beta + (a'+b'+1)\sigma\}$ に対して

(a) $\quad \rho(T_t u) \leqq e^{(a+b)t}\{\beta + (a'+b')t\}, \qquad t \geqq 0, \ u \in X_\beta ;$

(b) $\quad Lip_{X_\beta}(T_t) \leqq e^{(\omega+\gamma_\alpha)\sigma}, \qquad t \in [0,\sigma] ;$

(c) $\quad \lim_{\substack{h\to 0+ \\ mh\to t}} (I + hA_{\alpha,h} + hB)^m u = T_t u, \qquad t \in [0,\sigma], \ u \in X_\beta ;$

(d) 各 $u \in X_\beta$ に対して $u(t) \equiv T_t u$ は，$u(t) \in X_\alpha$, $t \in [0,\sigma]$ であって (1.1), (1.3) に対する近似差分方程式

$$(1.9) \qquad \begin{aligned} &\frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{t_k^n - t_{k-1}^n} \in (A+B)u_k^n + \varepsilon_k^n, \quad k = 1, 2, \cdots, N_n ; \ u_0^n = u_0 \\ &0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{N_n}^n = \sigma, \ \lim_{n\to\infty}\left(\max_{1\leqq k\leqq N_n}(t_k^n - t_{k-1}^n)\right) = 0 \\ &\lim_{n\to\infty}\left\| \sum_{k=1}^{N_n}(t_k^n - t_{k-1}^n)\varepsilon_k^n \right\| = 0 \end{aligned}$$

の解 $\{u_k^n\}$ の極限であるという意味で一意である．

証明． $\beta > 0$, $\sigma > 0$, $\alpha \geqq e^{2(a+b)\sigma}\{\beta + (a'+b')\sigma\}$ とする．$u \in X_\beta$ に対して

$$v_{\lambda,k} = [J_\lambda(I+\lambda B)]^k u, \qquad \lambda \in (0, 1/2\omega_1), \ k\lambda \in [0,\sigma]$$

とすると，(1.7) と命題 1.1 により各 $v_{\lambda,k}$ は意味を持ち，

$$(1.10) \qquad \rho(v_{\lambda,k}) \leqq (1-\lambda(a+b))^{-k}\{\rho(u) + (a'+b')k\lambda\} \leqq \alpha$$

かつ $\varepsilon_{\lambda,k} = Bv_{\lambda,k-1} - Bv_{\lambda,k}$ として (1.9) を満足することがわかる．

$$(1.11) \qquad Lip_{X_\beta}([J_\lambda(I+\lambda B)]^k) \leqq (1-\lambda(\omega+\gamma_\alpha))^{-k}$$

であることを用いれば,

$$\|v_{\lambda,k}-v_{\lambda,k-1}\| \leqq \left(\frac{1+\lambda\gamma_\alpha}{1-\lambda\omega}\right)^{k-1}\|v_{\lambda,1}-v_{\lambda,0}\|$$

$$\|\varepsilon_{\lambda,k}\| \leqq \left(\frac{1+\lambda\gamma_\alpha}{1-\lambda\omega}\right)^{k-1}\gamma_\alpha\|v_{\lambda,1}-v_{\lambda,0}\|$$

なる評価が得られるから Kenmochi-Oharu [8], T. Takahashi [17], Y. Kobayashi [9] の結果により $\lim_{\substack{\lambda\to 0+\\ \lambda k\to t}} v_{\lambda,k}$, $0\leqq t\leqq\sigma$, が存在することがわかる. 従って, 各 $u\in X_0$ と $t\geqq 0$ に対して

$$T_t u = \lim_{\substack{\lambda\to 0+\\ \lambda k\to t}} [J_\lambda(I+\lambda B)]^k u$$

が存在することになる. 定理 1.2 の (a), (b) は (1.10) と (1.11) から得られる. $T_t u$ は (1.9) を満足する点列の極限であるから, [9] もしくは [17] により (d) が得られる. (c) は Miyadera-Oharu [14] もしくは Brezis-Pazy [4] の方法に基づいて証明される.

<u>注意 1.4.</u> (1.1) を時間に依存する場合に拡張して方程式

$$u'(t) = (A_0(t)+B_0(t))u(t), \qquad 0<t<t_0$$

を考えることも出来る. 例えば $A_0(t)$, $B_0(t)$ に対して条件 (A_i), (B_i), (C) が t に関して一様に成立しているとし, 次の条件を仮定する:

(T) 各 $\alpha>0$ に対して $[0,t_0]$ 上の単調非減少関数 $\omega_\alpha(r)$ で $\lim_{r\to 0+}\omega_\alpha(r)=0$ となるものが存在して, $u\in X_\alpha$ と $t,s\in[0,t_0]$ に対して

$$\|A_{\alpha,h}(t)u-A_{\alpha,h}(s)u\|+\|B(t)u-B(s)u\| \leqq \omega_\alpha(|t-s|).$$

この場合, $\beta>0$, $\alpha\geqq e^{2(a+b)t_0}\{\beta+(a'+b'+1)t_0\}$, $u\in X_\beta$ に対して収束

$$\lim_{h\to 0+}\prod_{k=[s/h]+1}^{[t/h]}[I+hA_{\alpha,h}(kh)+hB(kh)]u = U(t,s)u,\ 0\leqq s\leqq t\leqq t_c$$

が成立することがわかる。ここで得られる作用素の族 $\{U(t,s)\}$ は X_0 上の発展作用素を成し，Crandall-Pazy [6] に与えられているいくつかの結果の拡張を得ることが出来る。関数 ω_α の具体的な例については，本講究録にある小林和夫，小林良和両氏の論文[10]を参照されたい。

§2. 保存型方程式の空間 L^1 における半群論的取扱い。

2.1. 取扱う方程式と条件. 保存型の1階双曲型方程式

(2.1) $\quad u_t+(\phi(x,u))_x+\psi(x,u)=0,\quad t>0,\ -\infty<x<\infty$

を考える。ここに関数 ϕ と ψ は $(x,u)\in\mathbb{R}^2$ の関数で次の条件を満足するものとする。以下に於て，各 $\alpha>0$ に対して $G_\alpha=\mathbb{R}\times[-\alpha,\alpha]$ とする。

(D_1) $\phi,\ \psi,\ \phi_x,\ \psi_x,\ \phi_u,\ \psi_u,\ \phi_{xx},\ \phi_{xu},\ \phi_{xxu},\ \psi_{xu}$

は x と u に関して連続で，各 G_α 上で有界である。

(D_2) $\mathcal{F}(x,u)\equiv\phi_x(x,u)+\psi(x,u),\quad (x,u)\in\mathbb{R}^2$

とおくと，非負定数 a が存在して，$-\mathcal{F}_u(x,u)\leqq a,\ (x,u)\in\mathbb{R}^2$.

(D_3) 非負定数 ω が存在して，$-\psi_u(x,u)\leqq\omega,\ (x,u)\in\mathbb{R}^2$.

(D_4) $\phi(\cdot,0),\ \phi_x(\cdot,0),\ \phi_{xx}(\cdot,0),\ \psi(\cdot,0),\ \psi_x(\cdot,0)\in L^1(\mathbb{R})$

注意 2.1. 条件 (D_1) から次の条件が導びかれる：

(D_5) 非負定数 a'' が存在して，$|\mathcal{F}(x,0)|\leqq a''$, $x\in\mathbb{R}$.

また，変換 $\phi(x,u)\to\phi(x,u)-\phi(x,0)$, $\psi(x,u)\to\phi_x(x,0)+\psi(x,u)$ を考えれ

ばわかるように，次の条件を仮定しても一般性を失わない：

$$(D_6) \qquad \phi(x,0) = \phi_x(x,0) = \phi_{xx}(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

注意 2.2. 条件 (D_2) は Kružkov [12] の論文で解を構成するために使われた。(D_3) は解の一意性の証明並びに (2.1) の解を与える半群が local type であること（すなわち $Lip(T_t) \leq e^{\omega t}$ であること）を示すために用いられる。(D_4) は半群を空間 $L^1(\mathbb{R})$ に於て構成するために必要な条件である。実際，(D_1) と (D_4) を併せて考えれば各 $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ に対して $\phi(x,u(x))$, $\phi_x(x,u(x))$, $\phi_{xx}(x,u(x))$, $\psi(x,u(x))$ 等が再び $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ に属する。

2.2. Kružkov 型の一般化された解と Friedrichs-Lax 型の差分近似.

以後空間 $L^1(\mathbb{R})$ と $L^\infty(\mathbb{R})$ を各々 L^1, L^∞ と書く。

定義 2.1. $X_0 = L^1 \cap L^\infty$ とする。$u_0 \in X_0$ に対して $[0,\infty)$ 上の X_0-値関数 $u(t) \equiv u(t,\cdot)$ が初期条件 $u(0) = u_0$ の下での (2.1) に対する初期値問題の generalized solution であるとは，$u(t)$ が次の条件を満足することである：

(g_1) 非負定数 a, a' が存在して，$\|u(t)\|_\infty \leq e^{at}\{\|u_0\|_\infty + a't\}$, $t \geq 0$;

(g_2) 任意の $k \in \mathbb{R}$ と任意の $f \in C_0^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})^+$ に対して

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \{ |u(t,x)-k| f_t + sgn(u(t,x)-k)[\phi(x,u(t,x)) - \phi(x,k)] f_x$$
$$- sgn(u(t,x)-k)[\phi_x(x,k) + \psi(x,u(t,x))] f \} \, dx\, dt \geq 0,$$

ここに $C_0^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})^+$ は $(0,\infty)$ における非負値の C_0^∞-関数のクラス；

(g_3) $u(t)$ は L^1 の norm に関して $[0,\infty)$ 上で連続で，$u(0) = u_0$.

この定義はKružkovのそれを空間L^1の場合にmodifyしたもので，定義2.1に述べた$u(t)$自身Kružkovの意のgeneralized solutionになっている．我々の目的は条件(D_1)-(D_4)の下に，次に述べるようなFriedrichs-Lax型の差分近似と第一節に述べた半群の近似を用いて上に定義したgeneralized solutionを構成することである。我々の用いる差分近似は次のようなスキームによって定義される．$u_0 \in X_0$に対して

$$
(2.2)\quad \begin{cases} \dfrac{u^{m+1}(x) - \dfrac{u^m(x+\ell)+u^m(x-\ell)}{2}}{h} + \dfrac{\phi(x+\ell, u^m(x+\ell)) - \phi(x-\ell, u^m(x-\ell))}{2\ell} \\[2ex] \qquad\qquad + \dfrac{\psi(x+\ell, u^m(x+\ell)) + \psi(x-\ell, u^m(x-\ell))}{2} = 0, \\[2ex] u^0(x) = u_0(x)\ ; \quad h, \ell > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, \end{cases}
$$

によって関数列$\{u^m(x)\}$を定義する。§2.1に述べたように，条件(D_1)-(D_4)の下で$u^m \in X_0$であり，mesh ratio h/ℓを一定に保って$h \to 0$, $mh \to t$とするとき(2.2)は方程式(2.1)を近似するから，$u^m(x)$は解$u(t,x)$の点(mh, x)における近似値と考えられる。

2.3. 作用素A_0とL^1における発展方程式.

Banach空間L^1において方程式(2.1)に対応する(1.1)の形の発展方程式をformulateするために次のような作用素を定義する．

定義2.2. $(v, w) \in L^1 \times L^1$が作用素$A_0$のグラフ$G(A_0)$に属するとは，$(v, w) \in X_0 \times L^1$であって，任意の$k \in \mathbb{R}$と任意の$f \in (C_0^\infty)^+$に対して

$$
(2.3)\quad \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(v(x)-k)\{[\phi(x,v(x))-\phi(x,k)]f_x - [\phi_x(x,k)+\psi(x,v(x))]f - w(x)f(x)\}dx \geq 0
$$

が成立することであると定義する。ここに $(C_0^\infty)^+$ は $\mathbb{R}$ 上の非負値の C_0^∞-関数の全体を表わす。

この種の定義は Crandall [5] によって与えられた。不等式 (2.3) において，$k=\|v\|_\infty+1$ とし，次に $k=-\|v\|_\infty-1$ とすることによって，$-(\phi(x,v))_x=\psi(x,v)+w$ が得られる；但し，$(\phi(x,v))_x$ は distribution derivative を意味する。右辺は L^1 に属するから，Radon-Nikodym の定理によって $(\phi(x,v))_x$ は L^1 における通常の意味の derivative になる。従って A_0 は一価となり，各 $v\in D(A_0)$ に対して

(2.4) $$[A_0v](x)=-\{(\phi(x,v(x)))_x+\psi(x,v(x))\},\quad a.e.\ x\in\mathbb{R}$$

が成立する。また，C_0^1 で compact support を持つ $C^{(1)}$-クラスの関数の全体を表わすことにすると，$C_0^1\subset D(A_0)\subset X_0$ で，各 $u\in C_0^1$ に対して $A_0u\in X_0$ であることがわかる。更に，A_0 は次の性質を持つ。

<u>命題 2.1.</u> ω を条件 (D_3) に与えた定数とすると，$A_0-\omega$ は空間 L^1 において dissipative である。

証明は Kružkov [12] の方法に基づいて得られる。この作用素 A_0 に対して，空間 L^1 における (1.1) の形の発展方程式

(2.5) $$u'(t)=A_0u(t),\qquad t>0$$

を考え，(2.5) に対して第一節で述べたような近似作用素 $A_{\alpha,h}$ を差分近似 (2.2) を基にして定義する。

<u>2.4.</u> <u>近似作用素 $A_{\alpha,h}$.</u>

前節に定義した作用素 A_0 に対して，第一節に述べたような

近似作用素の族 $\{A_{\alpha,h}\}$ を次のように定義する。$X_0 = L^1 \cap L^\infty$ として，

$$p(u) = \|u\|_\infty, \quad u \in X_0$$

とする。X_0 は L^1 における linear manifold であり，p は X_0 上の下半連続な seminorm である。各 $\alpha > 0$ に対して，

$$X_\alpha = \{u \in X_0 : \|u\|_\infty \leqq \alpha\},$$

$$M_\alpha = \max\{\sup_{G_\alpha} |\phi_x|, \sup_{G_\alpha} |\phi_u|, \cdots, \sup_{G_\alpha} |\psi_{xu}|\}$$

とおく。X_α は閉かつ凸であり，M_α は α に関して $(0,\infty)$ 上の非減少関数である。次に，任意に $\varepsilon_0 \in (0,1)$ を固定して，$(0,\infty)$ 上の非増加関数 δ_α で

(2.6) $$0 < \delta_\alpha \leqq \min\{1, \frac{1-\varepsilon_0}{M_\alpha}\}$$

となるものをとる。各 $\alpha > 0$ に対して，

(2.7) $$M(\alpha) = 8M_\alpha/\delta_\alpha, \quad h(\alpha) = \varepsilon_0/2M(\alpha), \quad \ell \equiv \ell(h) = h/\delta_\alpha, \quad h \in (0, h(\alpha))$$

とおく。ここに 8 は条件 (D_1) に与えた偏導関数の数である。$M(\alpha)$ は $(0,\infty)$ 上で非減少，$h(\alpha)$ は $(0,\infty)$ 上で非増加な正値関数となる。更に，L^∞ からそれ自身への作用素 Φ と Ψ を

(2.8) $$[\Phi u](x) = \phi(x, u(x)), \quad [\Psi u](x) = \psi(x, u(x)), \quad x \in \mathbb{R}$$

によって定義する。条件 (D_4) によって，Φ と Ψ は X_0 をそれ自身に写す。任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して関数 $\phi(x,k)$ と $\psi(x,k)$ を各々 Φk, Ψk と書く。W_1^∞ で $\mathbb{R}$ 上一様有界かつ一様に Lipschitz 連続な関数の全体を表わし，

(2.9) $$\mathcal{D} = \{u \in L^1 : u \in W_1^\infty, u_x \in L^1\}$$

とする；明らかに，$C_0^1 \subset \mathcal{D}$ である．以上の setting において，各 $\alpha > 0$ と $h \in (0, h(\alpha))$ に対して作用素 $A_{\alpha,h}: X_\alpha \to X_0$ を

$$
\begin{aligned}
[A_{\alpha,h}u](x) = & \frac{u(x+\ell) - 2u(x) + u(x-\ell)}{2h} \\
& - \frac{1}{2\ell}\{[\Phi u](x+\ell) - [\Phi u](x-\ell)\} \\
& - \frac{1}{2}\{[\Psi u](x+\ell) + [\Psi u](x-\ell)\}, \qquad u \in X_\alpha
\end{aligned}
$$

によって定義する。$A_{\alpha,h}$ は前節に述べた A_0 の近似作用素である．実際，各 $u \in \mathcal{D} \cap X_\alpha$ に対して $\lim_{h \to 0+} A_{\alpha,h}u = -(\phi(x,u))_x + \psi(x,u)$ in L^1 となるから，(2.4) により条件 (A_0) が集合 $D = \mathcal{D}$ に対して成立する。そして $A_{\alpha,h}$ は $p(\cdot) = \|\cdot\|_\infty$ としたときの条件 (A_1), (A_2) を次の形で満足する。

<u>命題 2.2.</u> $\alpha > 0$, $h \in (0, h(\alpha))$, $u, v \in X_\alpha$ に対して

(2.10) $\|(I + hA_{\alpha,h})u\|_\infty \leqq (1 + ah)\|u\|_\infty + a''h + M(\alpha)h^2$,

(2.11) $\|(I + hA_{\alpha,h})u - (I + hA_{\alpha,h})v\|_1 \leqq (1 + \omega h)\|u - v\|_1$,

ここに a, a'', ω は条件 (D_2), (D_3), (D_5) に与えた定数である．

(2.7) より $M(\alpha)h < \varepsilon_0/2$ であるから，$a' = a'' + \varepsilon_0/2$ とすれば条件 (A_1) が満足される．(2.11) は条件 (A_2) そのものである．(2.10) と (2.11) を証明するために (2.6) や (2.7) の条件は本質的である．

<u>命題 2.2 の証明.</u> (D_3), (2.6), (2.7) と平均値定理を用いて

$$
\begin{aligned}
& |[u(x) - v(x)] \mp \delta_\alpha [\phi(x,u) - \phi(x,v)] - h[\psi(x,u) - \psi(x,v)]| \\
& \leqq [1 \mp \delta_\alpha \phi_u(x, \theta(x)) + \omega h]\,|u(x) - v(x)|
\end{aligned}
$$

を得る。ここに z は $|u(x)|,\ |v(x)| \leqq \alpha$ となる任意の数で，$\theta(x)$ は $-\alpha$ と α の間の数である．上式右辺の $[\cdots]$ の部分が非負であることは，$\delta_\alpha |\phi_u(x,\theta)| \leqq 1-\varepsilon_0$ であることと $h|\psi_u(x,\theta)| \leqq h(\alpha)M(\alpha) \leqq \varepsilon_0$ であることから示される．ところで，

$$(I+hA_{\alpha,h})u(x) = \frac{1}{2}\{u-\delta_\alpha\Phi u - h\Psi u\}(x+\ell) + \frac{1}{2}\{u+\delta_\alpha\Phi u - h\Psi u\}(x-\ell)$$

であるから，

$$\begin{aligned}
&\|(I+hA_{\alpha,h})u - (I+hA_{\alpha,h})v\|_1 \\
&\leqq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |(u-v) - \delta_\alpha(\phi(x,u)-\phi(x,v)) - h(\psi(x,u)-\psi(x,v))|\,dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |(u-v) + \delta_\alpha(\phi(x,u)-\phi(x,v)) - h(\psi(x,u)-\psi(x,v))|\,dx \\
&\leqq (1+\omega h)\|u-v\|_1
\end{aligned}$$

となって (2.10) を得る．$[(I+hA_{\alpha,h})u](x)$ はまた次の様にも書ける：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\{[u(x+\ell)+u(x-\ell)] - \delta_\alpha[\phi(x,u(x+\ell))-\phi(x,u(x-\ell))] - h[\psi(x+\ell,u(x+\ell))+\psi(x-\ell,u(x-\ell))] \\
&\quad -\delta_\alpha[\phi(x+\ell,u(x+\ell))-\phi(x,u(x+\ell))] + \delta_\alpha[\phi(x-\ell,u(x-\ell))-\phi(x,u(x-\ell))]\},
\end{aligned}$$

第2項に平均値定理，第3, 4, 5 項に Taylor の定理を用いて，

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\{[1-\delta_\alpha\phi_u(x,\theta) - h\mathcal{F}_u(x,\xi^+)]u(x+\ell) + [1+\delta_\alpha\phi_u(x,\theta) - h\mathcal{F}_u(x,\xi^-)]u(x-\ell)\} \\
&\quad - h\mathcal{F}(x,0) - \frac{h\ell}{2}\left[\frac{1}{2}\phi_{xx}(\theta^+,u(x+\ell)) + \psi_x(\eta^+,u(x+\ell))\right] + \frac{h\ell}{2}\left[\frac{1}{2}\phi_{xx}(\theta^-,u(x-\ell)) + \psi_x(\eta^-,u(x-\ell))\right]
\end{aligned}$$

となる．ここに $\theta,\ \theta^\pm,\ \xi^\pm,\ \eta^\pm$ は $u,\ x,\ \ell$ に依存して決定される数である．従って条件 $(D_1), (D_2), (D_5)$ を用いて (2.11) を得る．［終］

$u_0 \in X_0,\ \sigma > 0,\ \alpha \geqq e^{a\sigma}\{\|u_0\|_\infty + a'\sigma\}$ $(a' = a'' + \frac{\varepsilon_0}{2})$ とすると，命題 2.2 により差分スキーム (2.2) は次のように書ける：

$$u^m(x) = [(I+hA_{\alpha,h})^m u_0](x),\quad h \in (0,h(\alpha)),\ mh \in [0,\sigma].$$

従って，作用素 A_0 と近似作用素の族 $\{A_{\alpha,h}\}$ に対して第一節で述べた条件(C)が成立すれば，定理 1.2 によって発展方程式 (2.5) に対応する X_0 上の半群が得られる訳である。条件(C)は次の二つの補題を示すことによって得られる。

補題 2.3. $\lambda \in (0, 1/\omega_1)$, $u \in X_0$, $\alpha \geq \nu(\|u\|_\infty, \lambda)$ とする。$(0, h(\alpha))$ に含まれる null sequence $\{h_n\}$ が存在して，$v_n = J_{\alpha,h_n}(\lambda)u$ が L^1 においてある元 $v \in L^1$ に収束すると仮定する。$w_n = A_{\alpha,h_n} v_n$, $n = 1, 2, \cdots$ とおく。すると，w_n は L^1 において $A_0 v$ に収束し，$v = (I - \lambda A_0)^{-1} u$ が成立する。

証明. $w_n = \lambda^{-1}(v_n - u)$ であるから w_n は $w = \lambda^{-1}(v - u)$ に収束する。$v \in X_0$ であることと $A_{\alpha,h}$ の性質から v と w に対して (2.3) が成立する。従って $w = A_0 v$ となって $v - \lambda A_0 v = u$ が得られる。故に命題 2.2 を用いて $v = (I - \lambda A_0)^{-1} u$ を得る。ここで，v は null sequence $\{h_n\}$ に依存しないことに注意する。

補題 2.4. 近似作用素 $A_{\alpha,h}$ は，(2.5) における作用素 A_0 に対して条件(C′)を満足する。

証明. 条件 (D_1)–(D_4) の下で Fréchet-Kolmogorov の定理[19]を用いることによって，各 $\lambda \in (0, 1/\omega_1)$, $\beta > 0$, $\alpha \geq \nu(\beta, \lambda)$, $u \in X_\beta$ に対して集合 $\{J_{\alpha,h}(\lambda)u : h \in (0, h(\alpha))\}$ が L^1 において長るり compact となることがわかる。従って補題 2.3 を用いれば，$J_{\alpha,h}(\lambda)u$ は $h \to 0+$ とするとき $(I - \lambda A_0)^{-1} u$ に収束し，$A_{\alpha,h} J_{\alpha,h}(\lambda) u$ は $A_0 (I - \lambda A_0)^{-1} u$ に収束す

ることがわかる。 [終]

2.5. 作用素 A と発展方程式 (2.5) に対応する X_0 上の半群.

補題 2.4 により作用素 A_0 とその近似作用素 $A_{\alpha,h}$ に対して条件 (C′) が成立することがわかったから，注意 1.3 に述べたように，集合 $D(A)=(I-\lambda A_0)^{-1}[X_0]$ 上に定義される作用素 A が存在する。A は A_0 の制限であり，$D(A)=\{u\in L^1: u\in D(A_0), A_0u\in X_0\}$ である．また，条件 (A_0) が (2.9) によって定義される集合 $\mathcal{D}$ に対して成立しているから，命題 1.1 により $\mathcal{D}\subset D(A)$ となり，A は densely defined である．かくして定理 1.2 を用いることにより，作用素 A に対応する X_0 上の半群 $\{T_t\}$ を構成することが出来る．主定理を述べる前に作用素を一つ導入する。$\mathbb{R}$ の任意の有界区間で絶対連続な L^1-関数 u で，$u_x\in L^1$ となるものゝ全体を $D(\Lambda)$ で表わし，$\Lambda u=u_x$, $u\in D(\Lambda)$ と定義する．Λ は L^1 における微分作用素である．$\mathcal{D}$ を (2.9) によって定義される集合とすると，$\mathcal{D}=D(\Lambda)\cap W_1^\infty$ である．

主定理. 条件 (D_1)–(D_4) の下で次が成り立つ。

(a) L^1 における一価作用素 A で次の性質を持つものが存在する：

(イ) $\bar{A}-\omega$ は m-dissipative;

(ロ) $\mathcal{D}\subset D(A)\subset X_0$;

(ハ) 各 $u\in D(A)$ に対して $\Phi u\in\mathcal{D}$ かつ $[Au](x)=-[\Lambda\Phi u+\Psi u](x)$, a.e. x,

ここで Φ, Ψ は (2.8) によって定義された作用素である.

(b) 各 $\lambda\in(0, 1/\omega_1)$, $u\in X_0$, $\alpha\geqq\nu(\|u\|_\infty,\lambda)$ に対して

$$\lim_{h\to 0+}(I-hA_{\alpha,h})^{-1}u=(I-\lambda A)^{-1}u;$$

そして $v=(I-\lambda A)^{-1}u$ は方程式

$$v+\lambda\{(\phi(x,v))_x+\psi(x,v)\}=u,\ a.e.\ x\in\mathbb{R}$$

の解を与える.

(c) A は次の性質を持つ X_0 上の半群 $\{T_t\}$ を生成する:

(イ) $Lip_{X_0}(T_t)\leqq e^{\omega t},\quad t\geqq 0;$

(ロ) 各 $u\in X_0$ に対して, $u(t,x)=[T_tu](x)$ は初期関数 $u(x)$ に対する (2.1) の初期値問題の一意な generalized solution;

(ハ) $T_tu-u+\Lambda\int_0^t \Phi T_s u\,ds+\int_0^t \Psi T_s u\,ds=0,\quad t\geqq 0,\ u\in X_0,$

ここに積分は Bochner の意味で考えるものとする.

(d) 各 $u\in X_0$, $\sigma>0$, $\alpha\geqq e^{2a\sigma}\{\|u\|_\infty+(a'+1)\sigma\}$ に対して

$$\lim_{h\to 0+,\,mh\to t}(I+hA_{\alpha,h})^m u=T_tu,\quad t\in[0,\sigma].$$

(e) $W=\{u\in X_0:\ \exists N_u\geqq 0\ \text{s.t.}\ \int_{\mathbb{R}}|u(x+y)-u(x)|dx\leqq N_u|y|\ \text{for}\ \forall y\in\mathbb{R}\}$ とすると, $T_t[W]\subset W$. $\{T_t/_W\}$ は W 上の半群で, 各 $u\in W$ に対して $[T_t/_W]u$ は任意の有界区間 $[0,\sigma]$ で t に関して Lipschitz 連続である.

<u>注意 2.3.</u> 主定理の (c) により各 T_t は L^1 上への一意な連続的拡張 $\overline{T}_t$ を持つ。$\{\overline{T}_t: t\geqq 0\}$ は L^1 上の半群を与え, 各 $u\in L^1$ に対して $\overline{T}_tu$ は初期値 u に対する発展方程式 $u'(t)\in\overline{A}u(t)$ の定理 1.2 (d)

の意味での弱解（solutions for "bad initial data"）を与える.

注意 2.4. $u \in L^1$ に対して，(主定理の(e)に述べた)空間 W の定義の中にある不等式を満足する数 N_u の infimum (この様な数が存在しないときには $+\infty$ をとる)を $p_1(u)$ とかく．この様にして定義される汎関数 p_1 はその essential domain を W とする下半連続な seminorm となる。従って以上述べてきた議論において，汎関数 p として $p(u) = \|u\|_\infty + p_1(u)$ によって定義されるものを用いることも出来る．(この様な取扱いについては本講究録にある小林和夫氏と小林良和氏の論文[10]を参照されたい.)

注意 2.5. 上に得られた半群 $\{T_t\}$ の $t=0$ における微分係数を特徴付けることが出来る．Λ^* を Λ の共役作用素とし，$X^{\odot} = \overline{D(\Lambda^*)}$ とおく．$X^{\odot}$ は Λ に関する $\odot$-共役空間と呼ばれる．次に，$\Lambda^{\odot}$ を作用素 Λ^* の集合 $\{f \in X^{\odot} : \Lambda^* f \in X^{\odot}\}$ への制限とする．すると L^1 は $X^{\odot}$ の共役空間 $\hat{X} = (X^{\odot})^*$ に埋蔵され，$\Lambda^{\odot}$ の共役作用素 $\hat{\Lambda} = (\Lambda^{\odot})^*$ は Λ の拡張と考えることが出来る．そこで作用素 $\mathcal{A}: X_0 \to \hat{X}$ を

$$\mathcal{A}u = w^*\text{-}\lim_{h \to 0+} h^{-1}(T_h u - u)$$

によって定義する．ここに $w^*\text{-}\lim$ は $\hat{X}$ の $*$-弱位相に関する極限を意味する．$D(\mathcal{A})$ は右辺が存在するような $u \in X_0$ の全体である．この $\mathcal{A}$ に対して次のことが示される：

(イ) $\mathcal{A} \supset A$ であって，各 $u \in D(\mathcal{A})$ に対して $\mathcal{A}u = -(\hat{\Lambda}\Phi + \Psi)u$；

(ロ) $u \in D(A)$ であるための必要十分条件は，$T_t u$ が任意の有界区間 $[0, \sigma]$ で t に関して Lipschitz 連続となることである.

A は Konishi [11] に於けると同様に $\{T_t\}$ の $*$-弱生成作用素と呼ばれる.

注意 2.6. 以上の議論では (2.5) の形の発展方程式を取扱ったが，第一節で述べたように (1.1) の形の発展方程式を取扱うこともあり得る. 例えば，(2.1) において $\psi(x,\xi) = \psi_1(x,\xi) + \psi_2(x,\xi)$ と書け，ϕ, ψ_1 は条件 (D_1)-(D_4) を満足し，ψ_2 は次の条件を満足すると仮定する:

$(D_7$-$1)$ 非負定数 b, b' が存在して，任意の $(x,\xi) \in R^2$ に対して

$$|\psi_2(x,\xi)| \leqq b|\xi| + b';$$

$(D_7$-$2)$ 各 $\alpha > 0$ に対して非負定数 γ_α が存在して，

$$|\psi_2(x,\xi) - \psi_2(x,\eta)| \leqq \gamma_\alpha |\xi - \eta|, \quad x \in R, \ \xi, \eta \in [-\alpha, \alpha].$$

L^1 における作用素 B を，$[Bu](x) = \psi_2(x, u(x))$，$u \in X_0$，によって定義すると，

$$\|Bu\|_\infty \leqq b\|u\|_\infty + b', \qquad u \in X_0;$$

$$\|Bu - Bv\|_1 \leqq \gamma_\alpha \|u - v\|_1, \quad u, v \in X_\alpha, \ \alpha > 0$$

を得るから，B は §1.3 に述べた条件 (B_1), (B_2) を満足する. 従って，このような場合には方程式 (2.1) を Banach 空間 $X = L^1$ における発展方程式 (1.1) の形で取扱うことが出来る.

参考文献

[1]: V. Barbu, Semigrupuri de Contracţii Neliniare în Spaţi Banach (in Rumanian), Analiză Modernă şi Aplicaţii, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, (1974).

[2]: Ph. Benilan, Equation d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications, Thèse de Doctorat d'Etat, Centre d'Orsay, Université de Paris-Sud, (1972).

[3]: H. Brezis, Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Notas de Matemática (50) North-Holland, (1973).

[4]: H. Brezis and A. Pazy, Convergence and approximation of semigroups of nonlinear operators in Banach spaces, J. Func. Anal., 9 (1972), 63-74.

[5]: M. Crandall, The semigroup approach to first-order quasilinear equations in several space variables, Israel J. Math., 12 (1972), 108-132.

[6]: M. Crandall and A. Pazy, Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Israel J. Math., 11 (1972), 57-94.

[7]: J. Goldstein, Approximation of nonlinear semigroups and evolution equations, J. Math. Soc. Japan, 24 (1972), 558-573.

[8]: N. Kenmochi and S. Oharu, Difference approximation of nonlinear evolution equations and semigroups of nonlinear operators, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., 10 (1974), 147-207.

[9]: Y. Kobayashi, Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups, J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 640-665.

[10]: Y. Kobayashi and K. Kobayashi, 発展方程式の差分近似について, 本講究録.

[11]: Y. Konishi, On the nonlinear semigroups associated with $u_t = \Delta\beta(u)$ and $\varphi(u_t) = \Delta u$, J. Math. Soc. Japan, 25 (1973), 622-628.

[12]: S. Kružkov, First-order quasilinear equations in several independent variables (in Russian), Math. USSR Sbornik 10 (1973), 622-628.

[13]: I. Miyadera, On the convergence of nonlinear semigroups, II, J. Math. Soc. Japan, 21 (1969), 403-412.

[14]: I. Miyadera and S. Oharu, Approximation of semigroups of nonlinear operators, Tôhoku Math. J., 22 (1970), 24-47.

[15]: S. Oharu, On the semigroup approach to nonlinear partial differential equations of first order, I, to appear.

[16]: S. Oharu and T. Takahashi, A convergence theorem of nonlinear semigroups and its application to first-order quasilinear equations, J. Math. Soc. Japan, 26 (1974), 124-160.

[17]: T. Takahashi, Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of semigroups of nonlinear contractions, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[18]: G. Webb, Accretive operators and existence for nonlinear functional differential equations, J. Diff. Eq., 14 (1973), 57-69.

[19]: K. Yosida, Functional Analysis, 2nd. ed., Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1968).