数理解析研究所講究録
第 264 巻 1976 年 128-143

ある種の退化した劣微分型の発展方程式について

阪大理　　四ッ谷晶二
丸尾　健二

§0. 序

実ヒルベルト空間Hにおいて次の非線型発展方程式：

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial\left(c(t)\varphi^t + I_{\overline{D}}\right) u(t) \ni f(t) \qquad u(0) = u_0 \qquad (*)$$

の*“弱い解”について考える。以下、記号および仮定について述べる。$\{\varphi^t\}_{t\in[0,T]}$ は、各 $t\in[0,T]$ ごとに $\varphi^t : H \longrightarrow]-\infty,\infty]$ で、凸、下半連続(l.s.c.)、$\not\equiv +\infty$ として、次の仮定をおく。

(A-1)　$D(\varphi^t) \equiv D$

(A-2)　$\forall r>0,\ \exists l_r \geq 0,\ \exists a_r(\cdot) \in C([0,T])$;

$$|\varphi^t u - \varphi^s u| \leq |a_r(t) - a_r(s)|\,[\varphi^s u + l_r]$$

$$\text{for}\quad \forall u \in D,\ |u| \leq r,\quad \forall s,t \in [0,T]$$

(A-3)　$c(\cdot) \in C([0,T])$;　$c(t) \geq 0$,

$$\text{measure}\left(\{t\in]0,T[\ ;\ c(t)=0\} - \text{int}\{t \in]0,T[\ ;\ c(t)=0\}\right) = 0$$

ただし　$I_{\overline{D}}(u) = 0$ if $u \in \overline{D}$, $+\infty$ if $u \notin \overline{D}$ 。

注意したいことは、$c(t)$ は 0 になるかもしれないので $(*)$

は退化した方程式と考えられること，および(A-2)において $a_r(\cdot)$ は単に連続（絶対連続とはかぎらない）という事である。

定義　$u \in C([0,T]; \overline{D})$ が $(*)$ の"弱い解"である

$\Longleftrightarrow$ $u(0)=u_0$，$(c(t)\varphi^t + I_{\overline{D}})u(t) \in L^1(0,T)$ かつ

$$\int_{t_1}^{t_2}(c(\sigma)\varphi^\sigma + I_{\overline{D}})v(\sigma)d\sigma - \int_{t_1}^{t_2}(c(\sigma)\varphi^\sigma + I_{\overline{D}})u(\sigma)d\sigma$$
$$\geq \int_{t_1}^{t_2}\left(f(\sigma)-\frac{dv}{d\sigma}(\sigma), v(\sigma)-u(\sigma)\right)d\sigma + \frac{1}{2}|v(t_2)-u(t_2)|^2 - \frac{1}{2}|v(t_1)-u(t_1)|^2$$
$$\forall\, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T \qquad \forall v \in W^{1,1}(t_1, t_2; \overline{D})$$

定理　(A-1)，(A-2)，(A-3) を仮定すれば，任意の $f \in L^1(0,T;H)$ と任意の $u_0 \in \overline{D}$ に対して $(*)$ の"弱い解"が一意的に存在する。

注意　(A-2)でさらに $a_r(\cdot) \in C([0,T]) \cap VB([0,T])$ とした仮定を(A-2)′，(A-3)で単に $c(t) \geq 0$，$c(t) \in C([0,T])$ としたものを(A-3)′とする。このとき，§2 の補題2.1.の証明の方法と K. Maruo [4] の証明の方法を組合せると，次のことがわかる。「(A-1)，(A-2)′，(A-3)′ を仮定すれば，$f(t)/\sqrt{c(t)} \in L^2(0,T;H)$ となる任意の f および，任意の $u_0 \in \overline{D}$ に対して，区分的に強い解が一意的に存在する。」これは作用素が線型の場合の A. Friedman and Shuss [6] の定理7.3.の場合にあてはまる。

§1. 定義と基本的な補題

(*)の strong solution (str. sol) および weak solution (weak. sol) を H. Brézis [1] に従って定義する。次に piecewise strong solution (p. str. sol.) および piecewise weak solution (p. weak. sol) をそれぞれ区分的には str. sol. および weak sol となっていて $u(0)=u_0$ をみたす $C([0,T];H)$ の元として定義する。

注意　§0. で定義した"弱い解" と weak sol は別のものである。

補題 1.1. 次の図式が成立する。

$$\begin{array}{ccccc} \text{str. sol} & \Longrightarrow & \text{p. str. sol.} & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \\ \text{weak sol} & \Longrightarrow & \text{p. weak. sol.} & \Longrightarrow & \text{"弱い解"} \end{array}$$

証明　u が str. sol. のときには、$\forall v \in D$ に対して

$$c(t)\varphi^t v - c(t)\varphi^t u(t) \geq \left(f(t) - \frac{du}{dt}(t),\ v - u(t)\right) = (f(t),\ v - u(t)) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-v|^2$$

故に、$c(t)\varphi^t u(t) \in L^1(0,T)$。残りの部分は簡単なので略す。

補題 1.2. u と v をそれぞれ次の方程式の p. weak. sol とする。

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial\left(c(t)\varphi^t + I_{\overline{D}}\right)u(t) \ni f(t) \qquad (1.1)$$

$$\frac{dv}{dt}(t) + \partial(c(t)\varphi^t + I_{\bar{D}})\, v(t) \ni g(t) \qquad (1.2)$$

ここで，$f, g \in L^1(0,T;H)$。このとき次の不等式が成立

$$\frac{1}{2}|u(t)-v(t)|^2 \leq \frac{1}{2}|u(s)-v(s)|^2 + \int_s^t (f(\sigma)-g(\sigma), u(\sigma)-v(\sigma))d\sigma \qquad (1.3)$$

$$|u(t)-v(t)| \leq |u(s)-v(s)| + \int_s^t |f(\sigma)-g(\sigma)|d\sigma \qquad (1.4)$$

$$\forall 0 \leq s \leq t \leq T.$$

証明　u, v が weak sol のときは [1] P.64. Lemma 3.1. と同様。p. weak. sol. の場合は各区分された区間ごとに不等式を出して加えればよい。

§ 2.　いくつかの補題

この § では定理を φ^t が t に無関係の場合に証明する。

補題 2.1.　$\forall h \in L^1(0,T;H)$，$\forall u_0 \in \bar{D}$ に対し，次の方程式の weak. sol. が存在して，この問題の p.weak.sol. として一意。

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial(c(t)\varphi + I_{\bar{D}})\,u(t) \ni \sqrt{c(t)}\,h(t), \quad u(0) = u_0 \qquad (2.1)$$

とくに，$h \in L^2(0,T;H)$，$u_0 \in \bar{D}$ のときは u は一意的な p. str. sol. である。

証明　一意性は補題 1.2. による。以下存在について調べる。一般性を失なわずに $\min \varphi = 0$ の場合に帰着できる。変数変換して考えるので記号を導入する。$t \in [0,T]$，$\varepsilon \in]0,T]$ とする。

$$c_\varepsilon(t) = c(t) + \varepsilon, \qquad \xi = \sigma_\varepsilon(t) = \int_0^t c_\varepsilon(\tau)\,d\tau$$

$$\sigma(t) = \int_0^t c(\tau)\,d\tau, \qquad g_\varepsilon(\xi) = c_\varepsilon(t)^{-1}\sqrt{c(t)}\cdot h(t)$$

以下　$C_1, C_2, \cdots, C_5$　は　ε, $t\in[0,T]$, f などによらない定数をあらわすものとする。

Case [1].　　$f\in L^2(0,T;H)$, $u_0\in D$

H. Brézis [1], P.72, 定理3.6. により

$$\frac{d}{d\xi}v_\varepsilon(\xi)+\partial\varphi_\varepsilon(\xi)\ni g_\varepsilon(\xi), \quad v_\varepsilon(0)=u_0 \tag{2.2}$$

は str. sol. をもち、次の不等式を得る。$T_\varepsilon=\sigma_\varepsilon(T)$ とする。

$$\left|\frac{d}{d\xi}v_\varepsilon(\xi)\right|^2+\frac{d}{d\xi}\varphi v_\varepsilon(\xi)=\left(g_\varepsilon(\xi),\frac{d}{d\xi}v_\varepsilon(\xi)\right)\quad \text{a.e on }]0,T_\varepsilon[$$

故に $\forall\xi\in[0,T_\varepsilon]$ に対して、次の不等式を得る。

$$\frac{1}{2}\int_0^\xi\left|\frac{d}{d\sigma}v_\varepsilon(\sigma)\right|^2d\sigma+\varphi v_\varepsilon(\xi)-\varphi u_0\leq\frac{1}{2}\int_0^\xi|g_\varepsilon(\sigma)|^2d\sigma\leq\frac{1}{2}\int_0^T|f(\tau)|^2d\tau$$

従って、$\forall\xi\in[0,T_\varepsilon]$ に対して

$$\int_0^\xi\left|\frac{d}{d\sigma}v_\varepsilon(\sigma)\right|^2d\sigma\leq 2\varphi u_0+\int_0^T|f(\tau)|^2d\tau \tag{2.3}$$

$$0\leq\varphi v_\varepsilon(\xi)\leq\varphi u_0+\frac{1}{2}\int_0^T|f(\tau)|^2d\tau \tag{2.4}$$

次に、$u_\varepsilon(t)=v_\varepsilon(\sigma_\varepsilon(t))$, $t\in[0,T]$ とおくと、$u_\varepsilon(t)$ は

$$\frac{d}{dt}u_\varepsilon(t)+c_\varepsilon(t)\partial\varphi u_\varepsilon(t)\ni\sqrt{c(t)}\,f(t),\quad u_\varepsilon(0)=u_0,\ t\in[0,T] \tag{2.5}$$

の一意的な str. sol である。(2.3) と (2.4) により

$$\int_0^T\left|\frac{d}{d\tau}u_\varepsilon(\tau)\right|^2d\tau\leq C_1 \tag{2.6}$$

$$0\leq\varphi u_\varepsilon(t)\leq C_1\qquad\forall t\in[0,T] \tag{2.7}$$

一方 (2.5) より

$$c_\varepsilon(t)\varphi u_\varepsilon'(t)-c_\varepsilon(t)\varphi u_\varepsilon(t)\geq\left(\sqrt{c(t)}\,f(t)-\frac{d}{dt}u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon'(t)-u_\varepsilon(t)\right) \tag{2.8}$$

$$c_\varepsilon'(t)\varphi u_\varepsilon(t)-c_\varepsilon'(t)\varphi u_\varepsilon'(t)\geq\left(\sqrt{c(t)}\,f(t)-\frac{d}{dt}u_\varepsilon'(t),\ u_\varepsilon(t)-u_\varepsilon'(t)\right) \tag{2.8'}$$

(2.8) と (2.8)' を加える

$$(\varepsilon-\varepsilon')\varphi u_{\varepsilon'}(t) + (\varepsilon'-\varepsilon)\varphi u_\varepsilon(t) \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\varepsilon(t)-u_{\varepsilon'}(t)|^2$$

これを $[0,t]$ で積分して，(2.7) を使うと

$$\frac{1}{2}|u_\varepsilon(t)-u_{\varepsilon'}(t)|^2 \leq 4TC_1\cdot\varepsilon \qquad \forall t\in[0,T],\ \forall 0<\varepsilon'<\varepsilon \quad (2.9)$$

(2.6) と (2.9) により

$$\exists u\in W^{1,1}(0,T;H),\quad u_\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{as } \varepsilon\to 0 \quad \text{in } C([0,T];H)$$

$$\frac{d}{dt}u_\varepsilon \rightharpoonup \frac{du}{dt} \quad \text{as } \varepsilon\to 0 \quad \text{in } L^2(0,T;H)$$

（ここで $\longrightarrow$ は強収束，$\rightharpoonup$ は弱収束をあらわす。）

(2.5) により

$$\int_s^t c_\varepsilon(\tau)\varphi(v)d\tau - \int_s^t c_\varepsilon(\tau)\varphi u_\varepsilon(\tau)d\tau \geq \int_s^t \left(\sqrt{c(\tau)}\,f(\tau)-\frac{du_\varepsilon}{d\tau}(\tau),\ v-u_\varepsilon(\tau)\right)d\tau$$

$$\forall v\in D(\varphi),\quad \forall\, 0\leq s\leq t\leq T.$$

$\varepsilon\to 0$ とすると，$c(t)\varphi u(t)\in L^1(0,T)$ がわかり，次の式をえる。

$$\int_s^t c(\tau)\varphi(v)d\tau - \int_s^t c(\tau)\varphi u(\tau)d\tau \geq \int_s^t \left(\sqrt{c(\tau)}\,f(\tau)-\frac{du}{d\tau}(\tau),\ v-u(\tau)\right)d\tau.$$

$c(t)\varphi u(t)$，$\sqrt{c(t)}\,f(t)$，$\frac{du}{dt}(t)$ の *Lebesgue* 点で考えれば，

$$c(t)\varphi(v) - c(t)\varphi u(t) \geq \left(\sqrt{c(t)}\,f(t)-\frac{du}{dt}(t),\ v-u(t)\right) \qquad \forall v\in D(\varphi)$$

故に，$u(t)$ は (2.1) の str. sol. であり，(2.7) により $u(t)\in D$，$\forall t\in[0,T]$。

Case [2] $\qquad f(t)\in L^1(0,T;H)$，$u_0\in\overline{D}$.

$\exists\{u_0^j\}_{j\geq 1}\subset D$; $u_0^j\longrightarrow u_0$ as $j\to\infty$ in H，かつ $\exists\{f^j\}_{j\geq 1}\subset L^2(0,T;H)$; $f^j\longrightarrow f$ as $j\to\infty$ in $L^1(0,T;H)$。このとき，(2.1) で右辺を f^j，初期値を u_0^j にとり替えた初期値問題の強い解を u^j とする。補題1.2. により $\{u^j\}_{j\geq 1}$ が $C([0,T];H)$ の Cauchy 列であり，その極限値が求める解となる。

Case [3] $\quad f \in L^2(0,T:H)$, $u_0 \in \overline{D}$.

$\exists \{u_0^j\}_{j\geq 1} \subset D$: $u_0^j \to u_0$ as $j \to \infty$ in H.

(イ) $\int_0^t c(\tau)d\tau > 0$. $\forall t \in]0,T]$ の場合

$V_\varepsilon^j(\xi)$ を初期値を u_0^j とする (2.2) の str. sol. とする。 [1] の定理 3.6. により , $\forall \delta \in]0,T]$ に対して

$$\int_{\sigma_\varepsilon(\delta)}^{\sigma_\varepsilon(T)} \left|\frac{d}{d\xi} V_\varepsilon^j(\xi)\right|^2 d\xi \leq (\sqrt{2\sigma(\delta)})^{-1} \cdot C_2 + C_3 . \qquad (2.10)$$

$u_\varepsilon^j(t) = V_\varepsilon^j(\sigma_\varepsilon(t))$. $t \in]0,T]$ とすると , $u_\varepsilon^j(t)$ は初期値を u_0^j とする (2.1) の一意的な str. sol. なることがわかる。 (2.10) により次の評価をえる。

$$\int_\delta^T \left|\frac{d}{dt} u_\varepsilon^j(t)\right|^2 dt \leq (\sqrt{2\sigma(\delta)})^{-1} \cdot C_4 + C_5 .$$

Case [1] の結果により , u^j を初期値 u_0^j なる (2.1) の一意的な解とすると , $u_\varepsilon^j \to u^j$ as $\varepsilon \to 0$ in $C([0,T]:H)$。 Case [1] の最後の方で用いた論法により ,

$$\int_\delta^T \left|\frac{d}{dt} u^j(\tau)\right|^2 d\tau \leq (\sqrt{2\sigma(\delta)})^{-1} \cdot C_4 + C_5 \qquad (2.11)$$

ところで , Case [2] を思い出すと , u を (2.1) の weak sol. とすれば , $u^j \to u$ as $j \to \infty$ in $C([0,T]:H)$ 。 さらに (2.11) に注意すれば , 強い解にもなっていることがわかる。

(ロ) $\delta_0 = \inf\{\delta \in]0,T] : \int_0^\delta c(\tau)d\tau > 0\} > 0$ の場合

$$u(t) = \begin{cases} u_0 & 0 \leq t \leq \delta_0 \\ (2.1) \text{ の weak sol} & \delta_0 \leq t \leq T \end{cases}$$

とおく。 (イ) の結果により $u(t)$ は (2.1) の p. str. sol である。

以下の説明を簡単にする為に、$E(f, u_0)$ により初期値問題

$$\frac{du}{dt} + \partial(c(t)\varphi + I_{\bar{D}})u \ni f, \quad u(0) = u_0$$

をあらわすことにする。

補題2.2. $\forall f \in L^1(0,T;H)$, $\forall u_0 \in \bar{D}$ に対して $E(f, u_0)$ の "弱い解" が存在する。

証明 $N = \{t \in]0,T[\,;\, c(t) = 0\}$, $P = \{t \in]0,T[\,;\, c(t) > 0\}$, $R = P \cup \mathrm{int}\, N$ とおく。仮定 (A.3) により measure $([0,T] - R) = 0$ である。R は開集合であるから、R は高々可算の開集合の disjoint sum としてあらわせる。i.e. $\exists \{]a_i, b_i[\}_{i \geq 1}$, $R = \sum_{i \geq 1}]a_i, b_i[$。$\{i\}$ が有限集合なら証明はより簡単になるので、$\{i\}$ は無限集合として考える。$\{f^i\}_{i \geq 1} \subset L^1(0,T;H)$ を

$$\begin{cases} f^i(t) = f(t) & ; \quad a_j + 2^{-i-1}(b_j - a_j) < t < b_j - 2^{-i-1}(b_j - a_j), \ j = 1, 2, \cdots, i \\ f^i(t) = 0 & ; \quad \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.12}$$

で定義する。明らかに

$$f^i \to f \quad \text{as } i \to \infty \quad \text{in } L^1(0,T;H) \tag{2.13}$$

さて、方程式

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial(c(t)\varphi + I_{\bar{D}})u(t) \ni f^i(t) \tag{2.14}$$

を考えよう。もし $]a_j, b_j[\subset P$ ならば $f^i(t)$ は a_j, b_j の近くで消えているので、補題2.1. を適用でき、$]a_j, b_j[\subset \mathrm{int}\, N$ のときは (2.14) は、そこでは

$$\frac{du^i}{dt}(t) + \partial I_{\overline{D}}\, u^i(t) \ni f^i(t)$$

となる。故に $E(f^i, u_0)$ の一意的な p.weak.sol が存在する。補題1.2.により

$$|u^j(t) - u^k(t)| \leq \int_0^T |f^j(t) - f^k(t)|\,dt, \quad \forall j, k,\ \forall t \in [0,T],$$

が成立する。したがって

$$\exists u \in C([0,T]; H)\ ;\quad u^i \to u \quad \text{as } i \to \infty \quad \text{in } C([0,T]; H). \quad (2.15)$$

補題1.1.により、$\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ に対して

$$\int_{t_1}^{t_2} (c(\tau)\varphi + I_{\overline{D}})\, v(\tau)\,d\tau - \int_{t_1}^{t_2} (c(\tau)\varphi + I_{\overline{D}})\, u^i(\tau)\,d\tau$$
$$\geq \int_{t_1}^{t_2} (f^i(\tau) - \frac{dv}{d\tau}(\tau), v(\tau) - u^i(\tau))\,d\tau + \frac{1}{2}|v(t_2) - u^i(t_2)|^2 - \frac{1}{2}|v(t_1) - u(t_1)|^2$$
$$\forall v \in W^{1,1}(t_1, t_2; \overline{D})\ ;\quad (c(t)\varphi + I_{\overline{D}})\, v(t) \in L^1(0,T).$$

(2.13) と (2.15) により証明を完結する。

次に"弱い解"の一意性を保証する為に一つの補題を示す。

補題 2.3. $u, v \in C([0,T]; H)$ をそれぞれ $E(f, u(0))$, $E(g, v(0))$ の"弱い解"とすると、(1.3) と (1.4) と同じ不等式が成立する。

証明 $u_0 \in \overline{D}$ を固定して、$L^1(0,T; H)$ から $C([0,T]; H)$ への一価作用素 K_{u_0} を、$\forall f \in L^1(0,T; H)$ に対して、$K_{u_0} f =$ 補題2.2.で実際に構成した"弱い解"として定義する。$D(K_{u_0}) = L^1(0,T; H)$。今、$u_1 = K_{u_0} f_1$, $u_2 = K_{u_0} f_2$ とする。補題2.2.の証明により、$\exists \{u_1^i\}_{i \geq 1}$, $\exists \{u_2^i\}_{i \geq 1}$;

u_p^i は $E(f_p^i, u_0)$ の p. weak. sol. であって、$u_p^i \to u_p$ as $i \to \infty$ in $C([0,T];H)$ $p=1,2$。補題1.2. により

$$|u_1^i(t) - u_2^i(t)| \le \int_0^T |f_1^i(\tau) - f_2^i(\tau)| d\tau . \qquad (2.16)$$

$i \to \infty$ とすれば、次の不等式を得る。

$$|u_1(t) - u_2(t)| \le \int_0^T |f_1(\tau) - f_2(\tau)| d\tau \quad \forall t \in [0,T].$$

故に K_{u_0} は $L^1(0,T;H)$ から $C([0,T];H)$ への連続作用素である。$\forall f \in L^1(0,T;H)$ に対して $M_{u_0}f$ により $E(f,u_0)$ の"弱い解"の集合をあらわす。このとき、次の関係が明らかに成立する。

$$D(K_{u_0}) = D(M_{u_0}) = L^1(0,T;H) \ , \quad K_{u_0} \subset M_{u_0}.$$

ところが $M_{u_0} \subset K_{u_0}$ も成立する。実際、$\forall [f_1, u_1] \in M_{u_0}$, $\forall [f, u] \in K_{u_0}$ をとってくる。$\exists \{f_k\}_{k \ge 1} \subset L^2(0,T;H)$; $f_k \to f$ as $k \to \infty$ in $L^1(0,T;H)$。f^i を (2.12) と同じものとし、f_k^i を (2.12) で f の代りに f_k とおいてつくられるものと定義する。補題2.2. の証明によって、$\exists \{u^i\}_{i \ge 1}$; u^i は $E(f^i, u_0)$ の p. weak. sol かつ $u^i \to u$ as $i \to \infty$ in $C([0,T];H)$。しかも、$\exists \{u_k^i\}_{i \ge 1, k \ge 1}$; u_k^i は区間 $0 = t_0^{i,k} < t_1^{i,k} < \cdots < t_{N_{i,k}}^{i,k} = T$ 上の $E(f_k^i, u_0)$ の p. str. sol. かつ $u_k^i \to u^i$ as $k \to \infty$ in $C([0,T];H)$。i, k を固定して、p を $0 < p < 2^{-1} \min\{t_j^{i,k} - t_{j-1}^{i,k} ; j = 1,2,\cdots,N_{i,k}\}$ となるようにとる。簡単の為に $t_j^{i,k}$ を t_j とかくと、次の不等式を得る。

$$\int_{t_j+p}^{t_{j+1}-p} (C(\sigma)\varphi + I_\sigma) u_1(\sigma) d\sigma - \int_{t_j+p}^{t_{j+1}-p} (C(\sigma)\varphi + I_\sigma) u_k^i(\sigma) d\sigma$$
$$\ge \int_{t_j+p}^{t_{j+1}-p} \left(f_k^i - \frac{d}{d\sigma} u_k^i , u_1 - u_k^i\right) d\sigma , \ j = 0,1,\cdots,N_{i,k} \qquad (2.17)$$

一方、$[f_k^i, u_1] \in M_{u_0}$ であるから

$$\int_{t_j+p}^{t_{j+1}-p} (c(\sigma)\varphi + I_{\bar D})\, u_k^i(\sigma)\,d\sigma - \int_{t_j+p}^{t_{j+1}-p}(c(\sigma)\varphi+I_{\bar D})\,u_1(\sigma)\,d\sigma$$
$$\ge \int_{t_j+p}^{t_{j+1}-p}\left(f_1 - \frac{d}{d\sigma}u_k^i,\ u_k^i - u_1\right)d\sigma + \frac12|u_k^i(t_{j+1}-p)-u_1(t_{j+1}-p)|^2$$
$$- \frac12 |u_k^i(t_j+p)-u_1(t_j+p)|^2, \quad j=0,1,\cdots,N_{i,k}-1. \tag{2.18}$$

(2.17) と (2.18) を加えて $p\to0$ とすると

$$0 \ge \int_0^T (f_1 - f_k^i,\ u_k^i - u_1)\,dt + \frac12|u_k^i(T)-u_1(T)|^2 - \frac12|u_k^i(0)-u_1(0)|^2.$$

となるので、$i\to\infty$、$k\to\infty$ とすると

$$\int_0^T (f-f_1,\ u-u_1)\,dt \ge 0 \qquad \forall[f,u]\in K_{u_0},\ \forall [f_1,u_1]\in M_{u_0}. \tag{2.19}$$

を得る。ここで特に、$f=(1-\theta)f_1+\theta h$, $0<\theta<1$, $h\in L^1(0,T;H)$ とおいて、$\theta\to0$ とすると、K_{u_0} の連続性により、

$$\int_0^T(h-f_1,\ K_{u_0}f_1 - u_1)\,dt \ge 0, \qquad \forall h\in L^1(0,T;H).$$

故に $K_{u_0}f_1 = u_1$. よって $M_{u_0}\subset K_{u_0}$ が示された。故に $K_{u_0}=M_{u_0}$。$[f,u]\in K_{u(0)}$, $[g,v]\in K_{v(0)}$ に対して (1.3), (1.4) と同じ不等式が成立することは容易に分るので証明終。

§3. 定理の証明

補題3.1. $\forall f\in L^1(0,T;H)$, $\forall u_0\in\bar D$ に対して (0.1) の"弱い解"が一意的に存在する。

証明　$\exists\{f_k\}_{k\ge1}\subset L^2(0,T;H)$; $f_k\to f$ as $k\to\infty$ in $L^1(0,T;H)$

$\{f_k^i\}_{k\ge1,i\ge1}$ を (2.12) で f の代りに f_k とおいたものとして定義する。$\{t_p^n\}_{p=0,1,\cdots,2^n}$ を $[0,T]$ の分割で $t_p^n = 2^{-n}p\cdot T$ なるもので

$$\varphi_n^t(u) = \varphi^{t_p}(u) \qquad \text{for} \quad t_p^n \le t < t_{p+1} \qquad p=0,1,\cdots,2^n-1.$$

として $\varphi_n^t(\cdot)$ を定義する。 $u_n(t)$, $t_p \le t < t_{p+1}$, $p=0,1,\cdots,2^n-1$ を

$$\frac{d}{dt}u_n(t) + \partial(c(t)\varphi_n^t + I_{\bar{D}})u_n(t) \ni f(t)$$

$$u_n(t_p^n) = \begin{cases} u_0 & \text{if } p=0 \\ u_n(t)\,(t_{p-1}^n \le t \le t_p^n) \text{ の } t=t_p^n \text{ での値}, & \text{if } p=1,\cdots,2^n-1 \end{cases}$$

の一意的な"弱い解"として定義する。 補題2.2, 2.3 により $\{u_n\}_{n\ge1}$ は矛盾なく定義できる。簡単の為に $u_n = S_n(f, u_0)$ とかく。 $\{u_{n,k}\}_{n\ge1, k\ge1}$, $\{u_{n,k}^i\}_{n\ge1, k\ge1, i\ge1}$ をそれぞれ, $u_{n,k} = S_n(f_k, u_0)$, $u_{n,k}^i = S_n(f_k^i, u_0)$ として定義する。補題2.1 により, $u_{n,k}^i$, $t_p^n \le t \le t_{p+1}^n$, は

$$\frac{d}{dt}u_{n,k}^i(t) + \partial(c(t)\varphi_n^t + I_{\bar{D}})u_{n,k}^i(t) \ni f_k^i(t)$$

の p. str. sol. となる。補題2.3. により,

$$|u_{n,k}^i(t) - u_{n,k}(t)| \le \int_0^T |f_k^i - f_k|\,d\sigma, \quad \forall t \in [0,T]$$

であるから, $u_{n,k}^i \to u_{n,k}$ as $i\to\infty$ in $C([0,T]; H)$ となる。
同様にして, $u_{n,k} \to u_n$ as $k\to\infty$ in $C([0,T]; H)$ となる。
$v \in D$ にとると

$$(c(t)\varphi_n^t + I_{\bar{D}})v - (c(t)\varphi_n^t + I_{\bar{D}})u_{n,k}^i$$

$$\ge \left(f_k^i - \frac{d}{dt}u_{n,k}, v - u_{n,k}^i\right) = (f_k^i, v - u_{n,k}) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v - u_{n,k}^i|^2$$

$$\text{a.e on }]0,T[. \qquad (3.1)$$

$u_{n,k}^i$ は連続かつ, 区分的に絶対連続であることと,

$$\exists a_1>0, \exists a_2>0 \;;\; \varphi^t u \ge -a_1|u| - a_2, \quad \forall u\in H, \forall t\in[0,T]$$

であること（[2]を参照）により，(3.1)から次の不等式を得る。ただし，以下現れる定数C_1, C_2, C_3はn, k, i, m, t_1, t_2, t，などには依存しない定数をあらわす。

$$|u_{n,k}^i(t)| \leq C_1 . \tag{3.2}$$

(3.1)と(3.2)により，

$$\int_{t_1}^{t_2} (c(\sigma)\varphi_n^\sigma + I_{\bar{D}})\, u_{n,k}^i(\sigma)\, d\sigma \leq C_2 . \tag{3.3}$$

$u_{m,k}^i$, $u_{n,k}^i$ $(m \geq n)$ は p. str. sol であるから

$$(c(\sigma)\varphi_n^\sigma + I_{\bar{D}})\, u_{m,k}^i - (c(\sigma)\varphi_n^\sigma + I_{\bar{D}})\, u_{n,k}^i$$

$$\geq (f_k^i - \tfrac{d}{d\sigma} u_{n,k}^i,\ u_{m,k}^i - u_{n,k}^i) ,$$

$$(c(\sigma)\varphi_m^\sigma + I_{\bar{D}})\, u_{n,k}^i - (c(\sigma)\varphi_m^\sigma + I_{\bar{D}})\, u_{m,k}^i$$

$$\geq (f_k^i - \tfrac{d}{d\sigma} u_{m,k}^i,\ u_{n,k}^i - u_{m,k}^i) \qquad \text{a.e on }]0,T[.$$

これら２つの不等式を加えて，$[0,t]$上で積分すると，

$$\int_0^t \{ (c(\sigma)\varphi_n^\sigma + I_{\bar{D}})\, u_{m,k}^i(\sigma) - (c(\sigma)\varphi_m^\sigma + I_{\bar{D}})\, u_{m,k}^i(\sigma) \} d\sigma$$

$$+ \int_0^t \{ (c(\sigma)\varphi_m^\sigma + I_{\bar{D}})\, u_{n,k}^i(\sigma) - (c(\sigma)\varphi_n^\sigma + I_{\bar{D}})\, u_{n,k}^i(\sigma) \} d\sigma$$

$$\geq \frac{1}{2} |u_{m,k}^i(t) - u_{n,k}^i(t)|^2 , \qquad \forall t \in [0,T] \tag{3.4}$$

(3.2), (3.3), (3.4), と (A−2) により，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，n_0を十分大にとれば，次の不等式をえる。

$$|u_{m,k}^i(t) - u_{n,k}^i(t)| \leq \sqrt{\varepsilon}\, C_3 , \quad \forall m \geq n \geq n_0 , \ \forall t \in [0,T].$$

故に，$i \to \infty$，$k \to \infty$ として

$$|u_m(t) - u_n(t)| \leq \sqrt{\varepsilon}\, C_3 , \quad \forall m \geq n \geq n_0 , \ \forall t \in [0,T]$$

故に，$\exists u \in C([0,T] : H)$;

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{as } n \to \infty \qquad \text{in } C([0,T]:H) \qquad (3.6)$$

(3.2)と(3.3)により

$$|u_n(t)| \le C_1 \qquad\qquad \forall n, t \in [0,T] \quad (3.7)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (c(\sigma)\varphi_n^\sigma + I_{\bar{D}})u_n(\sigma)\,d\sigma \le C_2, \quad \forall n, \forall 0 \le t_1 \le t_2 \le T. \quad (3.8)$$

したがって、$u_n(t) \in C([0,T]:\bar{D})$, $(c(t)\varphi_n^t + I_{\bar{D}})u_n(t) \in L^1(0,T)$ であり、任意の $0 \le t_1 \le t_2 \le T$ に対して

$$\int_{t_1}^{t_2}(c(\sigma)\varphi_n^\sigma + I_{\bar{D}})v(\sigma)\,d\sigma - \int_{t_1}^{t_2}(c(\sigma)\varphi_n^\sigma + I_{\bar{D}})u_n(\sigma)\,d\sigma$$

$$\ge \int_{t_1}^{t_2}\Big(f(\sigma) - \frac{dv}{d\sigma}(\sigma), v(\sigma) - u_n(\sigma)\Big)d\sigma + \frac{1}{2}|v(t_2) - u_n(t_2)|^2 - \frac{1}{2}|v(t_1) - u_n(t_1)|^2$$

$$\forall v \in W^{1,1}(t_1,t_2:\bar{D}) ; \ (c(t)\varphi^t + I_{\bar{D}})v(t) \in L^1(t_1,t_2:H).$$

(3.6), (3.7), (3.8) と (A-2) を使って、$n \to \infty$ としてみれば"弱い解"の存在がわかる。

"弱い解"の一意性は次の補題からわかる。

補題3.2. $f, g \in L^1(0,T:H)$ とし、u, v をそれぞれ(1.1), (1.2)の"弱い解"とすると、(1.4), (1.5)と同じ不等式が成立する。

証明　$u_0 \in \bar{D}$ を固定して、$L^1(0,T:H)$ から $C([0,T]:H)$ への一価作用素 K_{u_0} を、$\forall f \in L^1(0,T:H)$ に対して, $K_{u_0}f$ = 補題3.1. で実際に構成した"弱い解"として定義する。$D(K_{u_0}) = L^1(0,T:H)$。補題2.3. により、補題2.3. の証明と同様にして、K_{u_0} が連続作用素なることがわかる。$\forall f \in L^1(0,T:H)$ に対して、$M_{u_0}f$

により (*) の"弱い解"の集合をあらわすことにする。このとき、 $\mathcal{D}(K_{u_0}) = \mathcal{D}(M_{u_0}) = L^1(0,T;H)$, $K_{u_0} \subset M_{u_0}$.
補題2.3.の証明と同様に、補題3.1.で実際に構成された"弱い解"は p. str. sol. で近似されるということと、(A-2) を使えば、

$$\int_0^T (f - f_1, u - u_1)\,d\sigma \geq 0, \quad \forall [f,u] \in K_{u_0}, \forall [f_1,u_1] \in M_{u_0}$$

がわかる。以下補題2.3.の最後の部分と同様にして結論をうる。

文献

[1] H. Brézis : Opérateurs maximaux monotone, North-Holland (1973).

[2] H. Attouch et Damlamian : Problémes dévolution dans Les Hilbert et application, J. Math. pure. et appl., 54 (1975) 53-74.

[3] N. Kenmochi and T. Nagai : Weak solutions for certain nonlinear time-dependent parabolic variational inequalitiés, Hiroshima Math. J., 5, (1975), 525-535.

[4] K. Maruo : On some evolution equations of sub-differential operators, Proc. Japan Acad., 51 (1975) 304-307.

[5] J. Watanabe : On certain nonlinear evolution equations, J. Math. Soc. Japan., 25 (1973), 446-463.

[6] A. Friedman and Shuss : Degenerate evolution equations in Hilbert space, Trans. Amer. Math. Soc., 161 (1971), 401 - 427.