数理解析研究所講究録
第 264 巻 1976 年 120-127

非線形発展方程式の差分近似について

早大・理工　　小林和夫
新潟大・工　　小林良和

§1. 序

この小論では，時間に依存する非線形発展方程式

(1) $\quad du(t)/dt \in A(t)u(t), \quad 0 \leq t \leq T$

を Crandall-Liggett [1], Kobayashi [3] の方法で論ずる。但し，$\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ はある Banach 空間の dissipative 作用素族である。応用として，一階準線型方程式

(2) $\quad u_t(t,x) + \phi(t, u(t,x))_x = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}$

を扱う。

§2. 非線形発展方程式

X を（実）Banach 空間とし，その norm を $\|\cdot\|$ で表わす。$p: X \to [0,\infty]$ を $p \not\equiv \infty$ な下半連続（l.s.c.）な汎関数とする。このとき

(3) $\quad X_\alpha = \{x \in X;\ p(x) \leq \alpha\}, \quad X_0 = \bigcup_{\alpha>0} X_\alpha$

とおく。 X_α は closed である。

<u>定理 1</u>. $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ を X の dissipative 作用素族とし，次の条件 (I), (II), (III) を仮定する。

(I) $Y = \overline{X_0} = \overline{D(A(t))}$ (＝一定)， $t\in[0,T]$

(II) $\lambda>0$, $t\in[0,T]$ のとき, $R(I-\lambda A(t))\supset X_0$,

(4) $$p(J_\lambda(t)u) \le p(u), \quad u\in X_0$$

但し, $J_\lambda(t) = (I-\lambda A(t))^{-1}$ とおいた。

(III) 各 $\alpha>0$ に対して, 非減少関数 $\omega_\alpha : [0,T]\to[0,\infty)$ で, $\lim_{r\downarrow 0}\omega_\alpha(r)=0$ を満たすものがあって, $u\in X_\alpha$ のとき

(5) $$\|J_\lambda(s)u - J_\lambda(t)u\| \le \lambda\,\omega_\alpha(|s-t|),\ \lambda>0,\ s,t\in[0,T]$$

が成立する。

このとき, $u\in Y$ に対して, 極限

(6) $$U(t,s)u = \lim_{\lambda\downarrow 0}\prod_{k=1}^{[t-s/\lambda]} J_\lambda(s+k\lambda)u$$

が $0\le s\le t\le T$ に対して, 一様に存在する。また, $\{U(t,s);$ $0\le s\le t\le T\}$ は次の性質をもつ。

(a) $U(t,s)U(s,r)=U(t,r)$, $U(s,s)=I$ on Y, $0\le r\le s\le t\le T$

(b) $U(t,s)u$, $u\in Y$, は $0\le s\le t\le T$ なる s,t について連続

(c) $\|U(t,s)u-U(t,s)v\|\le\|u-v\|$, $u,v\in Y$, $0\le s\le t\le T$

(d) $p(U(t,s)u)\le p(u)$, $u\in X_0$, $0\le s\le t\le T$

この定理は次の補題により証明される。

補題1. $u \in X_\alpha$ のとき，$k = 1, 2, \cdots, [T-s/\lambda]$，$\lambda > 0$ に対し

$$\rho\left(\prod_{i=1}^{k} J_\lambda(s+i\lambda)u\right) \le \rho(u) \le \alpha .$$

補題2. $u, v \in X_\alpha$ のとき，$\lambda, \mu > 0$，$s, t \in [0, T]$ に対し

$$\|J_\lambda(s)u - J_\mu(t)v\| \le \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\|J_\lambda(s)u - v\| + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\|J_\mu(t)v - u\| + \frac{3\lambda\mu}{\lambda+\mu}\omega_\alpha(|s-t|)$$

証明. 対称性により $\mu \le \lambda$ としてよい。(II), (III) より

$$\begin{aligned}\|J_\lambda(s)u - J_\mu(t)v\| &\le \|J_\lambda(s)u - J_\mu(s)v\| + \|J_\mu(s)v - J_\mu(t)v\| \\ &\le \|J_\lambda(s)u - J_\mu(s)v\| + \mu\,\omega_\alpha(|s-t|)\end{aligned}$$

ところで，$A(s)$ は dissipative であるから

$$\begin{aligned}\|J_\lambda(s)u - J_\mu(s)v\| &\le \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\|J_\lambda(s)u - v\| + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\|J_\mu(s)v - u\| \\ &\le \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\|J_\lambda(s)u - v\| + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\|J_\mu(t)v - u\| \\ &\quad + \frac{\mu^2}{\lambda+\mu}\omega_\alpha(|s-t|)\end{aligned}$$

この二つの不等式より，求める不等式を得る。　　おわり

補題3. $\varepsilon > 0$ とし，$\delta, \lambda, \mu > 0$ および $s, s' \in [0, T]$ を $|s-s'| < \delta \le T/2$，$\lambda, \mu \le \delta - |s-s'|$ を満たす数とする。このとき $u, v \in X_\alpha$，$k = 1, 2, \cdots, [T-s/\lambda]$，$j = 1, 2, \cdots, [T-s/\mu]$ に対して，次が成り立つ。

$$(7)\quad \left\|\prod_{i=1}^{k} J_\lambda(s+i\lambda)u - \prod_{i=1}^{j} J_\mu(s'+i\mu)v\right\| \le \|J_\varepsilon(0)u - u\| + \|J_\varepsilon(0)u - v\| + f_{k,j}(\|A_\varepsilon(0)u\| + 3\omega_\alpha(T)) + 3j\mu\{\delta^{-1}\omega_\alpha(T)f_{k,j} + \omega_\alpha(2\delta)\}$$

但し，$f_{k,j} = \{(k\lambda - j\mu)^2 + \lambda^2 k + \mu^2 j\}^{1/2}$，$A_\varepsilon(0) = \varepsilon^{-1}(J_\varepsilon(0) - I)$.

略証. $a_{k,j} = \left\|\prod_{i=1}^{k} J_\lambda(s+i\lambda)u - \prod_{i=1}^{j} J_\mu(s'+i\mu)v\right\|$ とおく。補題

2を用いれば，$a_{k,0}$，$a_{0,j}$ は (7) を満たすことが容易に示せる。帰納的に $a_{k-1,j}$，$a_{k,j-1}$ が (7) を満たしていると仮定する。再び，補題2を用いれば

$$
\begin{aligned}
a_{k,j} \leq\ & \|J_\varepsilon(0)u-u\| + \|J_\varepsilon(0)u-v\| + f_{k,j}\,(\|A_\varepsilon(0)u\| + 3\,\omega_\alpha(T)) \\
& + \frac{3\lambda\mu(j-1)}{\lambda+\mu}\{\delta^{-1}\omega_\alpha(T) f_{k,j-1} + \omega_\alpha(2\delta)\} + \frac{3\mu^2 j}{\lambda+\mu}\{\delta^{-1}\omega_\alpha(T) f_{k-1,j} \\
& + \omega_\alpha(2\delta)\} + \frac{3\lambda\mu}{\lambda+\mu}\omega_\alpha(|(s+k\lambda)-(s'+j\mu)|)
\end{aligned}
$$

ここで，$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} f_{k-1,j} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} f_{k,j-1} \leq f_{k,j}$ を用いた。ところで，ω_α は非減少であるから

$$
\begin{aligned}
\omega_\alpha(|(s+k\lambda)-(s'+j\mu)|) \leq\ & \delta^{-1}\omega_\alpha(T)\,\big|\,|(s+k\lambda)-(s'+j\mu)| - |s-s'-\mu|\,\big| \\
& + \omega_\alpha(2\delta) \leq \delta^{-1}\omega_\alpha(T) f_{k,j-1} + \omega_\alpha(2\delta)
\end{aligned}
$$

この二式を合せれば，$a_{k,j}$ は (7) を満足することが示される。

おわり

<u>定理1の証明</u>　$u, v \in X_\alpha$ とするとき，(7) 式により

$$
\begin{aligned}
& \limsup_{\lambda,\mu\downarrow 0} \Big\| \prod_{i=1}^{[t-s/\lambda]} J_\lambda(s+i\lambda)u - \prod_{i=1}^{[t'-s'/\mu]} J_\mu(s'+i\mu)v \Big\| \\
& \leq \|J_\varepsilon(0)u-u\| + \|J_\varepsilon(0)u-v\| + (\|A_\varepsilon(0)u\| + 3\,\omega_\alpha(T)) \times \\
& \quad |(t-s)-(t'-s')| + 3T\{\delta^{-1}\omega_\alpha(T)|(t-s)-(t'-s')| + \omega_\alpha(2\delta)\}
\end{aligned}
$$

がすべての $\varepsilon>0$，$|s-s'|<\delta\leq T/2$ に対して成立する。ここで，$t=t'$，$s=s'$ とおき，$\varepsilon\downarrow 0$，$\delta\downarrow 0$ とすると，(b)(e) そして (c) が X_0 上で成り立つ。したがって，連続的にこれらの性質は $Y=\overline{X}_0$ 上に拡張される。最後に，(d) は補題1より，(a) は (b) より容易に分る。　おわり

§3. 応用

一階準線型偏微分方程式

$$(8)\quad \begin{cases} u_t(t,x) + \phi(t,u(t,x))_x = 0, & 0 \le t \le T, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

に対して，定理1を応用する。

$X = L^1(\mathbb{R})$ とおく。 $u \in L^1(\mathbb{R})$ に対して

$$(9)\quad \begin{cases} P_1(u) = \|u\|_\infty, \quad P_2(u) = \sup_{h \neq 0} |h|^{-1} \int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)|\, dx \\ P(u) = P_1(u) + P_2(u) \end{cases}$$

とおく。 P_1, P_2 したがって，P はX上で $l.s.c.$ である。このPに対して，X_α，X_0 を(3)で定義する。このとき，$Y = \overline{X_0} = L^1(\mathbb{R})$ である。ϕ に対して，次の仮定をおく。

(ϕ_1) $\phi(t,\xi)$, $\phi_\xi(t,\xi)$ は $[0,T]\times\mathbb{R}$ 上で連続

(ϕ_2) $\phi(t,0) = 0$, $t \in [0,T]$.

次に，$h, l > 0$ に対して，作用素 $C_{h,l}(t)$ を

$$[C_{h,l}(t)u](x) = \frac{1}{2}(u(x+l) - u(x-l)) - \frac{h}{2l}[\phi(t,u(x+l)) - \phi(t,u(x-l))]$$

と定義する。 $M_\alpha = \max\{|\phi_\xi(t,\xi)|\,;\, t\in[0,T],\, |\xi| \le \alpha\}$ とおき，δ_α を $0 < \delta_\alpha < 1/M_\alpha$ とし，数列 $\{h_{\alpha,n}\}$, $\{l_{\alpha,n}\}$ を

$$h_{\alpha,n} \to 0, \quad l_{\alpha,n} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

$$\delta_\alpha \le h_{\alpha,n}/l_{\alpha,n} \le 1/M_\alpha$$

であるようにとる。 このとき

$$C_{\alpha,n}(t) = C_{h_{\alpha,n},\ell_{\alpha,n}} \mid X_\alpha, \quad A_{\alpha,n}(t) = h_{\alpha,n}^{-1}(C_{\alpha,n}(t) - I)$$

と定義する。次の補題は Oharu-Takahashi [6] による。

補題4. 各 $t \in [0,T]$ に対して，次の性質をもつ X の dissipative 作用素が存在する。

(i) $C_0^1(\mathbb{R}) \subset D(A(t))$，したがって $\overline{D(A(t))} = X$

(ii) $R(I-\lambda A(t)) = L^1 \cap L^\infty \supset X_0$, $\lambda > 0$

$$J_\lambda(t)u = (I-\lambda A(t))^{-1}u = \lim_{n\to\infty}(I-\lambda A_{\alpha,n}(t))^{-1}u, \quad u \in X_\alpha$$

(iii) $P_i(J_\lambda(t)u) \le P_i(u)$, $u \in X_0$, $i=1,2.$

(iv) $P_1(u) \le \alpha$, $|k| \le \alpha$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $f \ge 0$ ならば

$$(10) \quad \langle |J_\lambda(t)u - k| - |u-k|, f \rangle$$
$$\le \lambda \langle \mathrm{sign}(J_\lambda(t)u - k)(\phi(t, J_\lambda(t)u) - \phi(t,k)), f_x \rangle$$

補題5. $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ を補題4より定まる作用素族とし，P を (10) により定義された X 上の汎関数とする。このとき，定理1の条件 (I), (II), (III) は満たされる。

証明 (I), (II) は補題4より明らかである。今

$$\omega_\alpha(r) = \alpha \sup\{|\phi_\xi(t,\xi) - \phi_\xi(s,\xi)|;\ |s-t| \le r,\ |\xi| \le \alpha\}$$

とおく。 $u \in X_\alpha$ とし，$v = (I-\lambda A_{\alpha,n}(t))^{-1}u$ とおくと

$$\|(I-\lambda A_{\alpha,n}(t))^{-1}u - (I-\lambda A_{\alpha,n}(s))^{-1}u\|$$
$$\le \lambda \|A_{\alpha,n}(s)v - A_{\alpha,n}(t)v\|$$
$$= \frac{\lambda}{2\ell}\int_{\mathbb{R}} \left|\int_{v(x-\ell)}^{v(x+\ell)} \{\phi_\xi(s,\xi) - \phi_\xi(t,\xi)\}\,d\xi\right| dx$$

$$\leq (\lambda/2l\alpha)\,\omega_\alpha(|s-t|)\int_{\mathbb{R}}|v(x+l)-v(x-l)|\,dx$$
$$\leq (\lambda/2l\alpha)\,\omega_\alpha(|s-t|)\,2l\,P_2(v)$$
$$\leq \lambda\,\omega_\alpha(|s-t|)$$

ここで，$n\to\infty$ とすれば，補題4 (ii) より

$$\|J_\lambda(t)u - J_\lambda(s)u\| \leq \lambda\,\omega_\alpha(|s-t|)$$

が成立する。したがって，(III) が満たされる。　　おわり

この補題から，作用素族 $\{A(t)\}$ に対して，evolution operator $\{U(t,s);\,0\leq s\leq t\leq T\}$ が $X=L^1(\mathbb{R})$ 上で存在する。このとき；次の定理が成り立つ。

__定理 2.__　$u_0\in L^1\cap L^\infty$ に対して，$u(t,x)=[U(t,0)u_0](x)$ は方程式 (8) の Kružkov [4] の意味の一般解である。すなわち，$u(t,x)\in L^\infty(\mathbb{R})$，$t\in[0,T]$ であり，かつ，すべての $k\in\mathbb{R}$，$f\in C_0^\infty((0,T]\times\mathbb{R})$，$f\geq 0$ に対して

$$(11)\quad \int_0^T\int_{\mathbb{R}}\{|u(t,x)-k|\,f_t(t,x)+\mathrm{sign}\,(u(t,x)-k)\,[\phi(t,u(t,x)) - \phi(t,k)]\,f_x(t,x)\}\,dx\,dt \geq 0$$

この証明は補題4 (iv) を用いることによりなされる。

__謝辞.__ 多くの有益な助言をいただいた，高橋氏および宮寺，大春両先生に対し感謝いたします。

文献

[1] M. Crandall-T. Liggett; Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach

spaces, Amer. J. Math., 93 (1971), 265–298.
[2] M. Crandall - A. Pazy; Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Isreal J. Math., 11. (1972), 57–94
[3] Y. Kobayashi; Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups, J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 640–665
[4] S. Kružkov; First-order quasi-linear equations in several independent variable, Math. USSR Sbornik 10 (1970), 217–243
[5] S. Oharu; On the semigroup approach to nonlinear partical differential equations of first order, I , to appear.
[6] S. Oharu - T. Takahashi; A convergence theorem of nonlinear semigroups and its application to first-order quasilinear equations, J. Math. Soc. Japan, 26 (1974), 124–160