数理解析研究所講究録
第 264 巻 1976 年 156-175

$\frac{du}{dt} + \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t)$ について

東大・教養　大谷 光春

§1. 序

H を実ヒルベルト空間，φ を H から $(-\infty,+\infty]$ への $\varphi \not\equiv +\infty$ なる，下半連続凸関数（これを，以下，p.l.s.c.f. と記す。）とし，

$$D(\varphi) = \{ u \in H ;\ \varphi(u) < +\infty \}$$

$$\partial\varphi(u) = \{ f \in H ;\ \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v-u), \text{for } \forall v \in D(\varphi) \}$$

$$D(\partial\varphi) = \{ u \in H ;\ \partial\varphi(u) \neq \phi \}$$

とおくと，$\partial\varphi$ は φ の Subdifferential と呼ばれ，H での maximal monotone operator になる，（[1] 参照）。

さて，ここで次のコーシー問題を考えよう，

(1.1)　$\frac{du}{dt} + \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t)$，$t \in [0,T]$.

(1.2)　$u(0) = u_0$

但し、(1.1) の意味は、$g^i(t) \in \partial\varphi^i(u(t))$, for a.a. $t \in [0,T]$, なる $g^i(t)$, $(i=1,2)$, が存在して、(1.1)′ を満す事である。

(1.1)′ $$\frac{du}{dt} + g^1(t) - g^2(t) = f(t) \quad , \text{for a.a. } t \in [0,T] .$$

[定義 1-1] $u(t) \in C([0,T]; H)$ が (1.1)~(1.2) の強解であるとは、$u(t)$ が $]0,T]$ で絶対連続であり、$u(0) = u_0$ かつ (1.1)′ を満す、$g^i(t) \in \partial\varphi^i(u(t))$ が存在する事である。

我々は、これから (1.1)~(1.2) の強解の存在について、論ずる訳であるが、$\partial\varphi^2 \equiv 0$ の時は、良く知られている様に、H. Brézis [1], [2] 等によって、詳しく研究されており，又，$\partial\varphi^1$ が線型，$\partial\varphi^2$ が gradient operator の場合には、M. Tsutsumi [8] の研究がある。

§2. 定理 I (爆発現象のない場合)

一般に、(1.1)~(1.2) type の方程式の解は、有限時間で $|u(t)|_H$ が $+\infty$ になる場合がある事が知られている，([3], [7] 参照)。この節では、その様な爆発現象のおきない場合を取扱う。次の仮定をおく。

(A.1) 任意の正数 $L<+\infty$ に対して，$\{u\in H;\ \varphi^1(u)\leq L\}$ は、H で precompact。

(A.2) (i) 又は (ii) が成立する。

(i) $D(\varphi^1)\subset D(\partial\varphi^2)$ かつ $|\overset{\circ}{\partial}\varphi^2(u)|_H\leq M(\varphi^1(u))$, for $\forall u\in D(\varphi^1)$.

(ii) $D(\partial\varphi^1)\subset D(\partial\varphi^2)$ かつ $|\overset{\circ}{\partial}\varphi^2(u)|_H\leq K\cdot|\overset{\circ}{\partial}\varphi^1(u)|_H+M(\varphi^1(u))$,

$0<K<1$, for $\forall u\in D(\partial\varphi^1)$.

(A.3) $\varphi^2(u)\leq K\cdot\varphi^1(u)+C$, $0\leq K<1$, for $\forall u\in D(\varphi^1)$.

但し、$\overset{\circ}{\partial}\varphi^i$ は $\partial\varphi^i$ の minimal section , $M(\cdot)$ は $[0,+\infty)$ 上の locally bounded な単調増加関数，C は u に依らない、定数。　更に，この小論を通じて，$\varphi^i(u)\geq 0$, for $\forall u\in H$ ，と（一般性を失う事なく）仮定する。

［定理 2-1］　(A.1)～(A.3) の仮定のもとに，任意の $u_0\in D(\varphi^1)$, $f(t)\in L^2(0,T;H)$ に対して，次の (2.1)～(2.3) を満す．(1.1)～(1.2) の強解が．(少なくとも1つ) 存在する。

(2.1) $\dfrac{du}{dt}\in L^2(0,T;H)$

(2.2) $\varphi^i(u(t))$ は $[0,T]$ で絶対連続，$(i=1,2)$.

(2.3) $g^i(t)\in L^2(0,T;H)$, $(i=1,2)$.

まず，次の2つの補題を準備しよう，(証明は [2] 参照。).

[補題 2-2]　φ を H 上の p.l.s.c.f. とし，

(2.4)　$\varphi_\lambda(u) = \inf_{v \in H} \{ \frac{1}{2\lambda}|u-v|_H^2 + \varphi(v) \}$，$\lambda > 0$，とおけば

φ_λ は H 上の Fréchet 微分可能な凸関数となり，φ_λ の subdifferential $\partial(\varphi_\lambda)$ は、$\partial\varphi$ の Yosida 近似 $(\partial\varphi)_\lambda = 1/\lambda \cdot (I - (I+\lambda\partial\varphi)^{-1})$ と一致し、更に、

(2.5)　$\varphi_\lambda(u) \nearrow \varphi(u)$，as $\lambda \searrow 0$，for $\forall u \in H$.

[補題 2-3]　$u(t)$ 及び $\frac{du}{dt}(t)$ が共に $L^2(0,T;H)$ に属し，$g(t) \in L^2(0,T;H)$ かつ $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$，for a.a. $t \in [0,T]$，なる $g(t)$ が存在すれば，$\varphi(u(t))$ は $[0,T]$ 上で絶対連続となり，更に，$\mathcal{L} = \{ t \in [0,T]；u(t), \varphi(u(t))$ が t で絶対連続かつ $u(t) \in D(\partial\varphi) \}$ に対して次式が成立する。

(2.6)　$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = (h(t), \frac{du}{dt}(t))$，for $\forall t \in \mathcal{L}$，$\forall h(t) \in \partial\varphi(u(t))$.

<u>定理2-1 の証明</u>：　まず、(1.1)~(1.2) を次の方程式で近似する。

(2.7)　$\frac{du_\lambda}{dt} + \partial\varphi^1(u_\lambda(t)) - \partial\varphi_\lambda^2(u_\lambda(t)) \ni f(t)$，$t \in [0,T]$.

(2.8)　$u_\lambda(0) = u_0$

$\partial\varphi_\lambda^2$ はリプシッツ連続であるから，(2.7)~(2.8) の強解 $u_\lambda(t)$ は、(一意的に) 存在して，(2.1)~(2.3) に相当する性質

を持っている。 $\lambda \searrow 0$ とした時に，$u_\lambda(t)$ の極限として $(1.1)\sim(1.2)$ の強解を求めようという訳である。

まず、(2.7) の両辺に $\frac{du_\lambda}{dt}$ をかけて $[0,t]$ で積分すれば，補題 2-3, 2-2. を使って，

$$(2.9)\quad \int_0^t \left|\frac{du_\lambda}{dt}(s)\right|^2 ds + \varphi^1(u_\lambda(t)) - \varphi^2(u_\lambda(t)) \leqq \varphi^1(u_0) + \int_0^t \left|\frac{du_\lambda}{dt}(s)\right| \cdot |f(s)|\, ds$$

更に，(A.3) を用いれば，

$$(2.10)\quad \int_0^t \left|\frac{du_\lambda}{dt}(s)\right|^2 ds + 2(1-K)\cdot\varphi^1(u_\lambda(t)) \leqq 2\varphi^1(u_0) + \int_0^t |f(s)|^2 ds$$

を得る。即ち，

$$(2.11)\quad \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|_{L^2(0,T;H)} \leqq C_1 , \quad \text{for } \forall\lambda>0,$$

$$(2.12)\quad \varphi^1(u_\lambda(t)) \leqq C_1 , \quad \text{for } \forall t\in[0,T],\ \forall\lambda>0,$$

更に，(A.2) 及び (2.11), (2.12) より，

$$(2.13)\quad |\partial\varphi_\lambda^2(u_\lambda(t))|_{L^2(0,T;H)} \leqq C_1 , \quad \text{for } \forall\lambda>0.$$

$$(2.14)\quad |g_\lambda^1(t)|_{L^2(0,T;H)} \leqq C_1 , \quad \text{for } \forall\lambda>0,$$

但し，$g_\lambda^1(t) = -\frac{du_\lambda}{dt} + \partial\varphi_\lambda^2(u_\lambda(t)) + f(t) \in \partial\varphi^1(u_\lambda(t))$，$C_1$ は $\varphi^1(u_0)$ 及び $|f|_{L^2(0,T;H)}$ のみに依る定数。

<u>$u_\lambda(t)$ の収束</u>： まず，次の２つの事実を示そう。

(2.15) $\{u_\lambda(t)\}_{\lambda>0}$ は $[0,T]$ で同等連続

(2.16) $\{u_\lambda(t)\}_{\lambda>0}$ は $t\in[0,T]$ を固定すれば H で precompact。

実際，(2.16) は仮定 (A.1) 及び評価 (2.12) から直ちに得られる。(2.15) を見るには，(2.11) の評価と，次の不等式

を組み合せれば良い。

(2.17) $\quad |u_\lambda(t)-u_\lambda(t')|_H \leq C\cdot\left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|_{L^2(0,T;H)}\cdot|t-t'|^{1-1/2}$

よって，(2.15)，(2.16) より Ascoli の定理が使えて，

(2.18) $\quad u_{\lambda_n}(t) \to u(t) \quad \text{in} \quad C([0,T];H) \quad \text{as} \quad \lambda_n \searrow 0$

なる $\{\lambda_n\}$ と $u(t)\in C([0,T];H)$ とが存在する。

さて，H 上の p.l.s.c.f. φ に対して Φ を

(2.19) $$\Phi(u) = \begin{cases} \int_0^T \varphi(u(t))\,dt & \text{if} \quad \varphi(u(t))\in L^1(0,T) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義すれば，Φ は $L^2(0,T;H)$ 上の p.l.s.c.f. となり，更に，$\forall g\in L^2(0,T;H)$ に対して，$g\in\partial\Phi(u)$ ならば，かつその時に限り，$g(t)\in\partial\varphi(u(t))$，for a.a. $t\in[0,T]$，となる，(Brézis[2] 参照)。

ここで，Φ^1，Φ_λ^2，etc を φ^1，φ_λ^2，etc で同様に定義すれば，$\partial\Phi^1$，$\partial\Phi^2$，$\frac{du}{dt}$ の $L^2(0,T;H)$ での demiclosedness より評価 (2.11)，(2.13)，(2.14) と組合せて，$\{\lambda_n\}$ の部分列 $\{\lambda_{n'}\}$ が選べて，次の様にできる。

(2.20) $\quad \frac{du_{\lambda_{n'}}}{dt} \longrightarrow \frac{du}{dt} \quad \text{weakly in} \quad L^2(0,T;H)$

(2.21) $\quad g^1_{\lambda_{n'}} \longrightarrow g^1\in\partial\Phi^1(u) \quad \text{weakly in} \quad L^2(0,T;H)$

(2.22) $\quad \partial\Phi^2_{\lambda_{n'}}(u_{\lambda_{n'}}) \to g^2\in\partial\Phi^2(u) \quad \text{weakly in} \quad L^2(0,T;H)$

よって，$g^i(t)$ は (1.1)′ をみたすから，$u(t)$ が求める強解である。

［証明終り］

§3. 定理II（Stable Set）

この節では，(A.1)，(A.2) は満されているが，(A.3) が満されていない場合を取扱う。一般に，条件 (A.3) がない場合には，任意の $u_0 \in D(\varphi^1)$ から出発する解は，爆発する場合がある，（［3］，［7］参照）。しかし，ある意味で，充分小さな初期値 u_0 に対して，(1.1)~(1.2) の強解は，大域的に存在することが示せる。この状況を説明する為に，J.L. Lions［4］，M. Tsutsumi［7］，と同様な，Sable Set の概念を導入する。まず，次の様な $\tilde{\varphi}^i$ を導入すると，応用上，便利である。

(A.4) 次の (i)~(iii) を満すH上の実数値関数 $\tilde{\varphi}^i$ が存在する。

(i) $0 \le \tilde{\varphi}^1(u) \le \varphi^1(u)$，$0 \le \varphi^2(u) \le \tilde{\varphi}^2(u)$，for ${}^\forall u \in H$.

(ii) $u_n \to u$ (in H) かつ $\varphi^1(u_n) \to \varphi^1(u)$ ならば $\tilde{\varphi}^1(u_n) \to \tilde{\varphi}^1(u)$.

(iii) $\tilde{\varphi}^2$ は H 上の p.l.s.c.f. で $D(\partial\varphi^1) \subset D(\partial\tilde{\varphi}^2)$ かつ (3.1) を満す。

(3.1) $|\overset{\circ}{\partial}\tilde{\varphi}^2(u)|_H \le M(\varphi^1(u)) \cdot \{|\overset{\circ}{\partial}\varphi^1(u)|_H + 1\}$，for ${}^\forall u \in D(\partial\varphi^1)$.

次に，

(3.2) $N(\varphi) = \{u \in H;\ \varphi(u) = 0\}$，$(\varphi = \varphi^1, \tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2)$

(3.3) $\tilde{J}(u) = \tilde{\varphi}^1(u) - \tilde{\varphi}^2(u)$

(3.4) $J(u) = \varphi^1(u) - \varphi^2(u)$

(3.5) $J_\lambda(u) = \varphi^1(u) - \varphi^2_\lambda(u)$ とおく。

この時, $J_\lambda(u) \geqq J(u) \geqq \tilde{J}(u)$, となる。

(A.5) 次の (i)〜(v) が成立する。

(i) $\tilde{J}(0) = C_2 > -\infty$

(ii) ${}^\forall u \in D(\varphi^1) \setminus N(\tilde{\varphi}^1)$ に対して, $\tilde{J}(r \cdot u)$ は $r \in [0, +\infty)$ の連続関数で, $(0, +\infty)$ では C^1-級, 更に次の様な u の関数 $r_u : D(\varphi^1) \setminus N(\tilde{\varphi}^1) \longmapsto (0, +\infty]$[1] が存在する。
$\frac{d\tilde{J}}{dr}(r \cdot u) > 0$ for ${}^\forall r \in (0, r_u)$ かつ $\frac{d\tilde{J}}{dr}(r \cdot u)\Big|_{r=r_u} = 0$.

(iii) $u_n \to u$ (in H), $\tilde{\varphi}^1(u_n) \to \tilde{\varphi}^1(u) \neq 0$ かつ $\tilde{\varphi}^2(u_n) \to \tilde{\varphi}^2(u)$ ならば, $r_{u_n} \to r_u$ 。

(iv) $0 < \tilde{\varphi}^1(u) \leqq \varepsilon$ ならば $r_u \geqq 1$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する。

(v) $\inf\limits_{u \in D(\varphi^1) \setminus N(\tilde{\varphi}^1)} \tilde{J}(r_u \cdot u) = d > 0$.

ここで, Stable Set W を次の様に定義する。

(3.6) $W = \{ u \in D(\varphi^1) \setminus N(\tilde{\varphi}^1) ;\ J(u) < d,\ r_u > 1 \}$

---

(1) $\frac{d\tilde{J}}{dr}(r \cdot u) > 0$, for ${}^\forall r \in (0, +\infty)$ のときは, $r_u = +\infty$ とする。

$\mathbb{W}$, $N(\tilde{\varphi}^1)$ について．次の仮定をおく。

(A.6) $\mathbb{W} \neq \phi$，更に，$u \in \mathbb{W}$ かつ $J(u) \leq d_0 < d$ ならば

$\varphi^1(u) \leq M(d_0) < +\infty$.

(A.7) $u \in N(\tilde{\varphi}^1)$ ならば $\varphi^2(u) \leq C_3 < +\infty$

[注意3-1] 特に，φ^1 が α_1 次の斉次関数で，(A.3) が満足されている時，$\tilde{\varphi}^1 = \varphi^1$，$\tilde{\varphi}^2 = K\varphi^1 + \varepsilon$ とおけば，$\forall u \in D(\varphi^1) \setminus N(\varphi^1)$ に対して，$r_u = +\infty$ かつ $d = +\infty$ となり，$\mathbb{W}$ は結局 $D(\varphi^1) \setminus N(\varphi^1)$ に一致する。

[命題3-2] $\tilde{\varphi}^1$, $\tilde{\varphi}^2$ はそれぞれ α_1, α_2 次の斉次関数，($0 < \alpha_1 < \alpha_2$)，とし．次の (3.7) を満すものとする。

(3.7) $\tilde{\varphi}^2(u) \leq C_4 \{\tilde{\varphi}^1(u)\}^{\alpha_2/\alpha_1}$, for $\forall u \in D(\varphi^1)$.

更に，$N(\tilde{\varphi}^1) = N(\varphi^1)$ かつ、任意の $\varepsilon > 0$ に対して．$\{u \in H ;\ 0 < \varphi^1(u) < \varepsilon\} \neq \phi$ とすれば，(A.5)～(A.7) はすべて満される。

<u>証明</u>： 簡単な計算によって，まず

(i) $\tilde{J}(r.u) = r^{\alpha_1} \cdot \tilde{\varphi}^1(u) - r^{\alpha_2} \cdot \tilde{\varphi}^2(u)$

(ii) $r_u = \left[\dfrac{\alpha_1 \cdot \tilde{\varphi}^1(u)}{\alpha_2 \cdot \tilde{\varphi}^2(u)} \right]^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \geq \left(\dfrac{\alpha_1}{C_4 \cdot \alpha_2} \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \cdot (\tilde{\varphi}^1(u))^{-1/\alpha_1} > 0$

if $u \notin N(\tilde{\varphi}^2) \cup N(\tilde{\varphi}^1)$

$r_u = +\infty \quad \text{if} \quad u \in N(\tilde{\varphi}^2) \setminus N(\tilde{\varphi}^1)$

(iii) $d \geq \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{C_4 \cdot \alpha_2} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}} > 0$

(iv) $W = \{ u \in D(\varphi^1) \setminus N(\varphi^1) \ ; \ \varphi^1(u) - \varphi^2(u) < d,\ \alpha_1 \tilde{\varphi}^1(u) - \alpha_2 \tilde{\varphi}^2(u) > 0 \}$

をうる。

(A.5) と (A.7) は、上記の (i)~(iv) より明らか。 (A.6) を見るには、まず、(3.7) より、 $0 < \tilde{\varphi}^1(u) < \varepsilon_0$ とすれば

$\alpha_1 \cdot \tilde{\varphi}^1(u) - \alpha_2 \cdot \tilde{\varphi}^2(u) \geq (\alpha_1 - \alpha_2 \cdot C_4 \cdot \varepsilon_0^{\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1}})\, \tilde{\varphi}^1(u) > 0$ となる

充分小さな $\varepsilon_0 > 0$ が存在するから、 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, d\}$ とすれば、 $\{ u \in H \ ; \ 0 < \varphi^1(u) < \varepsilon \} \subset W$ となるから $W \neq \phi$。

次に、$u \in W$ かつ $J(u) \leq d_0$ ならば、

$\tilde{\varphi}^1(u) - \tilde{\varphi}^2(u) \leq J(u) \leq d_0$ かつ $\alpha_1 \tilde{\varphi}^1(u) - \alpha_2 \tilde{\varphi}^2(u) > 0$ であるから

直ちに、$\tilde{\varphi}^1(u), \tilde{\varphi}^2(u)$ の有界性がいえ、 $\varphi^1(u) \leq M(d_0) < +\infty$ となる。 [証明終り]

[定理3-3] (A.1), (A.2) 及び (A.4)~(A.7) の仮定のもとに、

(3.8) $d - J(u_0) > \frac{1}{4} |f|^2_{L^2(0,T;H)}$ を満す、任意の $u_0 \in W$、 $f \in L^2(0,T;H)$ に対して、(2.1)~(2.3) を満足する、(1.1)~(1.2) の強解が、(少なくとも1つ)、存在する。

<u>定理3-3の証明：</u> ここでも、やはり次の近似方程式を考える。

(3.9) $\frac{du_\lambda}{dt} + \partial\varphi^1(u_\lambda(t)) - \partial\varphi^2_\lambda(u_\lambda(t)) \ni f(t)$, $t \in [0,T]$.

(3.10) $u_\lambda(0) = u_0$

まず $J_\lambda(u_0) \searrow J(u_0)$ as $\lambda \searrow 0$ であったから，

(3.11) $d - \{ J_\lambda(u_0) + \frac{1}{4K} |f|^2_{L^2(0,T;H)} \} > 0$, for $\forall\lambda \in]0,\lambda_0]$

となる，$\lambda_0 > 0$ と $0 < K < 1$ とが存在する。

(3.9)の両辺に $\frac{du_\lambda}{dt}$ をかけて，$[0,t]$ で積分すれば，

(3.12) $\int_0^t |\frac{du_\lambda}{dt}(s)|^2 ds + J_\lambda(u_\lambda(t)) \leqq J_\lambda(u_0) + \int_0^t |f(s)|\cdot|\frac{du_\lambda}{dt}(s)| ds$

よって，$d_0 = J_{\lambda_0}(u_0) + \frac{1}{4K}\int_0^T |f(s)|^2 ds$ とすれば，次をうる。

(3.13) $(1-K)\int_0^t |\frac{du_\lambda}{dt}(s)|^2 ds + J_\lambda(u_\lambda(t)) \leqq d_0 < d$, for $\forall t \in [0,T]$,

$\forall\lambda \in]0,\lambda_0]$.

当分，λ を $]0,\lambda_0]$ に固定して，話を進めよう。

いま，$\varphi^1(u_\lambda(t))$，$u_\lambda(t)$ は $[0,T]$ で絶対連続，更に，

$\frac{du_\lambda}{dt}$, $\partial\mathring{\varphi}^1(u_\lambda(t)) \in L^2(0,T;H)$ であったから，$\partial\mathring{\varphi}^2(u_\lambda(t)) \in L^2(0,T;H)$、よって 補題2-3 より，$\tilde{\varphi}^2(u_\lambda(t))$ は $[0,T]$ で絶対連続，すなわち，(A.4)の(ii) 及び (A.5)の(iii) より

(3.14) $\gamma_{u_\lambda(t)}$ は $\{t \in [0,T]\,;\ \tilde{\varphi}^1(u_\lambda(t)) \neq 0\}$ で連続

となる。

ここで，(3.13) 式より，直ちに

(3.15) $J(u_\lambda(t)) \leqq J_\lambda(u_\lambda(t)) \leqq d_0$, for $\forall t \in [0,T]$, $\forall \lambda \in]0,\lambda_0]$.

が得られる。更に，次の事がいえる。

(3.16) $u_\lambda(t) \in N(\tilde{\varphi}') \cup \overline{W}$, for $\forall t \in [0,T]$, $\forall \lambda \in]0,\lambda_0]$.

実際，$\tilde{\varphi}'(u_\lambda(t_0)) \neq 0$ かつ $r_{u_\lambda(t_0)} < 1$ となる t_0 があるとすれば，$r_{u_\lambda(t)}$ 及び $\tilde{\varphi}'(u_\lambda(t))$ の連続性 と 条件 (A.5) の (iv) 及び $r_{u_\lambda(0)} > 1$ とから，

(3.17) $r_{u_\lambda(t_1)} = 1$ となる $t_1 \in]0, t_0[$ が存在する。

ところが，d の定義より，

(3.18) $J(u_\lambda(t_1)) \geqq \tilde{J}(u_\lambda(t_1)) \geqq d > d_0$

であるから，これは (3.15) に矛盾する。よって (3.16) が示された。

よって，(A.6), (A.7), (3.15), (3.16) より直ちに

(3.19) $\varphi'(u_\lambda(t)) \leqq C_5$, for $\forall t \in [0,T]$, $\forall \lambda \in]0,\lambda_0]$.

を得る。ここで C_5 は d_0 のみによる定数。

更に，(3.16), (A.6), (A.5) の (i), (ii) より $J_\lambda(u_\lambda(t))$ は下に有界である事がわかり，(3.13) 式より，

$$(3.20)\quad \int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 \cdot dt \leqq C_5 \quad , \quad \text{for } \forall\lambda \in]0, \lambda_0] \ .$$

なる評価を得る。

(3.19), (3.20) の評価を得たから，あとは，定理2.1. の証明の後半と全く同様にして，強解の存在が示せる。

[証明終り].

[注意3-4] 定理3-3に於いて， $J(u_0) + \frac{1}{4}|f|^2_{L^2(0,T;H)} < d$ であれば， $u_0 \in N(\tilde{\varphi}')$ に対しても同じ事が言える。

[注意3-5] 定理3-3に於いて，(3.8) の条件があるから例えば， $f(t) \equiv f$ の場合， $|f|_H$ は T が大きくなると共に，小さくならざるを得ないが，もし命題3-2の状況と， $\varphi'(u) \geqq C_0 |u|_H^2$, $C_0 > 0$, なる coerciveness とがあれば， $|f(t)|_{L^\infty(0,T;H)} \leqq \varepsilon$, $0 \leqq \varphi'(u_0) \leqq \varepsilon$, (ε は d のみに依り，T に依らない正の数。) なる，$f(t)$, u_0, に対して，(2.1)~(2.3) を満す (1.1)~(1.2) の (大域的)強解の存在がいえる。

［注意 3-6］　$u_0 \in \overline{D(\varphi^t)}$ (2) の場合にも，(1.1)～(1.2) の強解の存在について，定理 2-1，定理 3-3 に相当する，結果が得られる。但し，定理 3-3 に於いては，

$u_0 \in \overline{D(\varphi^t)} \cap \{ u \in H ; |u|_H \leq \varepsilon \}$，$|f(t)|_{L^2(0,T;H)} \leq \varepsilon$，（$\varepsilon$ は d のみによる正数。）と変更する必要がある，（詳しくは K. Ôtani ［5］ を見られたい。）。

(2)　$D(\varphi^t)$ の H-norm での閉包.

§4. 応用

［例 I］　はじめに，次の初期値境界値問題を考えよう。

(4.1)　$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \beta(u(x,t)) \ni f(t)$, $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$

(4.2)　$u(x,t)|_{\Gamma} = 0$　, $t \in [0,T]$

(4.3)　$u(x,0) = u_0(x)$　, $x \in \Omega$

但し，$(p-2) \geq 0$ かつ この節を通じて，Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域で，Γ は Ω の 充分滑らかな境界とする。

M. Tsutsumi ［7］ は，この問題を Galerkin 法によって，$f(t) \equiv 0$，$\beta(u) = |u|^{\alpha} \cdot u$，$(\alpha > 0)$，の場合について，研究しているが，我々の方法の利点の1つは，解 $u(x,t)$ の x についての regularity が良くなる点である。

この節を通じて，$\beta(\cdot)$ は $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1$ の maximal monotone graph とし，次の (4.4) を満すものとする。

(4.4) $|\beta(r)| \leqq K_1\cdot|r|^{1+\alpha}+K_2$, $\alpha>0$, for $\forall r\in\mathbb{R}^1$.

まず，定理 2-1 を適用すれば，次の定理を得る。

[定理 4-1] $n\leqq p$ の時 $(2+\alpha)<p$, $n>p$ の時 $(2+\alpha)<p$ かつ $2(1+\alpha)\leqq\frac{np}{n-p}$ とすれば，任意の $u_0\in W_0^{1,p}(\Omega)$ と $f(t)\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ に対して，(4.5)〜(4.7) をみたす，(4.1)〜(4.3) の強解が存在する。

(4.5) $\frac{du}{dt}\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$

(4.6) $|u(t)|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ は $[0,T]$ で絶対連続。

(4.7) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

証明： まず，$\partial \ell(r)=\beta(r)$ となる，$\mathbb{R}^1$ 上の p.l.s.c.f. $\ell(r)$ が存在するから，φ^2 を次式で定義すると，

$$
(4.8)\quad \varphi^2(u)=\begin{cases}\int_\Omega \ell(u(x))\,dx & \text{if } \ell(u(x))\in L^1(\Omega)\\ +\infty & \text{otherwise.}\end{cases}
$$

φ^2 は $H=L^2(\Omega)$ 上の p.l.s.c.f. となり，$\forall g\in L^2(\Omega)$ に対して，もし，$g\in\partial\varphi^2(u)$ ならばかつその時に限り $g(x)\in\beta(u(x))$, for a.a. $x\in\Omega$.

となる，（[2] 参照）。 次に，

$$(4.9)\quad \Phi_p(u) = \begin{cases} \frac{1}{p}\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p \cdot dx & \text{if} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

とすれば，$D(\Phi_p) = W_0^{1,p}(\Omega)$ かつ $\partial\Phi_p(u) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$

となる。 よって，定理 4-1 を示すには，$\varphi^1 = \Phi_p$，$\varphi^2 = \Phi^2$

とおいて，(A.1)〜(A.3) を check すれば良い。

実際，(A.1) は Rellich の定理，(A.2) は (4.4) 式及び Sobolev の定理 より明らか。 (A.3) も (A.2) と同様にして，$(2+\alpha) < p$ に注意すれば簡単に示せる。

［証明終り］

［注意 4-2］ 定理 4-1 に於いて，$n \leqq 11$ とすれば，α についての仮定は $(2+\alpha) < p$ で十分である。

［注意 4-3］ 注意 3-6 でも述べた様に，定理 4-1 に於いて，$u_0 \in L^2(\Omega)$ に対しても，(4.5)′〜(4.7)′ をみたす，(4.1)〜(4.3) の強解の存在がいえる。

(4.5)′ $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$

(4.6)′ $|u(t)|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ は $]0,T]$ で絶対連続。

(4.7)′ $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in L^2(\delta, T; L^2(\Omega))$, for $\forall\delta>0$.

$p<(2+\alpha)$ の場合には，次の定理を得る。

［定理 4-4］　$K_2=0$，かつ　$p \geqq n$　ならば　$p<(2+\alpha)$，$n>p$　ならば　$p<(2+\alpha)$，$2(1+\alpha) \leqq \frac{n\cdot p}{n-p}$　とすれば，

(4.10)　$d - J(u_0) > \frac{1}{4}|f|^2_{L^2(0,T;H)}$　を満す，任意の

$u_0 \in \overline{W} \cup \{0\}$　と　$f \in L^2(0,T; H)$　に対して，(4.5)〜(4.7) を満す，(4.1)〜(4.3) の強解が存在する。

但し，$\varphi^1(u) = \tilde{\varphi}^1(u) = \phi_p(u)$，$\varphi^2(u) = \phi^2(u)$，

$$(4.11)\quad \tilde{\varphi}^2(u) = \begin{cases} \frac{K_1}{2+\alpha}\int_\Omega |u(x)|^{2+\alpha}\cdot dx & \text{if } u \in L^{2+\alpha}(\Omega) \\ +\infty & \text{otherwise}. \end{cases}$$

証明：　α に対する仮定から，Sobolev の定理によって，

$$(4.12)\quad \tilde{\varphi}^2(u) \leqq C\cdot\{\tilde{\varphi}^1(u)\}^{\frac{2+\alpha}{p}},\ \text{for } \forall u \in D(\varphi^1)$$

となるから，命題 3-2 の条件がすべて満されており，更に，(A.4) も明らかに満足されている。(A.1)，(A.2) も定理 4-1 の場合と全く同様。　［証明終り］

〔例 II〕　次の問題を考えよう，

$$(4.13)\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) + C_0 \cdot u - \beta(u(x,t)) \ni f(t),\quad (x,t) \in \Omega \times [0,T].$$

$$(4.14)\quad -\frac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u(x,t)),\quad (x,t) \in \Gamma \times [0,T].$$

$$(4.15)\quad u(x,0) = u_0(x),\quad x \in \Omega.$$

但し，$C_0 > 0$，$\frac{\partial}{\partial n}$ は outward normal derivative，$\gamma(\cdot)$ は $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ での maximal monotone graph で $\gamma(0) \ni 0$．
ここで，$\partial j(r) = \gamma(r)$ となる，$\mathbb{R}^1$ 上の p.l.s.c.f. $j(r) \geq 0$ が存在するから，ϕ^1 を次式で定義すると，

$$(4.16)\quad \phi^1(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \cdot dx + \frac{C_0}{2}\int_\Omega |u(x)|^2 \cdot dx + \int_\Gamma j(u(x))\,d\Gamma \\ \quad \text{if } u \in H^1(\Omega),\ j(u) \in L^1(\Gamma). \\ +\infty \quad \text{otherwise}. \end{cases}$$

ϕ^1 は $H = L^2(\Omega)$ 上の p.l.s.c.f. となり，更に，

$$D(\partial\phi^1) = \left\{ u \in H^2(\Omega)\ ;\ -\frac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u),\ \text{for a.a. } x \in \Gamma \right\}$$

$$\partial\phi^1(u) = -\Delta u + C_0 u$$

となるから，（［1］参照），(4.13)～(4.15) について，
定理 4–4 と類似の定理が得られる。
実際，$\varphi^1(u) = \phi^1(u)$，$\varphi^2(u) = \phi^2(u)$，$\tilde{\varphi}^2(u)$ は (4.11) で，又，$\tilde{\varphi}^1(u)$ としては，

$$(4.17)\qquad \varphi^1(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx + \frac{c_0}{2}\int_\Omega |u(x)|^2 dx & \text{if } u \in H^1(\Omega) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}.$$

を，とれば良い。

References

[1] H. Brézis　Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial diff. equations, Contributions to Nonlinear Functional Analysis, Acad. Press, (1971).

[2] H. Brézis　Operateurs Maximaux Monotones, North-Holland, (1973)

[3] H. Fujita　On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic eqs. Proc. Symp. in Pure Math. 18, A.M.S. Providence, Rhode Island, (1970), 105-113.

[4] J.L. Lions　Quelque Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[5] K. Ôtani　On the strong solution of $u_t + \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t)$, to appear.

[6] K. Ôtani　On the strong solution of $u_t + \partial\varphi^{1,t}(u(t)) - \partial\varphi^{2,t}(u(t)) \ni f(t)$, in preparation.

[7] M. Tsutsumi Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations, R.I.M.S. (1972), 211- 229.

[8] M. Tsutsumi On solutions of semilinear differential equations in a Hilbert space, Mathematica Japonicae, (1972), 173- 193.