

ステファン問題の有限要素法による解法の
安定性と収束

京大数理研 森 正武

§1 1次元1相 Stefan 問題

Dirichlet境界条件の下で次の1相1次元 Stefan 問題を考
える。

$$\left\{ \begin{array}{l} (1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad 0 < x < s(t) , \quad 0 < t \leq T \\ (1.2) \quad u(0, t) = g(t) \geq 0 , \quad u(s(t), t) = 0 \quad \text{for } 0 \leq t \leq T \\ (1.3) \quad u(x, 0) = f(x) \geq 0 \quad \text{for } 0 \leq x \leq b , \quad b = s(0) > 0 \\ (1.4) \quad \frac{ds}{dt} = -\kappa u_x(s(t), t) \quad \text{for } 0 < t \leq T \end{array} \right.$$

ここでの κ は正の定数とする。最後の (1.4) は Stefan 条件
と呼ばれる。

初期値 $f(x)$ に対して次の条件を仮定する。

$$(A) \quad 0 \leq f(x) \leq B(b-x) \quad (B \text{ は正の定数})$$

この Stefan 問題 (1.1) ~ (1.4) が仮定 (A) の下で解を持つこと
は, Cannon-Hill [2] によつて示されている。また, その数
値解法に関しては, 長さの変動する区間 $0 \leq x \leq s(t)$ を変数

変換によって定区間に規格化して差分法を適用する方法 [6],
 x 方向を等分割した上, 境界 $\Delta(t)$ が頂度格子真に一致するよ
 うに t 方向を分割して差分法を適用する方法 [3, 9], 差分法
 と *penalty* 法を組合せた方法 [5], x - t 平面の領域を四角形
 の小領域に分割し, これに 2 次の *basis function* に基づく 2 次
 元の有限要素法を適用する方法 [1] などがある.

われわれは, 時間に依存する *basis function* に基づく有限要
 素法による解法を提案したが [7], ここではその安定性と収
 束性を論ずる.

§2 有限要素法の適用と scheme

時刻 $t > 0$ を固定する. このとき仮りに $\Delta(t)$ は既知である
 とみなしておく. そのとき区間 $0 \leq x \leq \Delta(t)$ を一定の規則に
 従って Fig. 1 のように n 個の小
 区間に分割する (例えば n 等分
 する).

$$(2.1) \quad 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \Delta(t)$$

つまり, 分割点 $x_j, j=1, 2, \dots, n-1$
 は, $\Delta(t)$ の関数として一意的に
 定まるように分割の規則を定め
 るのであって, したがって x_j

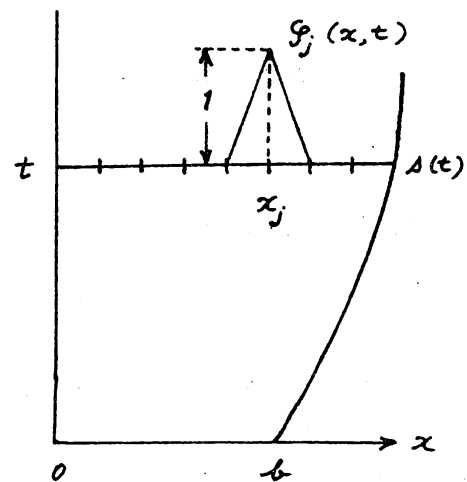


Fig. 1

は当然時間 t に依存する。われわれの方法では、 $A(t)$ はこの n 分割に基づいて時々刻々近似的に定めてゆくので、以下この近似的境界を $\Delta_n(t)$ と書くことにする。

以上の準備の下に、次のように真 x_j では 1, 真 x_{j+1} では 0 なる piecewise linear basis function $\{g_j\}$ を構成する。

$$(2.2) \quad g_j(x, t) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & ; x_{j-1} < x \leq x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & ; x_j < x \leq x_{j+1} \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

g_0, g_n はそれぞれ区間 $0 \leq x \leq \Delta_n(t)$ の内部に入る部分をとる者のとる。 $g_j(x, t)$ は $\Delta_n(t)$ を通して時間 t に依存しており、この x および t に関する微分はそれぞれ次のようになる。

$$(2.3) \quad \frac{\partial g_j}{\partial x} = \begin{cases} \frac{1}{x_j - x_{j-1}} & ; x_{j-1} < x \leq x_j \\ -\frac{1}{x_{j+1} - x_j} & ; x_j < x \leq x_{j+1} \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial g_j}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{(x - x_{j-1})\dot{x}_j + (x_j - x)\dot{x}_{j-1}}{(x_j - x_{j-1})^2} & ; x_{j-1} < x \leq x_j \\ \frac{(x - x_j)\dot{x}_{j+1} + (x_{j+1} - x)\dot{x}_j}{(x_{j+1} - x_j)^2} & ; x_j < x \leq x_{j+1} \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

ただし \dot{x}_j は x_j の時間微分である。

以下，区間 $0 \leq x \leq A_n(t)$ は n 等分するものとする。

$$(2.5) \quad x_j = j h_n(t) \quad , \quad h_n(t) = \frac{A_n(t)}{n}$$

このようにして構成した basis function に基づいて，(1.1)~(1.4) に対する近似解を次のように作る。

$$(2.6) \quad u_n(x, t) = \sum_{j=0}^n a_j(t) \varphi_j(x, t)$$

ただし，境界条件 (1.2) に従って

$$(2.7) \quad a_0(t) = g(t) \quad , \quad a_n(t) = 0$$

とある。ここで Galerkin 法を適用する。即ち (2.6) を (1.1) の両辺に代入し，両辺に φ_j を乗じ， $0 < x < A_n(t)$ にわたって積分する。これから次の常微分方程式系を得る。

$$(2.8) \quad M(t) \frac{d\alpha(t)}{dt} = -(TK(t) + N(t)) \alpha(t)$$

ただし， $\alpha(t)$ は $n+1$ 次元 vector

$$(2.9) \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \\ a_n(t) \end{pmatrix}$$

であり，このうち $a_0(t), a_n(t)$ は (2.7) に示すように既知である。また行列 M, K, N は時間に依存する $(n-1) \times (n+1)$ 行列で， $i = 1, 2, \dots, n-1, j = 0, 1, \dots, n$ に対して次のようを成

分を持つ。

$$(2.10) \quad M_{ij} = \int_0^{A_n(t)} \varphi_i \varphi_j dx \quad : \text{mass matrix}$$

$$(2.11) \quad K_{ij} = \int_0^{A_n(t)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} dx \quad : \text{stiffness matrix}$$

$$(2.12) \quad N_{ij} = \int_0^{A_n(t)} \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} dx \quad : \text{velocity matrix}$$

行列 N は、分割点 x_j の見かけ上の速度に対応するもので、これに velocity matrix という名を付した。

上記の mass matrix は、consistent mass system に対応するものであるが、それに対していわゆる lumped mass system においては mass matrix M の計算においてのみ、 φ_j の代りに次のような characteristic function ψ_j が使われる。

$$(2.13) \quad \psi_j(x,t) = \begin{cases} 1 & ; \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j) < x \leq \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}) \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(2.14) \quad M_{ij} = \int_0^{A_n(t)} \psi_i \psi_j dx$$

各行列要素の具体形は次のようになる。

lumped mass system

$$(2.15) \quad M_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1}) = h_x & ; j = i \\ 0 & ; j \neq i \end{cases}$$

$$(2.16) \quad K_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{x_i - x_{i-1}} = -\frac{1}{h_n} & ; j = i-1 \\ \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} = \frac{2}{h_n} & ; j = i \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} = -\frac{1}{h_n} & ; j = i+1 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(2.17) \quad N_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{3}\dot{x}_i + \frac{1}{6}\dot{x}_{i-1} = \frac{1}{6}(3i-1)\frac{dh_n}{dt} & ; j = i-1 \\ \frac{1}{6}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_{i-1}) = \frac{1}{3}\frac{dh_n}{dt} & ; j = i \\ -\frac{1}{6}\dot{x}_{i+1} - \frac{1}{3}\dot{x}_i = -\frac{1}{6}(3i+1)\frac{dh_n}{dt} & ; j = i+1 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

consistent mass system

mass matrix のみを次のように変更すればよい。

$$(2.18) \quad M_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{6}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{6}h_n & ; j = i-1 \\ \frac{1}{3}(x_{i+1} - x_{i-1}) = \frac{2}{3}h_n & ; j = i \\ \frac{1}{6}(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{6}h_n & ; j = i+1 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

次に，方程式 (2.8) の左辺の時間微分を差分で近似する。

そのために区間 $0 \leq t \leq T$ を m 等分する。

$$(2.19) \quad \Delta t = \frac{T}{m}, \quad t_k = k\Delta t, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

$$(2.20) \quad \frac{d\alpha(k\Delta t)}{dt} \doteq \frac{\alpha(k\Delta t) - \alpha((k-1)\Delta t)}{\Delta t}$$

以下 $\alpha(k\Delta t)$ の j 成分を

$$(2.21) \quad a_j^k = a_j(k\Delta t)$$

と記す。この近似によ、て (2.8) に対応する差分方程式が得られるが、その右辺の $a(t)$ において、 $t = (k-1)\Delta t$ ととれば時間に関して前進差分型 (陽解法)、 $t = k\Delta t$ ととれば完全後退差分型の scheme が得られる。実際には、以下に示すように $0 \leq \theta \leq 1$ なるパラメータ θ を導入することにより、両者を適当に混合することができる。

$t = (k-1)\Delta t$ から $t = k\Delta t$ への $h_n(t)$ の増分 Δh_n は、(1.4) の右辺を、これまでで得られている最新の近似解 u_n の右端の勾配を利用して近似的に計算する。

以上の手順で得られる scheme をまとめると次のようになる。但し、velocity matrix N の成分は、 Δh_n を用いて次のように近似する。

$$(2.22) \quad \frac{dh_n}{dt} \doteq \frac{1}{n} \frac{\Delta h_n}{\Delta t}$$

scheme

< initial step >

$$(2.23) \quad \begin{cases} a_j^0 = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n \\ \Delta h_n(\Delta t) = \chi \frac{a_{n-1}^0}{h_n(0)} \Delta t \\ h_n(\Delta t) = h + \Delta h_n(\Delta t) \end{cases}$$

< general step >

$k = 1, 2, \dots, m$ について、以下の操作をくり返す。 θ は

$0 \leq \theta \leq 1$ なる適当な値に固定しておく。まず $\Delta_n(k\Delta t)$, $\Delta\Delta_n(k\Delta t)$ の値を使って $t = k\Delta t$ における M, K, N を計算し、次の $(n-1)$ 元連立 1 次方程式を解く。

$$(2.24) \quad \{M + \theta \Delta t (\sigma K + N)\} \alpha(k\Delta t) = \{M - (1-\theta) \Delta t (\sigma K + N)\} \alpha((k-1)\Delta t)$$

ここで得た解を使って、次の式により $\Delta\Delta_n((k+1)\Delta t)$, $\Delta_n((k+1)\Delta t)$ を計算する。

$$(2.25) \quad \Delta\Delta_n((k+1)\Delta t) = \frac{\kappa}{2} \left\{ \frac{a_{n-1}^{k-1}}{h_n((k-1)\Delta t)} + \frac{a_{n-1}^k}{h_n(k\Delta t)} \right\} \Delta t$$

$$(2.26) \quad \Delta_n((k+1)\Delta t) = \Delta_n(k\Delta t) + \Delta\Delta_n((k+1)\Delta t) \quad \perp$$

ここで $\Delta\Delta_n((k+1)\Delta t)$ の計算に過去の 2 時点 $t = (k-1)\Delta t, k\Delta t$ におけるデータの平均値を用いたのは、後に見るように境界を表わす $\Delta_n(t)$ を 1 階連続微分可能にするためである。

§3 安定性

本節ではわれわれの scheme の安定性を論ずる。簡単のため、次の略記法を用いる。

$$(3.1) \quad \alpha_k \equiv \frac{\sigma \kappa^2 \Delta t}{\Delta_n^2(k\Delta t)} + \frac{\Delta\Delta_n(k\Delta t)}{6 \Delta_n(k\Delta t)}$$

$$(3.2) \quad \beta_k \equiv \frac{\Delta\Delta_n(k\Delta t)}{2 \Delta_n(k\Delta t)}$$

以下、*lumped mass system* の場合に限って論ずる。

本節最後に consistent mass system の場合の安定性に触れる。

lumped mass system の scheme を具体的に書き下せば次のようになる。

$$(3.3) \quad -\theta(\alpha_k - j\beta_k) a_{j-1}^k + \{1 + 2\theta\alpha_k\} a_j^k - \theta(\alpha_k + j\beta_k) a_{j+1}^k \\ = (1-\theta)(\alpha_k - j\beta_k) a_{j-1}^{k-1} + \{1 - 2(1-\theta)\alpha_k\} a_j^{k-1} + (1-\theta)(\alpha_k + j\beta_k) a_{j+1}^{k-1} \\ j = 1, 2, \dots, n-1; \quad k = 1, 2, \dots, m$$

ただし既に(2.7)に示したように $a_0^k = g(k\Delta t)$, $a_n^k = 0$ は既知である。後の都合のためにここで次の記号を導入する。

$$(3.4) \quad P_L(k, j; \Delta t, \Delta_n(k\Delta t), \Delta\Delta_n(k\Delta t); \theta) w_j^k = P_L(k, j) w_j^k \\ \equiv -\theta(\alpha_k - j\beta_k) w_{j-1}^k + \{1 + 2\theta\alpha_k\} w_j^k - \theta(\alpha_k + j\beta_k) w_{j+1}^k \\ - (1-\theta)(\alpha_k - j\beta_k) w_{j-1}^{k-1} - \{1 - 2(1-\theta)\alpha_k\} w_j^{k-1} - (1-\theta)(\alpha_k + j\beta_k) w_{j+1}^{k-1}$$

scheme (3.3) は $P_L(k, j) a_j^k = 0$ で表わされることはいうまでもない。

Lemma 1 (lumped mass system)

$$(3.5) \quad \beta_k \geq 0, \quad \frac{1}{2(1-\theta)} \geq \alpha_k > n\beta_k, \quad p_k^j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1; \\ k = 1, 2, \dots, m$$

と仮定すると, scheme

$$(3.6) \quad P_L(k, j) w_j^k = p_j^k, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

に於いて, 各 $k = 1, 2, \dots, m$ において locally に次の maximum principle が成立する。

$$(3.7) \quad \min \{w_0^k, w_n^k, w_{\min}^{k-1}\} \leq w_j^k \leq \max \{w_0^k, w_n^k, w_{\max}^{k-1}\} + p_j^k \\ j = 0, 1, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m$$

但し

$$(3.8) \quad w_{\min}^{*k-1} = \min_{0 \leq j \leq n} w_j^{*k-1}, \quad w_{\max}^{*k-1} = \max_{0 \leq j \leq n} w_j^{*k-1}$$

<証明> w_j^{*k} が $j=0$ または $j=n$ で minimum または maximum になるとしている場合には (3.7) は trivial である。

w_j^{*k} が $j=M$ ($M \neq 0, n$) で minimum になっていると仮定する。不等式 (3.5) から $\alpha_k \pm j\beta_k > 0$, $1-2(1-\theta)\alpha_k \geq 0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} \{1+2\theta\alpha_k\}w_M^{*k} &= \theta(\alpha_k - j\beta_k)w_{M-1}^{*k} + \theta(\alpha_k + j\beta_k)w_{M+1}^{*k} + (1-\theta)(\alpha_k - j\beta_k)w_{M-1}^{*k-1} \\ &\quad + \{1-2(1-\theta)\alpha_k\}w_M^{*k-1} + (1-\theta)(\alpha_k + j\beta_k)w_{M+1}^{*k-1} + p_j^{*k} \geq 2\theta\alpha_k w_M^{*k} + w_{\min}^{*k-1} \end{aligned}$$

したがって左側の不等号が成立する。

次に w_j^{*k} が $j=M'$ ($M' \neq 0, n$) で maximum になっているとすると、上と同様にして

$$\{1+2\theta\alpha_k\}w_{M'}^{*k} \leq 2\theta\alpha_k w_{M'}^{*k} + w_{\max}^{*k-1} + p_j^{*k}$$

となり、右側の不等式も成立する。

Q.E.D.

ここで次の量を導入する。

$$\left\{ \begin{aligned} (3.9) \quad A &\equiv \max_{0 \leq t \leq T} (f(t), B) \\ (3.10) \quad l &\equiv b + \kappa A T \\ (3.11) \quad \lambda_b &\equiv \frac{\sigma \Delta t}{\{h_n(0)\}^2} = \frac{\sigma n^2 \Delta t}{b^2} \\ (3.12) \quad \lambda_l &\equiv \frac{\sigma n^2 \Delta t}{l^2} \end{aligned} \right.$$

仮定 (A) に加えて次の仮定を置く。

$$(B) \quad \lambda_b < \frac{1}{2(1-\theta)}$$

$$(C) \quad \begin{cases} A \leq \frac{6\sigma n^2}{\kappa b} \left\{ \frac{1}{2(1-\theta)\lambda_b} - 1 \right\} \\ A \leq \frac{2\sigma n}{\kappa l} \\ A \leq \frac{b}{(1-\theta)\kappa \Delta t} \end{cases}$$

仮定 (B) は (C) の一つの不等式が成立するための必要条件である。

Lemma 2 (lumped mass system)

仮定 (A), (B), (C) の下で次の不等式が成立する。

$$(3.13) \quad 0 \leq \frac{a_j^k}{(1-\frac{j}{n})\Delta_n(k\Delta t)} \leq A$$

$$j = 0, 1, \dots, n-1; \quad k = 0, 1, \dots, m$$

<証明> まず定義から a_j^k は次式を満たす。

$$(3.14) \quad P_L(k, j) a_j^k = 0$$

また

$$(3.15) \quad d_j^k \equiv A \left(1 - \frac{j}{n}\right) \Delta_n(k\Delta t) - a_j^k$$

なる量を定義すると (Fig. 2), これは次式を満たすことが容易に確かめられる。

$$(3.16) \quad P_L(k, j) d_j^k = p_j^k$$

但し

$$(3.17) \quad p_j^k = A \Delta_n(k\Delta t) \left\{ 1 - (1-\theta) \frac{j}{n} \frac{\Delta_n(k\Delta t)}{\Delta_n(k\Delta t)} \right\}$$

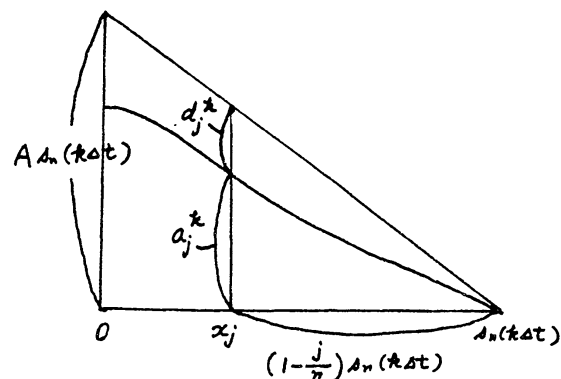


Fig. 2

不等式 (3.13) を証明するために, ここで

$$\begin{cases} (3.18) & 0 < a \leq \Delta_n(\Delta t) \leq \Delta_n(2\Delta t) \leq \dots \leq \Delta_n(k\Delta t) \\ (3.19) & 0 \leq a_j^{*k}, \quad 0 \leq d_j^{*k}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

を k に関する帰納法で証明する. (3.18), (3.19) が成立すれば (3.13) が成立することは明らかである.

まず $k=0$ のとき, $a = \Delta_n(0) > 0$, (1.3) および仮定 (A) より (3.18), (3.19) は明らかである.

次に, (3.18), (3.19) が $0, 1, \dots, k-1$ に関して成立しているものと仮定する. 定義 (2.23), (2.25) から $\Delta \Delta_n(k\Delta t) \geq 0$ であることは明白であるから, (2.26) より (3.18) が成立する.

一方, $k \geq 2$ のとき, 帰納法の前提によって成立している (3.13) の $k-1, k-2$ の場合の式において $j=n-1$ とおくと, (2.25) より

$$(3.20) \quad \frac{\Delta \Delta_n(k\Delta t)}{\Delta t} \leq \kappa A$$

を得る. $k=1$ の場合は (2.23) よりこの不等式は明らかである. したがって仮定 (C) の最後の不等式より

$$(3.21) \quad p_j^{*k} \geq A \Delta \Delta_n(k\Delta t) \left\{ 1 - (1-\theta) \frac{\kappa A}{a} \Delta t \right\} \geq 0$$

であることがわかる. $\beta_k \geq 0$ は明らかであるので, あと $n\beta_k < \alpha_k \leq \frac{1}{2(1-\theta)}$ が示されれば Lemma 1 が適用できる. さて,

(3.20) より $A_n(k\Delta t) \leq b + kA_k\Delta t \leq l$ であること, および仮定

(C) の第2の不等式より

$$(3.22) \quad \alpha_k - n\beta_k = \frac{\Delta t}{A_n(k\Delta t)} \left\{ \frac{\sigma n^2}{A_n(k\Delta t)} - \frac{3n-1}{6} \frac{\Delta A_n(k\Delta t)}{\Delta t} \right\} \\ \geq \frac{\kappa n \Delta t}{2l} \left(\frac{2\sigma n}{\kappa l} - A \right) \geq 0$$

を得, さらに (3.20) および仮定 (C) の第1の不等式より

$$(3.23) \quad \frac{1}{2(1-\theta)} - \alpha_k \geq \frac{\kappa \Delta t}{6b} \left[\frac{6\sigma n^2}{\kappa b} \left\{ \frac{1}{2(1-\theta)\lambda_k} - 1 \right\} - A \right] \geq 0$$

を得る. これで (3.5) がすべて成立していることが示された.

以上の結果によって Lemma 1 が適用できる. まず $a_0^* = g(k\Delta t) \geq 0$, $a_n^* = 0$, および $k-1$ のときの前提に注意して (3.14) に Lemma 1 を適用すると, $a_j^* \geq 0$, $j=1, 2, \dots, n-1$ を得る. 次に, $d_0^* = A A_n(k\Delta t) - a_0^* \geq A b - g(k\Delta t) \geq 0$, $d_n^* = 0$ および帰納法の仮定 $d_j^{k-1} \geq 0$ に注意して (3.16) に Lemma 1 を適用すると, (3.21) により $d_j^k \geq 0$, $j=1, 2, \dots, n-1$ を得る. Q. E. D.

Lemma 2 は, 仮定 (A), (B), (C) の下で Lemma 1 の前提条件が成立することを示している. したがってわれわれの scheme において各 step ごとに Lemma 1 の maximum principle が成立している. これから次の定理を得る.

Theorem 1 (lumped mass system)

仮定 (A), (B), (C) の下で scheme

$$(3.24) \quad P_k(k, j) a_j^k = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

は, $k = 1, 2, \dots, m$ の各 step において次の maximum principle が成立するということの意味で 安定 である.

$$(3.25) \quad 0 \leq a_j^k \leq \max \{ a_0^k, a_n^k, a_{\max}^{k-1} \}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

全く同様にして, consistent mass system の scheme

$$(3.26) \quad \begin{aligned} & \{1 - 6\theta(\alpha_k - j\beta_k)\} a_{j-1}^k + \{4 + 12\theta\alpha_k\} a_j^k + \{1 - 6\theta(\alpha_k + j\beta_k)\} a_{j+1}^k \\ &= \{1 + 6(1-\theta)(\alpha_k - j\beta_k)\} a_{j-1}^{k-1} + \{4 - 12(1-\theta)\alpha_k\} a_j^{k-1} + \{1 + 6(1-\theta)(\alpha_k + j\beta_k)\} a_{j+1}^{k-1} \\ & \quad j = 1, 2, \dots, n-1; \quad k = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

に関しても安定性に關する Theorem 1 が成り立つ. その場合, 仮定 (B), (C) は次の形に置換えればよい.

$$(B) \quad \begin{cases} \lambda_e < \frac{1}{3(1-\theta)} \\ \frac{1}{6\theta} < \lambda_e \end{cases}$$

$$(C) \quad \begin{cases} A \leq \frac{60m^2}{\kappa b} \left\{ \frac{1}{3(1-\theta)\lambda_e} - 1 \right\} \\ A \leq \frac{20n}{\kappa l} \left\{ 1 - \frac{1}{6\lambda_e} \right\} \\ A \leq \frac{b}{(1-\theta)\kappa\Delta t} \end{cases}$$

仮定 (B) は, 仮定 (C) の才 1 および才 2 の不等式が成立するための必要条件である. $\lambda_e < \lambda_e$ であるので, (B) が consistent であるためには $\frac{1}{3} < \theta$ でなければならぬ.

lumped mass, consistent mass いずれの system においても, 仮定 (B) は本質的に必要であるが, 仮定 (C) は分割を

細かくするとき，すなわち， $\Delta t \rightarrow 0$ ， $n \rightarrow \infty$ とするとき自然に満足されるようになる．また，仮定 (B) は，通常の熱方程式の場合に対して Fujii [4] の与えた条件と同じ型になっていることは，当然期待された結果である．

§ 4 収束

ここでは，ゆれわれの scheme によって得られる近似解が， $\Delta t \rightarrow 0$ ， $n \rightarrow \infty$ のとき (1.1) ~ (1.4) の解に収束することをいう．ただし，本節では *lumped mass system* としても $\sigma = 1$ の場合

$$(4.1) \quad -(\alpha_k - j\beta_k) a_{j-1}^k + (1 + 2\alpha_k) a_j^k - (\alpha_k + j\beta_k) a_{j+1}^k = a_j^{k-1}$$

に限って議論することにする．

収束をいうとき，極限操作は次の条件を満足させながら行うものと仮定する．

$$(D) \quad \lambda_k = \frac{\sigma n^2 \Delta t}{h^2} = \text{constant}$$

また初期値 $f(x)$ および境界値に対して次の仮定を置く

$$(E) \quad f(x) \in C^2(x), \quad g(t) \in C^1(t) \\ f(0) = g(0), \quad \frac{dg}{dt}(0) = \sigma \frac{d^2 f}{dx^2}(0)$$

lemma 2 において $j = n-1$ と置くと次の関係を得る．

$$(4.2) \quad 0 \leq \frac{a_{n-1}^k}{h_n(k\Delta t)} \leq A$$

この不等式と(3.20)および仮定(D)より, α_k, β_k に関して次の評価を得る.

$$(4.3) \quad \beta_k \leq \frac{\kappa A}{2\delta} \Delta t$$

$$(4.4) \quad \kappa \beta_k \leq \frac{\kappa A \sqrt{\lambda_\delta}}{2\sqrt{\sigma}} \Delta t^{\frac{1}{2}}$$

$$(4.5) \quad \frac{\delta^2}{\ell^2} \lambda_\delta \leq \alpha_k \leq \lambda_\delta + \frac{\kappa A}{\delta \delta} \Delta t$$

近似解 $u_n(x, t)$ は, 時間に関しては $t = k\Delta t$ なる discrete な値において得られるが, われわれはこれら $(k-1)\Delta t < t \leq k\Delta t$ なる中間の t に, $u_n(t, x)$ の勾配を補間することによって拡張する. この手順は次の通りである. まず $u_n(x, t)$ の右端における勾配に対して次の量を定義する.

$$(4.6) \quad z_n(t) = \kappa \frac{a_{n-1}^{k-1}}{h_n((k-1)\Delta t)} + \kappa \left\{ \frac{a_{n-1}^k}{h_n(k\Delta t)} - \frac{a_{n-1}^{k-1}}{h_n((k-1)\Delta t)} \right\} \frac{t - (k-1)\Delta t}{\Delta t}$$

$$(k-1)\Delta t < t \leq k\Delta t; \quad k = 1, 2, \dots, m$$

この $z_n(t)$ に基づいて $(k-1)\Delta t < t \leq k\Delta t$ における境界 $s_n(t)$ を次のように定義する. $s_n(t)$ はつねにこれまでに行われているデータから定められるように, z_n の値は Δt だけ前の時刻の値を使う.

$$(4.7) \quad s_n(t) = \begin{cases} \delta + \kappa \frac{a_{n-1}^0}{h_n(0)} t & ; 0 \leq t \leq \Delta t \\ s_n((k-1)\Delta t) + \int_{(k-1)\Delta t}^t z_n(\tau - \Delta t) d\tau; & (k-1)\Delta t < t \leq k\Delta t, \\ & k = 2, 3, \dots, m \end{cases}$$

ここで $t = k\Delta t$ とおくと

$$(4.8) \quad \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} z_n(t-\Delta t) dt = \Delta A_n(k\Delta t), \quad k=2, 3, \dots, m$$

となり, 定義 (2.25) と矛盾しない. しかもこのように定義すると, $A_n(t)$ は微分できて, $z_n(t)$ の連続性からこの微分も $0 \leq t \leq T$ において連続に存る.

$$(4.9) \quad \frac{dA_n}{dt}(t) = \begin{cases} \kappa \frac{a_{n-1}}{k_n(0)} & , 0 \leq t \leq \Delta t \\ z_n(t-\Delta t) & , \Delta t < t \leq T \end{cases}$$

こうして $A_n(t)$ が定まったから, 任意の t に対して $0 \leq x \leq A_n(t)$ を n 等分することによって $\mathcal{G}_j(x, t)$ を構成することができる. そして各区間 $(j-1)k_n(t) < x \leq jk_n(t)$ において $\kappa_n(x, t)$ の勾配を $t = (k-1)\Delta t$ および $k\Delta t$ における値から線形補間することによってすべての x, t に対して近似解 $u_n(x, t)$ を定義することができる.

$z_n(t)$ に対する定義 (4.6) および (4.2) より次の Lemma を得る.

Lemma 3 (lumped mass および consistent mass system)

仮定 (A), (B), (C) の下で次の不等式が成立する.

$$(4.10) \quad 0 \leq \frac{dA_n(t)}{dt} \leq \kappa A$$

この Lemma 3 から, $\{A_n(t)\}$ が $0 \leq t \leq T$ で一様有界

$$(4.11) \quad b \leq A_n(t) \leq b + \kappa AT = l$$

かつ同程度連続であることがわかる。したがって $\{\lambda_n(t)\}$ の中から収束する部分列を選び出すことができる。すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$(4.12) \quad |\lambda_n(t) - \lambda_\infty(t)| < \varepsilon$$

とすることができる。

この極限関数 $\lambda_\infty(t)$ は、(4.10) より明らかに一様 Lipschitz 連続関数である。そこでこの $\lambda_\infty(t)$ を境界とする熱方程式 (1.1) ~ (1.3) の解 $u(x, t)$ を考えよう。われわれの目的は、近似解 $u_n(x, t)$ が $n \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0$ のとき $u(x, t)$ に一様収束することを示すことにあるが、そのためにまず中間的に $\lambda_n(t)$ を境界とする熱方程式 (1.1) ~ (1.3) の解 $v_n(x, t)$ を考えることにする^{*}。 $\lambda_n(t)$ および $\lambda_\infty(t)$ が Lipschitz 連続であるので、 $v_n(x, t)$ および $u(x, t)$ は存在する [10]。

まず $u(x, t)$ と $v_n(x, t)$ とを比較しよう。そのために Cannon-Hill [2] による次の Lemma を使う。Lemma 2 はこの Lemma の finite element version に外ならない。

Lemma 4

$\lambda(t)$ を単調非減少関数、 $u(x, t)$ を (1.1) ~ (1.3) の解とする。このとき仮定 (A) の下で $0 \leq t \leq T$, $0 < \rho < \eta$ に対して次の不等式が成立する。

^{*} この議論における $v_n(x, t)$ の導入は河原田秀夫氏のヒントによる。

$$(4.13) \quad 0 \leq \rho^{-1} u(x(t) - \rho, t) \leq A$$

いま u, v_n をそれぞれ境界 $\Lambda_\infty(t), \Lambda_n(t)$ の外側では恒等的に 0 に等しくするように拡張する. u, v_n は同一の初期値, 境界値をもつ. 任意に $\varepsilon > 0$ を与えたとき, n を十分大きくとれば $\rho = \varepsilon/A$ とおけるとき

$$|\Lambda_n(t) - \Lambda_\infty(t)| \leq \rho$$

とすることができる. このとき Lemma 4 および maximum principle [2] によつて, $0 \leq x \leq \min(\Lambda_n(t), \Lambda_\infty(t)), 0 \leq t \leq T$ において

$$(4.14) \quad |v_n(x, t) - u(x, t)| \leq A\rho = \varepsilon$$

とすることができるが, これは $0 \leq x \leq \max(\Lambda_n(t), \Lambda_\infty(t)), 0 \leq t \leq T$ においても成立する.

次に同一の境界をもつ有限要素解 $u_n(x, t)$ と熱方程式の解 $v_n(x, t)$ とを比較する. $0 \leq x < \Lambda_\infty(t), 0 < t \leq T$ における収束 $u_n(x, t) \rightarrow v_n(x, t)$ をいうために, 任意に $\varepsilon > 0$ および $\delta > 0$ を小さくとったとき, 領域

$$(4.15) \quad \mathcal{D}_\delta \equiv \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq \Lambda_\infty(t) - \delta, 0 \leq t \leq T\}$$

において n を十分大にすると

$$|u_n(x, t) - v_n(x, t)| < \varepsilon$$

が成立することをいう.

まず, $\varepsilon < A\delta$ のときには, δ の代わりに $\delta' = \frac{\varepsilon}{A}$ とし

領域 $D_{\delta'}$ での収束をいえばより広い領域での収束が証明されたことに存るので,

$$(4.16) \quad \delta' = \min \left(\delta, \frac{\varepsilon}{A} \right)$$

ととり, $D_{\delta'}$ での収束を調べることにする. n_0 を十分大きくとれば, $n > n_0$ なる任意の n に対し, n に依存しないある $0 < \delta_1 < \delta'$ なる δ_1 が存在し, 適当な $J < n$ をとればすべての $k = 0, 1, \dots, m$ に対し

$$(4.17) \quad A_{\infty}(k\Delta t) - \delta' < x_J^k < A_{\infty}(k\Delta t) - \delta_1, \quad x_J^k = \frac{J}{n} A_n(k\Delta t)$$

$$(4.18) \quad A_n(k\Delta t) - \delta' < x_J^k < A_n(k\Delta t) - \delta_1$$

とすることができる. また仮定 (E) より, $\frac{\partial v_n}{\partial t}, \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}$ および v_n の極限関数 u に対する $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ は, δ_1 を固定するとき領域 D_{δ_1} において一様連続である. 目的は, n を十分大きくするとき点 $x_j^k = \frac{j}{n} A_n(k\Delta t)$; $j = 0, 1, \dots, J$; $k = 1, 2, \dots, m$ に関して次式を示すことである.

$$(4.19) \quad |u_n(x_j^k, k\Delta t) - v_n(x_j^k, k\Delta t)| < \varepsilon$$

格子点 $P_j(x = \frac{j}{n} A_n(k\Delta t), t = k\Delta t)$ における v_n の値を

$$(4.20) \quad v_j^k \equiv v_n(x_j^k, k\Delta t)$$

とおき, u_n との差を

$$(4.21) \quad \varepsilon_j^k = u_j^k - v_j^k$$

とおく. 初期値, 境界値は同一であるから

$$(4.22) \quad \varepsilon_0^k = 0, \quad \varepsilon_j^0 = 0$$

である。また Lemma 2 および Lemma 4 を使うと、自由境界における値に関しては (4.16) および (4.18) より

$$(4.23) \quad |\varepsilon_j^k| \leq \max(u_n(x_j^k, t, \Delta t), v_n(x_j^k, t, \Delta t)) < \varepsilon$$

が成立する。

一方、 ε_j^k が次式を満たすことは容易に示される。

$$(4.24) \quad P_L(k, j; \Delta t, \Delta n, \Delta \Delta n; 1) \varepsilon_j^k \\ = -P_L(k, j; \Delta t, \Delta n, \Delta \Delta n; 1) v_j^k$$

Fig. 3 に示すように真

$$\tilde{P}_j(x = \frac{j}{n} \Delta n (k-1) \Delta t),$$

$t = k \Delta t$) をとり、ここ

における v_j^k の近似値を

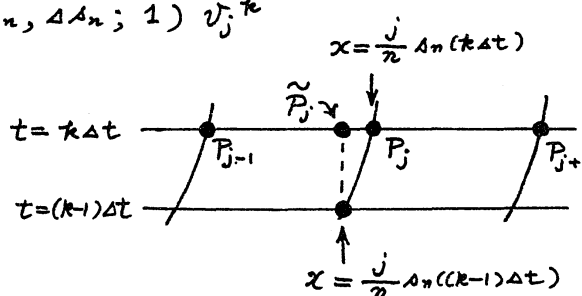


Fig. 3

$$(4.25) \quad \tilde{v}_j^k \equiv j \frac{\Delta \Delta n}{2 \Delta n} v_{j-1}^k + v_j^k - j \frac{\Delta \Delta n}{2 \Delta n} v_{j+1}^k$$

とおく。 $\Delta n, \Delta \Delta n$ は $t = k \Delta t$ における値をとるものとする。

これは Fig. 3 における真 P_{j-1}, P_j での値に基づく Lagrange 補

間と、真 P_j, P_{j+1} に基づく Lagrange 補間の平均値である。真

\tilde{P}_j における v_n と \tilde{v}_j^k との差は、Lagrange 補間の誤差公式

によって

$$(4.26) \quad v_n(\tilde{P}_j) - \tilde{v}_j^k = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2!} \left(\frac{j}{n} \Delta \Delta n \right) \left(\frac{\Delta n - \Delta \Delta n}{n} \right) \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{1}{2!} \left(\frac{j}{n} \Delta \Delta n \right) \left(\frac{\Delta n + \Delta \Delta n}{n} \right) \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \right\}$$

で表わされる。ただし $\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}, \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$ は補間の区間の内部のある真

における $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の値で、これは領域 D_δ で一様有界である。一方、(3.2) と (4.3) によって $\Delta A_n = O(\Delta t)$ であるから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して n を十分大きくすれば

$$(4.27) \quad |v_n(\tilde{P}_j) - \tilde{v}_j^k| < \varepsilon \Delta t$$

とすることができる。また (4.24) の右辺を具体的に書き下せば次のようになることがわかる。

$$(4.28) \quad -P_L(k, j; \Delta t, \Delta n, \Delta A_n; 1) E_j^k \\ = \Delta t \left\{ \frac{\tilde{v}_j^k - v_j^{k-1}}{\Delta t} - \sigma \left(1 + \frac{\Delta n}{60n^2} \frac{\Delta A_n}{\Delta t} \right) \frac{v_{j-1}^k - 2v_j^k + v_{j+1}^k}{h^2 (k \Delta t)} \right\}$$

ここで v_n が (1.1) を満たすこと、 $\frac{\partial v_n}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ が D_δ で一様連続であること、および (4.27) に注意すれば、 n を十分大きくとることにより

$$(4.29) \quad |P_L(k, j; \Delta t, \Delta n, \Delta A_n; 1) E_j^k| < \varepsilon \Delta t$$

とすることができる。以上の議論で ε は n に依存しない。ここで (4.22) と (4.23) に注意すれば、結局 Theorem 1 によって

$$(4.30) \quad |E_j^k| < \varepsilon$$

を得る。中固の (x, t) における $u_n(x, t)$ の構成の仕方から、 $n \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0$ のとき $u_n(x, t)$ は $v_n(x, t)$ に一様収束することがわかる。

以上から (4.14) と (4.30) によってわれわれの近似解 u_n が $n \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0$ のとき u に一様収束することがわかった。

残る作業は, $A_0(t)$ を境界とする (1.1) ~ (1.3) の解 $u(x, t)$ が Stefan 条件 (1.4) を満たすことを示すことである. そのためには $A_n(k\Delta t)$ の計算のために, 過去の時刻 $t = (k-2)\Delta t, (k-1)\Delta t$ でのデータを用いている近似の正当性を保証しておく必要がある. そこでまず a_j^k の 2階差分 c_j^k を定義しよう.

$$(4.31) \quad c_j^k = \frac{a_{j-1}^k - 2a_j^k + a_{j+1}^k}{h_n^2(k\Delta t)}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

c_j^k に関して次の lemma が成立する.

Lemma 5 (lumped mass system, $\theta = 1$)

仮定 (A), (B), (C), (E) のもとで c_j^k は一様有界である.

$$(4.32) \quad |c_j^k| \leq M, \quad j = 1, 2, \dots, n-1; \quad k = 1, 2, \dots, m$$

<証明> scheme (4.1) は $1 \leq j \leq n-1$ に対して定義されているが, これを $j=0, n$ に対しても拡張定義し, それに伴って a_{-1}^k, a_{n+1}^k を定義しておく. こうすると c_j^k も $j=0, n$ に対して定義することができ.

scheme (4.1) において $j=0$ において Δt で割ると

$$\frac{a_0^k - a_0^{k-1}}{\Delta t} = \frac{A_n^2(k\Delta t)}{h_n^2 \Delta t} \alpha_n c_0^k$$

となるが, 左辺は仮定 (E) より一様有界であり, また仮定 (D)

および (4.5) より

$$(4.33) \quad \frac{A_n^2(k\Delta t)}{h_n^2 \Delta t} \alpha_n \geq \frac{\sigma^2}{l^2} \sigma$$

だから c_0^k は一様有界である.

$$(4.34) \quad |c_0^k| \leq M_1$$

次に scheme (4.1) において $j=n$ とおき, 両辺を $h_n(k\Delta t)$ で割ると, $a_n^k = a_{n-1}^k = 0$ であることを注意すれば

$$(\alpha_k - n\beta_k) \frac{a_{n-1}^k}{h_n(k\Delta t)} + (\alpha_k + n\beta_k) \frac{a_{n+1}^k}{h_n(k\Delta t)} = 0$$

を得る. $a_{n-1}^k/h_n(k\Delta t)$ は (4.2) より一様有界であるが, $\frac{h^2}{\rho^2} \lambda_k \leq \alpha_k + n\beta_k$, $\alpha_k - n\beta_k \leq \alpha_k - \frac{1}{3}\beta_k \leq \lambda_k$ より $a_{n+1}^k/h_n(k\Delta t)$ も一様有界であることがわかる. 一方再び (4.1) において $j=n$ において両辺を $h_n^2(k\Delta t)$ で割ると

$$\alpha_k c_n^k - \frac{n\beta_k}{h_n(k\Delta t)} \left\{ \frac{a_{n-1}^k}{h_n(k\Delta t)} - \frac{a_{n+1}^k}{h_n(k\Delta t)} \right\} = 0$$

を得るが, $n\beta_k/\alpha_k h_n(k\Delta t) \leq \kappa A h^2/(20b^2)$ であるから c_n^k もまた一様有界である.

$$(4.35) \quad |c_n^k| \leq M_2$$

さらに仮定 (E) より次式が成立する.

$$(4.36) \quad \max_{1 \leq j \leq n-1} |c_j^0| \leq M_3$$

さて (4.1) から

$$(4.37) \quad \{P_L(k, j-1)q_{j-1}^k - 2P_L(k, j)q_j^k + P_L(k, j+1)q_{j+1}^k\} / h_n^2(k\Delta t) = 0$$

を作ると, $\{c_j^k\}$ の満たしている次のような scheme を得る.

$$(4.38) \quad -\{\alpha_k - (j-1)\beta_k\} C_{j-1}^k + \{1 + 2(\alpha_k - \beta_k)\} C_j^k - \{\alpha_k + (j+1)\beta_k\} C_{j+1}^k \\ = (1 - 2\beta_k)^2 C_j^{k-1}, \quad j=1, 2, \dots, n-1; \quad k=1, 2, \dots, m$$

ここで

$$(4.39) \quad C_M^k = \max_{0 \leq j \leq n} |C_j^k|, \quad k=1, 2, \dots, m$$

とおく. もし $C_M^k \neq |C_0^k|, |C_n^k|$ であれば, 仮定 (A), (B), (C) の下で (4.38) より

$$(4.40) \quad C_M^k \leq \frac{(1 - 2\beta_k)^2}{1 - 4\beta_k} C_M^{k-1}$$

が導かれる. Δt を十分小さくするとき, 適当な $\mu > 0$ をとれば (4.3) より

$$(4.41) \quad \frac{(1 - 2\beta_k)^2}{1 - 4\beta_k} \leq 1 + \mu \Delta t$$

とすることができる. Δt が τ になって $|C_0^k|$ あるいは $|C_n^k|$ が maximum になっていゝる場合も考慮に入れると

$$(4.42) \quad C_M^k \leq \max(|C_0^k|, |C_n^k|, (1 + \mu \Delta t) C_M^{k-1}) \\ \leq (1 + \mu \Delta t) \max(|C_0^k|, |C_n^k|, C_M^{k-1}) \\ \leq e^{\mu \Delta t} \max(|C_0^k|, |C_n^k|, C_M^{k-1})$$

ここで $\tau = k \Delta t$ とおけば, (4.34), (4.35), (4.36) より結論を得る.

$$(4.43) \quad |C_j^k| \leq e^{\mu \tau} \max(M_1, M_2, M_3) \\ \leq e^{\mu T} \max(M_1, M_2, M_3)$$

Q. E. D.

Lemma 6 (lumped mass system, $\theta = 1$)

仮定 (A), (B), (C), (E) の下で

$$(4.44) \quad |z_n(t) - z_n(t-\Delta t)| \leq M_4 \sqrt{\Delta t}$$

<証明> scheme (4.1) において $j=n-1$ とおき両辺を Δt で割ると

$$(4.45) \quad \alpha_k \frac{h_n^2(k\Delta t)}{\Delta t} C_{n-1}^* - \frac{(n-1)\beta_k a_{n-2}^k + a_{n-1}^k - a_{n-1}^{k-1}}{\Delta t} = 0$$

となるが, C_{n-1}^* が一様有界であり, かつ

$$(4.46) \quad \alpha_k \frac{h_n^2(k\Delta t)}{\Delta t} \leq \frac{l^2}{\tau^2} \sigma + \frac{\kappa A \sigma l^2}{6\lambda_k l^3} \Delta t$$

であるから, 左辺第1項は一様有界である. したがって

$$|(n-1)\beta_k a_{n-2}^k + a_{n-1}^k - a_{n-1}^{k-1}| \leq M \Delta t$$

が成立する. 両辺を $h_n(k\Delta t)$ で割ると

$$(4.47) \quad \left| 2(n-1)\beta_k \frac{a_{n-2}^k}{2h_n(k\Delta t)} + \left\{ \frac{a_{n-1}^k}{h_n(k\Delta t)} - \frac{a_{n-1}^{k-1}}{h_n((k-1)\Delta t)} \right\} + a_{n-1}^{k-1} \left\{ \frac{1}{h_n((k-1)\Delta t)} - \frac{1}{h_n(k\Delta t)} \right\} \right| \leq M \frac{\Delta t}{h_n(k\Delta t)}$$

となる. ここで Lemma 2 で $j=n-2$ とおいて (4.4) に注意すれば

$$\left| 2(n-1)\beta_k \frac{a_{n-2}^k}{2h_n(k\Delta t)} \right| \leq \frac{\kappa A^2 \sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{\sigma}} \Delta t^{\frac{1}{2}}$$

となり, また (4.3) より

$$\left| \frac{1}{h_n((k-1)\Delta t)} - \frac{1}{h_n(k\Delta t)} \right| = \left| \frac{2n\beta_k}{A_n(k\Delta t) - \Delta A_n(k\Delta t)} \right| \leq \frac{\kappa A \sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{\sigma} l} \Delta t^{\frac{1}{2}}$$

となる。右辺に關しては仮定 (甲) より

$$\frac{\Delta t}{h_n(k\Delta t)} = \sqrt{\frac{n^2 \Delta t}{h_n^2(k\Delta t)}} \Delta t^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{\sigma}} \Delta t^{\frac{1}{2}}$$

となるから、結局 n を十分大きくすれば (4.47) より

$$(4.48) \quad \left| \frac{a_{n-1}^k}{h_n(k\Delta t)} - \frac{a_{n-1}^{k-1}}{h_n((k-1)\Delta t)} \right| \leq M' \Delta t^{\frac{1}{2}}$$

を得る。あとは (4.6) の定義に従って計算を実行すれば、結論を得る。 Q. E. D.

さて、中間の (x, t) の値に拡張した $u_n(x, t)$ に關して、lemma 5 から $\lim_{x \rightarrow \Delta_n(t)} \frac{\partial}{\partial x} u_n(x, t)$ が存在し、さらに (4.6) より

$$(4.49) \quad \lim_{x \rightarrow \Delta_n(t)} -\kappa \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t) = z_n(t) \quad (0 < t \leq T \text{ で一様})$$

が成立する。一方、Cannon-Hill [2] により次の lemma が与えられている。

lemma 7

$\Delta(t)$ は $0 \leq t \leq T$ で Lipschitz 連続であるとする。このとき仮定 (A) の下で (1.1) ~ (1.3) の解 $u(x, t)$ に対して $u_x(\Delta(t), t)$ が存在し、これは $0 < t \leq T$ で連続である。

この lemma により、 $\Delta_\infty(t)$ を境界とする解 $u(x, t)$ に關して $\lim_{x \rightarrow \Delta_\infty(t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ が存在する。したがって (4.49) より

$$(4.50) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(t) = -\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta_\infty(t), t) \quad (0 < t \leq T \text{ で一様})$$

一方, 定義 (4.7) より

$$(4.51) \quad \begin{aligned} \lambda_n(t) &= b + \kappa \frac{a_{n-1}^0}{h_n(0)} \Delta t + \int_{\Delta t}^t z_n(\tau - \Delta t) d\tau \\ &= b + \kappa \frac{a_{n-1}^0}{h_n(0)} \Delta t + \int_{\Delta t}^t z_n(\tau) d\tau + \int_{\Delta t}^t \{z_n(\tau - \Delta t) - z_n(\tau)\} d\tau, \quad \Delta t \leq t \leq T \end{aligned}$$

となるが, $\Delta t \rightarrow 0$ のとき lemma 6 および (4.50) より

$$(4.52) \quad \lambda_{\infty}(t) = b - \kappa \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(\lambda_{\infty}(\tau), \tau) d\tau$$

となる. 可なり $\lambda_{\infty}(t)$ と u とは Stefan 条件

$$(4.53) \quad \frac{d\lambda_{\infty}(t)}{dt} = -\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(\lambda_{\infty}(t), t)$$

を満足する.

ところで, 方程式系 (1.1) ~ (1.4) の解が一意的であることは Cannon-Hill [2] によって示されている. よって次の定理を得る.

Theorem 2 (lumped mass system, $\theta = 1$)

仮定 (A), (B), (C), (D), (E) の下で scheme (4.1) による近似解は $n \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0$ のとき Stefan 問題 (1.1) ~ (1.4) の解に一樣収束する.

§5 数値例

次の簡単な例題に対して行った数値計算の結果を示す

$$(5.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \lambda(t), \quad 0 < t \leq 1$$

$$(5.2) \quad u(0, t) = 1 - \frac{1}{2}t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(5.3) \quad u(x, 0) = 1 - x, \quad \delta = \rho(0) = 1$$

$$(5.4) \quad \frac{dA}{dt} = -u_x(\rho(t), t)$$

計算は, lumped mass system, $\theta = 1$ について, x 方向の
 きざみ数は $n = 8, 16, 32, 64$ (等間隔), t 方向のきざみ数はそ
 れぞれの n に対して $m = 4n^2$, すなわち $\Delta t = 1/(4n^2)$ で行
 った. この例題においては $A = 1$, $l = 2$, $\lambda_\delta = \frac{1}{16}$, $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$ であ
 り, $\frac{d\rho}{dt}(0) \neq \frac{d^2f}{dx^2}(0)$ を除いて仮定 (A), (B), (C), (D), (E) はす
 べて満足している. 計算は安定に進み, $n = 16$, $m = 1024$ のと
 きの解 $u_n(x, t)$ を Fig. 4 に, $A_n(t)$ を Fig. 5 に示した.

また収束の速さを見るために, $n = 8, 16, 32$ のときの結果を
 $n = 64$ のときの結果と比較, これを Table 1 に掲げた.

n	m	$\max_{0 \leq j \leq n} u_n(j, 1) - u_{64}(j, 1) $	$\max_{0 \leq k \leq m} A_n(k\Delta t) - A_{64}(k\Delta t) $	$\max_{0 \leq k \leq m} \left \frac{\Delta A_n}{\Delta t_n}(k\Delta t) - \frac{\Delta A_{64}}{\Delta t_{64}}(k\Delta t) \right $
8	256	3.34×10^{-4}	15.4×10^{-3}	7.02×10^{-2}
16	1024	1.55×10^{-4}	6.41×10^{-3}	3.30×10^{-2}
32	4096	0.539×10^{-4}	2.11×10^{-3}	1.18×10^{-2}

Table 1

§ 6 Discussion

ここに述べたアルゴリズム自体は, 2相問題, 多次元問題
 へ容易に適用することができ [8]. また, 他の形の free

boundary problem, moving boundary problem へも同様に適用することができる。

有限要素法の代りに差分法を適用しても, *velocity matrix* を持つ類似のアルゴリズムを得ることができることは明らかであるが, 多次元への応用を考えると, 有限要素法の方が適用が簡単であると思われる。

行列要素は各時間 *step* 毎に計算しなおさなければならないが, 実際にはその計算は比較的容易である。特に1次元の場合, 行列 M, K, N はすべて定数行列 \times 時間に依存する *scalar* である。また行列 N の *sparseness* は K のものと同一である。

この方法は, 多次元の場合, 境界がつねに *star-shaped* に保たれなければならないという欠点があるが, 一方つねに境界が自然な形で格子臭に一致しているので, *Table 1* にみられるようにかなり粗いささみ幅でも十分な精度の結果を得ることが期待できる。

最後に, この論文は主として筆者が *New York University Courant Institute* に滞在中に行った研究をまとめたものである。*Table 1* および *Fig. 4, Fig. 5* は *Courant Institute* の CDC-6600 によって得たものである。

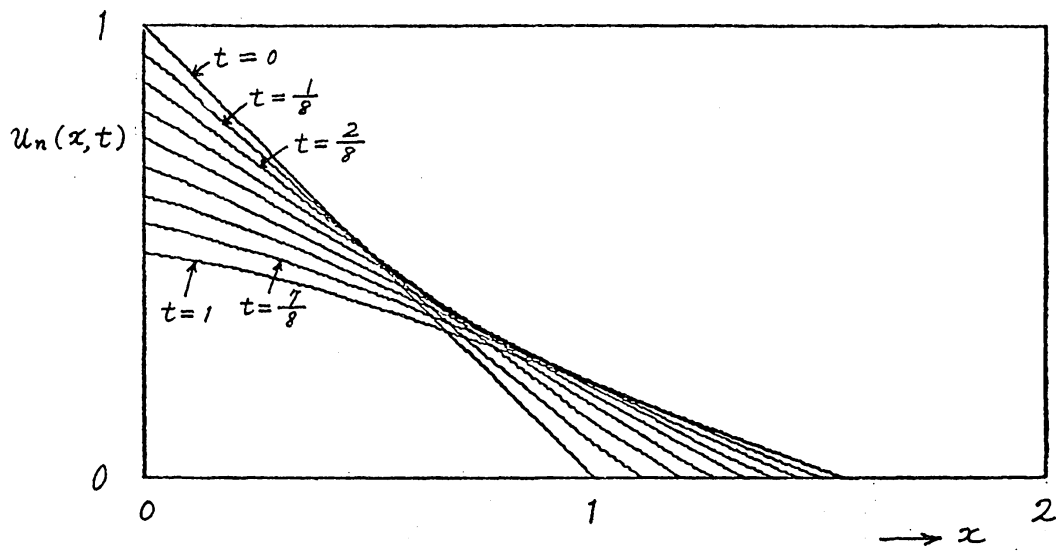


Fig. 4 $u_n(x, t)$, $n=16$

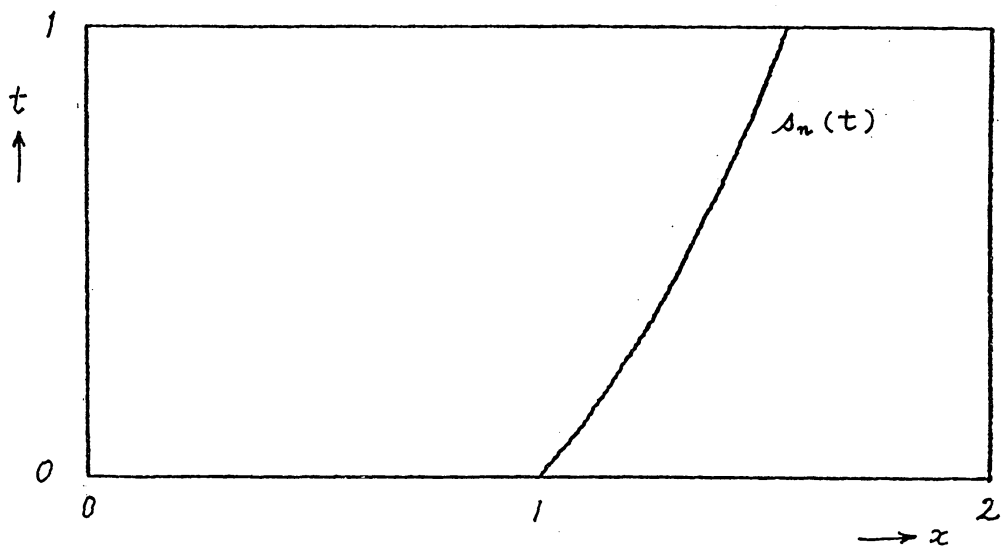


Fig. 5 $\delta_n(t)$, $n=16$

References

- [1] Bonnerot, R. and Jamet, P., A second order finite element method for the one-dimensional Stefan problem, International J. for Numerical Methods in Engineering, to appear.
- [2] Cannon, J.R. and Hill, C.D., Existence, uniqueness, stability and monotone dependence in a Stefan problem for the heat equation, J. Math. and Phys., 17(1967), 1-9.
- [3] Douglas, J. Jr. and Gallie, T.M., On the numerical integration of a parabolic differential equation subject to a moving boundary condition, Duke Math. J., 22(1955), 557-571.
- [4] Fujii, H., Some remarks on finite element analysis of time-dependent field problems, Proceedings of 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Analysis.
- [5] Kawarada, H. and Natori, M., On numerical solutions of Stefan problem I, Memoir of Numerical Mathematics, No.1(1974), 43-54.
- [6] Landau, H.G., Heat conduction in a melting solid, Quart. Appl. Math., 8(1950), 81-94.
- [7] Mori, M., Numerical solution of the Stefan problem by the finite element method, Memoir of Numerical Mathematics, No.2 (1975), 35-44.
- [8] 森 正武, ステファン問題の有限要素近似解, 京都大学数理解析研究所「数値計算のアルゴリズムの研究」(1975秋) 予稿集
- [9] Nogi, T., A difference scheme for solving the Stefan problem, Publ. of RIMS, Kyoto Univ., 9(1974), 543-575.
- [10] Petrovski, I.G., Partial Differential Equations, Iliffe Books, 1967 (translated from Russian ed.), Supplement.