数理解析研究所講究録
第264巻 1976年 144-155

非線型非縮小半群について

神戸大 理　山田直記

0. 序

非線型半群論は従来，縮小半群を与える作用素(accretive or dissipative operator)を研究の対象としてきた．空間変数に関してLipschitzの条件; $\|G(t)x-G(t)y\| \leq M\|x-y\|$, を満たす非線型半群$G(t)$を生成する問題はあまり取扱われなかったように思われる．M.IannelliはR-differentiable operatorの概念を導入してこのような半群$G(t)$を構成した．今，彼の結果を述べ，それに関連した一結果を述べる．

1. R-differentiable operators

M.Iannelliの取扱った作用素は次のようなものである．以下XはBanach空間とする．作用素 $A:D(A)\subset X \longrightarrow X$ は，次の条件を満たすとする: $A0=0$，すべての$\lambda>0$に対して$R(I+\lambda A)=X$，かつすべての$x,y\in X$に対して

$$\|(I+\lambda A)^{-1}x-(I+\lambda A)^{-1}y\|\le M\|x-y\| \quad (M\geqq 1).$$

$J_\lambda=(I+\lambda A)^{-1}$ が X の各点で Fréchet微分可能であるとする．$x\in D(A)$に対して，$F(\lambda)$で $x+\lambda Ax$ における J_λ の Fréchet 微分（$J_\lambda'[x+\lambda Ax]$）を表わす．$F(\lambda)$ は X の有界線型作用素で *first resolvent equation*；$\lambda F(\lambda)-\mu F(\mu)=(\lambda-\mu)F(\lambda)F(\mu)$，を満たすことがわかる．一般に *first resolvent equation* を満たす線型作用素に対して，それを *resolvent* とするような線型作用素が存在することが知られているので，$F(\lambda)=(I+\lambda A'[x])^{-1}$ となる線型作用素 $A'[x]$ が定義される．

定義 1.1.　上の様な作用素 A を *R-differentiable operator* と呼び，このとき $A'[x]$ を $x\in D(A)$ での A の *R-derivative* という．

2. M. Iannelli の結果

比較のために M. Iannelli の結果を述べる．

定理 2.1.（[4], Theorem 3.1）　A を *R-differentiable operator* とし，*R-derivative* $A'[x]$ について

(S)　任意有限個の $\{x_1,\cdots,x_n\}\subset D(A)$ と $\lambda>0$ に対して

$$\Big\|\prod_{i=1}^{n}(I+\lambda A'[x_i])^{-1}\Big\|\le M$$

とするならば，$x\in\overline{D(A)}$ に対して

$$G(t)x=\lim_{n\to\infty}\Big(I+\frac{t}{n}A\Big)^{-n}x$$

が存在して，次を満たす．

(i) $G(t)G(s) = G(t+s), \quad G(0) = I,$

(ii) $\lim_{t \downarrow 0} G(t)x = x \quad x \in \overline{D(A)},$

(iii) $\| G(t)x - G(t)y \| \le M \| x - y \| \quad x, y \in \overline{D(A)}.$

注意 2.2.　A が稠密な定義域をもつ閉線型作用素の場合には，すべての $x \in D(A)$ に対し $A'[x] = A$ であるから，上記の条件(S)は Hille-Yosida の定理の仮定; $\| (I + \lambda A)^{-n} \| \le M$, に相当する．

定理2.3.（[3], Theorem 5.1）　A は R-differentiable で，R-derivative $A'[x]$ は次の条件を満たすとする．

(S′)　◦ mapping $x \longmapsto J'_\lambda[x]$ は強連続，

◦任意有限個の $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset D(A)$ と $\lambda > 0$ に対して

$$\| \prod_{i=1}^{n} (I + \lambda A'[x_i])^{-1} \| \le M.$$

(K)　◦すべての $x \in D(A)$, $\|x\| \le r$ に対し $A'[x]$ は sector $\Sigma = \{ |\arg t| \le \theta ;\ t \ne 0,\ 0 < {}^{\exists}\theta < \pi/2 \}$ での解析的半群 $e^{tA'[x]}$, $\| e^{tA'[x]} \| \le M(r)$ の生成作用素である．

◦ $D(A'[x])$ は $x \in D(A)$ に依らず一定で，すべての $x_1, x_2, y \in D(A)$, $\|x_1\|, \|x_2\|, \|y\| \le r$ に対し

$$\| (A'[x_1] - A'[x_2]) A'[y]^{-1} \| \le K(r) \| x_1 - x_2 \|$$

が成立する．ここに $M(\cdot), K(\cdot)$ は r で定まる定数．

このとき，以下の性質を持つ X 上の半群 $G(t)$ が唯一意に存在する:

- 定理2.1の(i), (ii) 及び (iii).

(iv) $G(t)$ はすべての $x \in D(A)$ で, すべての $y \in D(A)$ の方向に Gâteaux 微分可能.

(v) 任意の $x \in D(A)$ に対し, $u(t) = G(t)x$ は初期値問題

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \qquad u(0) = x$$

の解である.

3、結果

$A'[x]$ の stability について, T. Kato [5] のような hyperbolic type の条件を考える.

定理3.1. A は R-differentiable で, その R-derivative $A'[x]$ は次の条件を満たすとする.

(S) 任意有限個の $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset D(A)$ と $\lambda > 0$ に対し

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} (I + \lambda A'[x_i])^{-1} \right\| \leq M.$$

(S_1) X に稠密にかつ連続的に埋込まれた Banach 空間 Y が存在して, 任意有限個の $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset D(A)$ と $\lambda > 0$ に対して, $(I + \lambda A'[x_1])^{-1}(Y) \subset Y$ かつ

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} (I + \lambda A'[x_i])^{-1} \right\|_Y \leq M_1.$$

(S_2) $Y \subset D(A)$ かつすべての $x, y \in D(A)$ に対し $Y \subset D(A'[x])$,

$$\| A'[x] - A'[y] \|_{Y,X} \leq M_2 \| x - y \|$$ が成立する.

ここに $\|\cdot\|_Y$, $\|\cdot\|_{Y,X}$ は各々 $B(Y, Y)$, $B(Y, X)$ の norm を表す.

このとき，定理2.1により存在する半群 $G(t)$ について

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}(G(t)y-y)=-Ay \qquad y\in Y$$

が成立する．

注意3.2．　(S_2) で "$Y\subset D(A)$" の仮定がなくても，他の仮定から "$D(A)$ が X で稠密" であることがわかる．実際，$y\in Y$ に対して

$$\begin{aligned}J_\lambda y &= \int_0^1 J_\lambda'[\sigma y]y\,d\sigma\\ &= y-\int_0^1 \lambda A'[J_\lambda\sigma y](I+\lambda A'[J_\lambda\sigma y])^{-1}y\,d\sigma\end{aligned}$$

より $\lim_{\lambda\downarrow 0}J_\lambda y=y$ が従う．依って $Y\subset\overline{D(A)}$ だから $D(A)$ は X で稠密である．

注意3.3．　定理3.1の仮定は [5] Theorem 4.1 の仮定と類似している．これについては更に定理4.2，注意4.3参照．

4. 定理3.1の証明

$G_n(t)=(I+\frac{t}{n}A)^{-n}$ を形式的に Fréchet 微分して，積分すれば

$$\begin{aligned}G_n(t)x &= \int_0^1 G_n'(t)[\sigma x]x\,d\sigma\\ &= \int_0^1\prod_{i=1}^{n}(I+\tfrac{t}{n}A'[(I+\tfrac{t}{n}A)^{-i}\sigma x])^{-1}x\,d\sigma\end{aligned}$$

であるから，右辺の被積分函数に極限が存在すれば $G(t)$ はその極限で積分表示できるであろうと考えられる．

この方針を実現するために，いくつかの補題を用意する．

$T>0$ に対して $C(T)=C([0,T]\times[0,1];X)$ は $[0,T]\times[0,1]$ で定義されて X に値をとる連続函数の全体を表わす．$u\in C(T)$ と零数列 $\{\lambda_n\}$ に対して，u の近似列 $\{u_n\}$ で次の条件を満たすものが選べる；

$$\begin{cases} u_n(t,\sigma)=u_n(i\lambda_n,j\lambda_n)\in D(A) & \text{if } \begin{array}{l} i\lambda_n\le t<(i+1)\lambda_n \\ j\lambda_n\le\sigma<(j+1)\lambda_n \end{array} \\ \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{(t,\sigma)\in[0,T]\times[0,1]}\|u_n(t,\sigma)-u(t,\sigma)\|=0. \end{cases}$$

以下，単に $u\in C(T)$ の近似列といえばこの性質をもつとする．

補題 4.1.　$u\in C(T)$ とその近似列 $\{u_n\}$ に対し，

$$U\{u,\sigma\}(t,0)x=\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\lambda_n\to t}}\prod_{i=1}^{n}(I+\lambda_nA'[u_n(i\lambda_n,\sigma)])^{-1}x$$

がすべての $x\in X$ に対して存在する．更に $u,v\in C(T)$ と $y\in Y$ に対し，

$$\sup_{(t,\sigma)\in[0,T]\times[0,1]}\|U\{u,\sigma\}(t,0)y-U\{v,\sigma\}(t,0)y\|$$
$$\le MM_1M_2T\|y\|_Y\sup_{(t,\sigma)\in[0,T]\times[0,1]}\|u(t,\sigma)-v(t,\sigma)\|$$

が成立する．特にこの不等式から $U\{u,\sigma\}$ は u の近似列 $\{u_n\}$ の選び方に依らないで定義されることがわかる．

証明.　$y\in Y$, $m\le n$ に対して次の等式を得る．

$$\prod_{i=1}^{m}(I+\lambda A'[u_m(i\lambda,\sigma)])^{-1}y-\prod_{i=1}^{n}(I+\mu A'[u_n(i\mu,\sigma)])^{-1}y \tag{4.1}$$
$$=\sum_{i=1}^{m-1}\beta^{n-i}\alpha^{i}\Big(\sum_{(m-i,0)}^{(m,n)}\prod_{p=1}^{n}(I+\mu A'[u_n(c_p\lambda,\sigma)])^{-1}\Big)\prod_{i=1}^{m-i}(I+\lambda A'[u_m(i\lambda,\sigma)])^{-1}y$$
$$+\sum_{i=m}^{n}\alpha^{m}\beta^{i-m}\Big(\sum_{(1,n-i+1)}^{(m,n)}\prod_{p=1}^{i-1}(I+\mu A'[u_n(c_p\lambda,\sigma)])^{-1}\Big)(I+\mu A'[u_n(\lambda,\sigma)])^{-1}$$
$$\times\prod_{i=1}^{n-i}(I+\mu A'[u_n(i\mu,\sigma)])^{-1}y$$

$$+\mu\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{(m-1)\wedge j}\beta^{j-i}\alpha^{i}\Big(\sum_{(m-i,n-j)}^{(m,n)}\prod_{p=1}^{j}\big(I+\mu A'[u_n(c_p\lambda,\sigma)]\big)^{-1}\Big)$$

$$\times\big(I+\mu A'[u_n((m-i)\lambda,\sigma)]\big)^{-1}\big\{A'[u_n((n-j)\mu,\sigma)]-A'[u_m((m-i)\lambda,\sigma)]\big\}$$

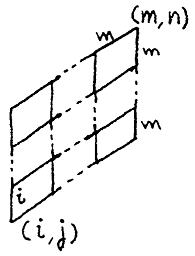
$$\times\prod_{k=1}^{n-j}\big(I+\mu A'[u_n(k\mu,\sigma)]\big)^{-1}y.$$

ここに　$j\wedge i=\min\{j,i\}$，$\alpha=\mu/\lambda$，$\alpha+\beta=1$ であって，記号 $\sum_{(i,j)}^{(m,n)}$ は次を満たす $\{c_p\}$ の全体に関する和を表わす:

$$1\le p\le n-j,\qquad c_p\in\{m,m-1,\cdots,i\},$$

$$c_1=m,\quad c_{n-j}=i+1\ \text{又は}\ i,\qquad c_p\le c_{p-1}+1.$$

$\sum_{(i,j)}^{(m,n)}$ の意味については，次のように考えるとよい:　格子点 (k,l) $(k\ge 1, l\ge 1)$ と $(k-1,l-1)$ 又は $(k,l-1)$ を結ぶ2本の線分を共に k-線分と名付けた時，(m,n) から (i,j) に至る(名付られた線分を通る)最短の折れ線を線分の名前を並べて $\{c_1,\cdots\cdots c_{n-j}\}$ のように表わす. $\sum_{(i,j)}^{(m,n)}$ はその $\{c_p\}$ の全体についての和である: 従って $\sum_{(i,j)}^{(m,n)}$ は $\binom{n-j}{m-i}$ 個の項を含む.



(4.1) は本質的には M.Crandall-A.Pazy [2] (2.19) と同じである. [2] では $(I+\lambda A'[x])^{-1}$ は縮小写像であったから，norm評価の形で (2.19) を得たが，我々の場合線型性を用いて等式 (4.1) を得る. ここで $y\in Y$ に注意して，両辺の norm を [2] と同様の手法によって評価すれば $U\{u,\sigma\}$ の存在が示される.

次の不等式を示すには，

(4.2)　$$\Big\|\prod_{i=1}^{n}\big(I+\lambda_n A'[u_n(i\lambda_n,\sigma)]\big)^{-1}y-\prod_{i=1}^{n}\big(I+\mu_n A'[v_n(i\mu_n,\sigma)]\big)^{-1}y\Big\|$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \| \prod_{i=j}^{n} (I+\lambda_n A'[u_n(i\lambda_n,\sigma)])^{-1} \prod_{i=1}^{j-1} (I+\mu_n A'[v_n(i\mu_n,\sigma)])^{-1} y$$
$$- \prod_{i=j+1}^{n} (I+\lambda_n A'[u_n(i\lambda_n,\sigma)])^{-1} \prod_{i=1}^{j} (I+\mu_n A'[v_n(i\mu_n,\sigma)])^{-1} y \|$$
$$\le M M_1 \|y\|_Y \sum_{j=1}^{n} \| \lambda_n A'[u_n(j\lambda_n,\sigma)] - \mu_n A'[v_n(j\mu_n,\sigma)] \|_{Y,X}$$

において $n\to\infty$, $n\lambda_n \to t$, $n\mu_n \to t$ とすればよい.

この等式(4.1)を用いれば, [5] Theorem 4.1 の別証明が可能である. 即ち次の定理を得る.

定理4.2. $\{A(t)\}_{0\le t\le T}$ はBanach空間 X で稠密な定義域 $D(A(t))$ を持つ閉線型作用素の族で, $\lambda>0$ に対し $(I+\lambda A(t))^{-1}$ が存在して次の条件を満たすとする.

(i) 任意有限個の $0\le t_1 \le \cdots \le t_n \le T$ と $\lambda>0$ に対して

$$\| \prod_{i=1}^{n} (I+\lambda A(t_i))^{-1} \|_X \le K_1 .$$

(ii) X に稠密にかつ連続的に埋込まれたBanach空間 Y が存在して, すべての $t\in[0,T]$, $\lambda>0$ に対して

$$(I+\lambda A(t))^{-1}(Y) \subset Y,$$

かつ任意有限個の $0\le t_1\le \cdots \le t_n \le T$ と $\lambda>0$ に対して

$$\| \prod_{i=1}^{n} (I+\lambda A(t_i))^{-1} \|_Y \le K_2 .$$

(iii) $Y \subset D(A(t))$ がすべての $t\in[0,T]$ に対して成立し, $\|A(t)\|_{Y,X}$ は t について連続である.

このとき次の様な X 上の発展作用素 $U(t,s)$ が存在する.

(a) $$U(t,s)x = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(I+\frac{t-s}{n} A\left(s+i\frac{t-s}{n}\right)\right)^{-1} x \qquad x\in X,$$

(b) $$U(t,r)U(r,s) = U(t,s) \qquad 0\le s\le r\le t\le T,$$

$$U(t,t)=I, \qquad \|U(t,s)\|_X \le K_1,$$

(c) $U(t,s)$ は (t,s), $0\le s\le t\le T$ について強連続,

(d) $D_t^+ U(t,s)y|_{t=s} = -A(s)y \qquad y\in Y,\ 0\le s<T,$

(e) $(\partial/\partial s)U(t,s)y = U(t,s)A(s)y \qquad y\in Y,\ 0\le s\le t\le T.$

ここに D_t^+ は X の強位相での右微分を表わす.

注意4.3. Y が非回帰的のとき [5] Theorem 4.1 では (iii) のところで $(I+\lambda A(t))^{-1}(Y)$ が Y で稠密であることが更に仮定されていた(admissibility)が, 我々のように $U(t,s)$ を構成するには, この仮定は不要である. しかし, (b)−(e) を満たす発展作用素の一意性を得ようとすれば, 矢張, 稠密性が必要であると思われる.

証明. (a)−(c) は等式(4.1)と[2]の手法により示される. (d),(e) を示すには $\{\tilde{A}(t)\}$ を定理の仮定を満たすもう一つの族で, X, Y は共通, 定数を $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2$ とする. $\tilde{U}(t,s)$ を $\{\tilde{A}(t)\}$ から(a)の式で構成された発展作用素とする. $y\in Y$ に対して

$$\begin{aligned}
&\Big\|\prod_{i=1}^{n}\Big(I+\frac{t-s}{n}A\Big(s+i\frac{t-s}{n}\Big)\Big)^{-1}y-\prod_{i=1}^{n}\Big(I+\frac{t-s}{n}\tilde{A}\Big(s+i\frac{t-s}{n}\Big)\Big)^{-1}y\Big\|\\
&\le\sum_{j=1}^{n}\Big\|\prod_{i=j}^{n}\Big(I+\frac{t-s}{n}A\Big(s+i\frac{t-s}{n}\Big)\Big)^{-1}\prod_{i=1}^{j-1}\Big(I+\frac{t-s}{n}\tilde{A}\Big(s+i\frac{t-s}{n}\Big)\Big)^{-1}y\\
&\qquad-\prod_{i=j+1}^{n}\Big(I+\frac{t-s}{n}A\Big(s+i\frac{t-s}{n}\Big)\Big)^{-1}\prod_{i=1}^{j}\Big(I+\frac{t-s}{n}\tilde{A}\Big(s+i\frac{t-s}{n}\Big)\Big)^{-1}y\Big\|\\
&\le K_1\tilde{K}_2\|y\|_Y\,\frac{t-s}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\|\tilde{A}\Big(s+j\frac{t-s}{n}\Big)-A\Big(s+j\frac{t-s}{n}\Big)\Big\|_{Y,X}
\end{aligned}$$

であるから, $n\to\infty$ として

$$\|U(t,s)y-\tilde{U}(t,s)y\|\le \text{const.}\int_s^t\|\tilde{A}(r)-A(r)\|_{Y,X}\,dr$$

を得る．これは [5], (4.5) であるから (d), (e) が示される．

さて，本論にもどって，

補題 4.4. $u \in C(T)$ に対し，補題4.1で定義された $U\{u, \sigma\}(t, 0)x$ は $x \in X$ に対して $C(T)$ に属する．

証明. $\sigma \in [0, 1]$ を固定するとき，$U\{u, \sigma\}(t, 0)x$ の t に関する連続性は定理4.2による．(4.2) と同様の評価をすれば，t に一様に σ について連続であることも容易である．

定義 4.5. $u \in C(T)$ とその近似列 $\{u_n\}$ に対して，

$$(G\{T, x\}u)(t, s) = \int_0^s U\{u, \sigma\}(t, 0)x \, d\sigma$$

$$(G_n\{T, x\}u)(t, s) = \int_0^s \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_n A'[u_n(i\lambda_n, \sigma)])^{-1} x \, d\sigma$$

と定義する．補題4.4より $G\{T, x\}$ は $C(T)$ を $C(T)$ 自身に写す．次の補題は容易に示すことができる．

補題 4.6. $u \in C(T)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(t,s)\in[0,T]\times[0,1]} \|(G\{T, x\}u)(t, s) - (G_n\{T, x\}u)(t, s)\| = 0.$$

補題 4.7. $(t, s) \in [0, T] \times [0, 1]$ と $y \in Y$ に対し

$$u(t, s) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\lambda_n \to t}} (I + \lambda_n A)^{-n} sy$$

とおく．$u(t, s)$ が存在して $C(T)$ に属することは定理2.1に依る．このとき

$$(G\{T, y\}u)(t, s) = u(t, s)$$

が成立する．

証明.

$$g_n(t,\sigma) = (I+\lambda_n A)^{-i}_{\sigma} y \qquad \text{if} \quad \begin{matrix} i\lambda_n \le t < (i+1)\lambda_n \\ 0 \le \sigma \le 1 \end{matrix}$$

とおく. $g_n(t,\sigma)$ を σ で微分して $[0,S]$ で積分すれば

$$\begin{aligned} g_n(t,\sigma) &= \int_0^S \prod_{j=1}^{i} (I+\lambda_n A'[(I+\lambda_n A)^{-j}_{\sigma} y])^{-1} y \, d\sigma \\ &= (G_n\{T,y\} g_n)(t,s) \end{aligned}$$

を得る. この両辺で $n \to \infty$ とすればよい.

この表現式が最初目指したものであったから, 以上の準備の下に定理3.1を証明することができる. まず,

$$\text{(4.3)} \qquad Ay = \int_0^1 A'[\sigma y] y \, d\sigma \qquad y \in Y,$$

が成立することを示す. 実際, $A_\lambda = (1/\lambda)(I-(I+\lambda A)^{-1})$ (Yosida 近似) とおくと

$$\begin{aligned} A_\lambda y &= \int_0^1 (A_\lambda)'[\sigma y] y \, d\sigma \\ &= \int_0^1 (1/\lambda)(I-(I+\lambda A'[J_\lambda \sigma y])^{-1}) y \, d\sigma \\ &= \int_0^1 (I+\lambda A'[J_\lambda \sigma y])^{-1} A'[\sigma y] y \, d\sigma \\ &\quad + \int_0^1 (I+\lambda A'[J_\lambda \sigma y])^{-1} (A'[J_\lambda \sigma y] - A'[\sigma y]) y \, d\sigma \end{aligned}$$

を得る. 右辺第二項は $\lambda \to 0$ のとき 0 に収束する. 一方, $z \in Y$ に対して

$$\| (I+\lambda A'[J_\lambda \sigma y])^{-1} z - z \| \le \text{const.}\, \lambda$$

であることと, Y の稠密性によって

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} (I+\lambda A'[J_\lambda \sigma y])^{-1} x = x \qquad x \in X$$

が成り立つから右辺第一項は収束する. A は閉作用素だから

(4.3) が示される. 次に, $y \in Y$ に対し

$$D_t^+ U\{u, \sigma\}(t, 0) y |_{t=0} = -A'[\sigma y] y$$

が成立する. これは定理 4.2(d) に他ならない. 故に

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(G(t)y - y) = \int_0^1 -A'[\sigma y] y \, d\sigma$$

$$= -Ay \qquad y \in Y,$$

を得る. これで定理 3.1 は証明された.

References

[1] M. G. Crandall and T. M. Liggett: Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces, Amer. J. Math., 93, 265 - 298 (1971).

[2] M. G. Crandall and A. Pazy: Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Israel J. Math., 11, 57 - 94 (1972).

[3] M. Iannelli: Opérateurs dérivables et semi-groupes non-linéaires non-contractifs, J. Math. Anal. Appl., 46, 700 - 724 (1974).

[4] M. Iannelli: Quelques remarques sur les semi-groupes non-linéaires non-contractifs, Lincei - Rend. Sc. fis. mat. e nat., 54, 452 - 456 (1973).

[5] T. Kato: Linear evolution equations of "hyperbolic" type, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 17, 241 - 258 (1970).

[6] N. Yamada: On a nonlinear noncontractive semigroup, to appear.