数理解析研究所講究録
第265巻 1976年 10-27

有理関数近似について

茨城大 理　　林 実樹広

複素平面ℂのコンパクト集合K上の関数fを多項式や有理関数で近似する問題は古くから考えられている。 連続関数fの多項式による一様近似はMergelyanによって，有理関数による一様近似はVitushkinによってその特徴付けが与えられた。その後，uniform algebraの理論の発展とあいまって，平面上のanalytic関数の作くるalgebraの研究が進み，とりわけGamelin, Garnett, Davie 等により有界正則関数の近似に関してもVitushkinの結果と同様なformulationが行なえることが示された。これらの議論はOperator T_ϕに関して不変なalgebraについては統一的に取り扱うことが出来るが，なお細部においてこの統一を妨げる問題点が残っている。 途中残された問題点について整理しながら，ここでは有理関数を中心とした近似問題を述べる。 平面上のuniform algebraについてのGamelin自身による解説[7]はよく整理されているので参照されたい。

§1　平面上の uniform algebra

平面上の uniform algebra の例を上げながら話を進める．　K は平面のコンパクト集合，C(X) により X 上の複素数値連続関数の全体を表わすことにして，$f\in C(S^2)$ （$S^2=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$）のうち K 上一様に有理関数で近似されるもの全体を R(K) とおくと，有理関数近似は

問題A　$f\in R(K)$ の特徴付け

である．Vitushkin は continuous analytic capacity α （後述）を用いて次のように特徴付けた．

定理1.1　$f\in C(S^2)$ に対して，定数 $r\geq 1$ 及び $a(\delta)\to 0$ $(\delta\to 0)$ があって，次の条件をみたす：$\forall z_0\in\mathbb{C}$, $\forall\delta>0$ に対して，ϕ が $\Delta(z_0,\delta)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|<\delta\}$ に台をもつ C^1 関数ならば

$$(\mathrm{I_R})\quad \left|\iint f(z)\frac{\partial\phi}{\partial\bar z}\,dx\,dy\right| \leq \delta\, a(\delta)\left\|\frac{\partial\phi}{\partial\bar z}\right\|\alpha(\Delta(z_0,\delta)\setminus K)$$

このとき，$f\in R(K)$．　逆に，$f\in R(K)$ ならば $a(\delta)=2\pi\sup\{|f(z_1)-f(z_2)|\mid z_1,z_2\in\Delta(z_0,\delta)\}$ として上の不等式が成立する．

具体的な関数 f に対して上の不等式を満すようなコンパクト集合 K を見出すことはほとんど不可能である．　そのため，開集合 $U\subset S^2$ に対して

$$A(U)=\{f\in C(S^2)\mid f\text{ は }U\text{ 上 analytic}\}$$

とする．　$R(K)\subseteq A(K^0)$ は明らかである．　$f\in A(K^0)$ という条件は実際上容易に確められるので

問題B　$R(K)=A(K^0)$ となる K を求める.

ことは応用上意味がある.　$f\in A(U)$ となる関数の特徴付けは, (I_R) を

$$(I_A)\quad \left|\iint f(z)\frac{\partial\phi}{\partial\bar z}\,dxdy\right| \le \delta\, a(\delta)\,\left\|\frac{\partial\phi}{\partial\bar z}\right\|\,\alpha(\Delta(z_0,r\delta)\setminus U)$$

で置き換えればそのまま成立する. これより次の定理が系として得られる.

<u>定理 1.2</u>　次は同値である.

(i)　$A(K^0)=R(K)$.

(ii)　定数 $c>0$, $r>0$ があって

$$\alpha(\Delta(z,\delta)\setminus K^0) \le c\,\alpha(\Delta(z,r\delta)\setminus K) \quad \text{for } \forall z\in\mathbb{C},\ \forall\delta>0.$$

(iii)　任意の有界開集合 D に対して, $\alpha(D\setminus K^0)=\alpha(D\setminus K)$.

[注] 条件の(ii)はもっと弱く, 各点 $z\in\mathbb{C}$ に対してある $r\ge 1$ が存在して,

$$(iv)\quad \varlimsup_{\delta\to 0}\frac{\alpha(\Delta(z,\delta)\setminus K^0)}{\alpha(\Delta(z,r\delta)\setminus K)} < \infty$$

としても同値になる. この条件は, 各点 $z\in\mathbb{C}$ ごとに確めればよく, 実際上便利である.

D が連結な開集合であれば, D の直径を $\mathrm{diam}(D)$ として,

$$\alpha(D)\le \mathrm{diam}(D)\le 4\,\alpha(D)$$

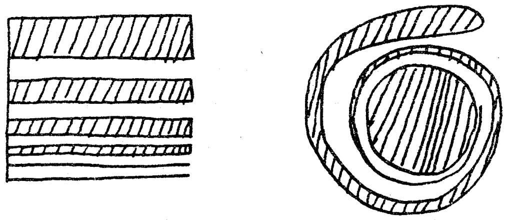
が成立する.　これより古典的な Mergelyan, Lavrent'ev の定理がただちに得られる.

<u>定理 1.3</u>　K を平面のコンパクト集合で, $\mathbb{C}\setminus K$ は連結とす

(i) (Mergelyan) $f \in A(K^0)$ は K上多項式により一様近似される.

(ii) (Lavrent'ev) $K^0 = \phi$ ならば, K上の連続関数は多項式で一様近似される.

$\mathbb{C} \setminus K$：連結となる例. ▨部K



§2 Pointwise bounded approximation

ここでは R(K) は K上の関数に制限して考えることにする.

一様収束では連続関数の近似しか出来ない. リーマン球 S^2 の開集合 U 上の有界 analytic 関数を有理関数で近似することを考える.

$H^\infty(U) = \{ f \mid f$ は U上 analytic な有界関数 $\}$

とおく. 関数列 f_n が関数 f に pointwise bounded (pt. b.) に収束するということを, 定数 $M > 0$ があって

$$\|f_n\| \leq M, \qquad f_n(z) \to f(z) \quad \text{for each } z$$

と定義する. とくに, $\|f_n\| \leq \|f\|$ となっているときは, f_n は f に strongly pt. b. に収束するという.

前節と同様2つの問題が考えられる.

問題 A′ $f \in H^\infty(K^0)$ で, R(K) の関数 f_n により (strongly) pt. b. 近似されるものを特徴付けよ.

問題 B′ R(K) が $H^\infty(K^0)$ の中で (strongly) pt. b. dense となる K

を求めよ.

[注] Rungeの定理によれば, $f\in R(K)$ はKの近傍でanalyticな関数によりK上一様近似されるものの全体であるから, この問題は, K°上でanalyticな有理関数fを, Kの近傍でanalyticな関数により近似することである.

この種の問題は, O. J. Farrell (1935) に初まる次の定理である.

[定理] 単連結な領域Uで, $\mathbb{C}\setminus\overline{U}$ が連結な場合には, $f\in H^\infty(U)$ の元は多項式 p_n によって $\overline{U}$ 上 strongly pt. b. 近似される.

その後, abstruct な拡張を含めて, この定理が多くの人によって一般化された. 問題A′の答は定理4.6で与えることとして, ここでは問題B′を考える. Vitushkinの方法が応用できることに注目して, 現在のところ Gamelin - Garnett [4] によって次の結果が得られている.

<u>定理2.1</u>　平面のコンパクト集合Kに関して次は同値である.

(i)　$R(\partial K)=C(\partial K)$ かつ $R(K)$ は $H^\infty(K^\circ)$ で pt. b. dense

(ii)　定数 $c>0$, $r>0$ があって

$$\gamma(\Delta(z,\delta)\setminus K^\circ)\le c\,\alpha(\Delta(z,\delta)\setminus K)\quad \text{for } \forall z\in\mathbb{C},\ 0<\forall\delta.$$

(iii)　任意の有界開集合Dに対して, $\gamma(D\setminus K^\circ)=\alpha(D\setminus K)$.

(iv)　各点 $z\in\partial K$ に対して, ある $r\ge 1$ が存在して

$$\varlimsup_{\delta\to 0}\frac{\gamma(\Delta(z,\delta)\setminus K^\circ)}{\alpha(\Delta(z,r\delta)\setminus K)}<\infty.$$

問題1. この定理において条件 $R(\partial K)=C(\partial K)$ を落すことは未解決である. 【難点は, $R(\partial K)\neq C(\partial K)$ であっても $R(K)$ が $H^\infty(K^0)$ で pt. b. dense となる場合があるので, 他の条件 (ii)〜(iv) についても修正しなくてはならない】

この定理の証明には, capacityに関する議論だけでは不十分で, uniform algebra としての $R(K)$ の性質に立ち入る必要がある. とくに次の定理を示めす.

<u>定理 2.2</u> $R(\partial K)=C(\partial K)$ かつ $R(K)$ が $H^\infty(K^0)$ で pt. b. dense とする. このとき, $R(K)$ は $H^\infty(K^0)$ で strongly pt. b. dense となり $R(K)=A(K^0)$ となる.

[注] 定理の条件で $R(K)$ が $A(K)$ で pt. b. dense としても $A(K^0)=R(K)$ が示めせる. これは Y. Kobayashi [6] による《なお MR.48 #2774 を参照のこと》.

[注] $A(U)$ の $H^\infty(U)$ における pt. b. density については, 条件なしに analytic capacity を用いた完全な特徴付けが定理 2.1 と同じ形で与えられる. このときも, (i) ⇒ (ii) 及び (iv) ⇒ (i) の証明には定理 2.2 に対応して次の定理を用いる.

<u>定理 2.3</u> $A(U)$ が $H^\infty(U)$ で pt. b. dense ならば, strongly pt. b. dense である.

以上述べた uniform algebra $R(K)$, $A(U)$, $H^\infty(U)$ の間の関係の証明

には類似点が多く見られる． 何らかの形でこれらを一本にまとめることが当然考えられる． これについて次の2つの節で述べる． はじめに analytic capacity の面から，次に strongly pt. b. dense に関して述べる．

§3 $\mathscr{A}$-capacity

analytic capacity を一般化して次のようにして $\mathscr{A}$-capacity を定義する．

<u>定義3.1</u> $\mathscr{A}$ をリーマン球 S^2 上の有界な Borel 関数からなる algebra とする． このとき，任意の集合 $E\subset\mathbb{C}$ に対して

$$\gamma_{\mathscr{A}}(E)=\sup\left\{|f'(\infty)| \;\middle|\; \begin{array}{l} f\in\mathscr{A} \text{ は } E \text{ のコンパクト部分の外で} \\ \text{analytic で，} \ f(\infty)=0,\quad \|f\|\le 1\end{array}\right\}$$

例1. $\mathscr{A}=\mathscr{A}_0$ をリーマン球 S^2 上の有界な Borel 関数で，平面のコンパクト集合の外では analytic なもの全体としたとき，$\gamma_{\mathscr{A}}(E)$ は単に $\gamma(E)$ と書かれ，analytic capacity といわれる．

例2. $\mathscr{A}=\mathscr{A}_0\cap C(S^2)$ のとき，$\gamma_{\mathscr{A}}(E)$ は $\alpha(E)$ と書かれ，continuous analytic capacity といわれる．

例3. U を有界な開集合として，$\mathscr{A}=\{f\in\mathscr{A}_0 \mid f \text{ は } U \text{ 上 analytic}\}$ とおけば

$$\gamma_{\mathscr{A}}(\Delta(z,\delta))=\gamma(\Delta(z,\delta)\setminus U)$$ （右辺は $H^\infty(U)$ に対応する capacity）

例4. U は同じとして，$\mathscr{A}=\{f\in\mathscr{A}_0\cap C(S^2) \mid f \text{ は } U \text{ 上 analytic}\}$

$\gamma_{\mathcal{A}}(\Delta(z,\delta)) = \alpha(\Delta(z,\delta)\setminus U)$　（右辺は$A(U)$に対応する capacity）

例5.　Kをコンパクト集合として，$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{A}_0 \mid f$ はKの近傍でanalytic$\}$とおけば，

$\gamma_{\mathcal{A}}(\Delta(z,\delta)) = \gamma(\Delta(z,\delta)\setminus K) = \alpha(\Delta(z,\delta)\setminus K)$　（右辺は$R(K)$　〃　〃）

終りの3例より，$\mathcal{A}$を適当に定めることにより各種capacityの議論が統一的に進められることがわかる．　Vitushkinの方法が適用されるためには，次に述べるT-不変という概念が必要である．

fをS^2上の有界Borel関数，ϕをコンパクトな台をもつC^1級関数として，

$$(T_\phi f)(w) = \phi(w)f(w) + \frac{1}{\pi}\iint \frac{f(z)}{z-w}\frac{\partial\phi}{\partial\bar z}\,dxdy$$
$$= \frac{1}{\pi}\iint \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\frac{\partial\phi}{\partial\bar z}\,dxdy$$

と定義する．

［T_ϕの性質］

1°　ある点列z_n, $z_n \to z_0$, に対して$f(z_n) \to f(z_0)$ならば$(T_\phi f)(z_n) \to (T_\phi f)(z_0)$.

2°　$T_\phi f$はfのanalyticな点及び$\mathrm{supp}(\phi)$の外でanalyticである．

3°　$(T_\phi f)(\infty) = 0$,　$(T_\phi f)'(\infty) = -\frac{1}{\pi}\iint f(z)\frac{\partial\phi}{\partial\bar z}\,dxdy$

4°　$\mathrm{supp}(\phi) \subset \Delta(z,\delta)$ならば

$$\|T_\phi f\| \leq 2\delta \left\|\frac{\partial\phi}{\partial\bar z}\right\| \omega(f; z,\delta)$$

ただし，　$\omega(f;z,\delta)=\sup\{|f(z_1)-f(z_2)| \mid z_1,z_2\in\Delta(z,\delta)\}$

5°　fがコンパクト集合Kの外でanalytic，Kの近傍で$\phi\equiv1$となっていれば，　$f=T_\phi f+f(\infty)$.

定義3.2　$\mathfrak{A}_0$のsubalgebra $\mathfrak{A}$がT-不変とは，すべてのコンパクトな台をもつC^1-級関数ϕに対して，$f\in\mathfrak{A}$ならば$T_\phi f\in\mathfrak{A}$.となること.

上で上げた例1～5の$\mathfrak{A}$はすべてT-不変である. 又，1°からたとえば，あるslitの左及び右側から連続なものを考えてもT-不変なものが作くれる.

定理3.3（問題A型の答：Davie [3]）　$\mathfrak{A}$をT-不変な$\mathfrak{A}_0$のsubalgebraとする.　$f\in\mathfrak{A}_0$に対して定数c，$r\geq1$，$\delta_0>0$が存在して，gが$\Delta(z_0;\delta)$に台をもつC^1級関数ならば

$$\frac{1}{\pi}\left|\iint f(z)\frac{\partial\phi}{\partial\bar z}\,dxdy\right|\leq c\,\delta\left\|\frac{\partial\phi}{\partial\bar z}\right\|\omega(f;z_0,\delta)$$

が　$\forall z\in\mathbb{C}$，$0<\forall\delta<\delta_0$に対して成立つならば，　$g_n\in\mathfrak{A}$，$\|g_n\|\leq M\|f\|$（Mはc, rにのみ関係して定まる定数）が存在して，

$$g_n\to f \qquad \text{a.e. } [dxdy].$$

更に，g_nはfの連続点からなるコンパクト集合上では一様にfに収束する.

[注]　証明の大筋はVitushkinのschemeと同じであるが，細い点で微妙である.　とくに，$g_n\to f$ a.e. [dxdy]　の部分は[5;

Lemma 10.3] の証明を多少修正して導びく.

<u>定理3.4</u> (問題B型の答; 同上) $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ をT-不変な $\mathfrak{A}_0$ のsubalgebraとする. 定数 c, $r \geq 1$, $\delta_0 > 0$ が存在して,

$$\gamma_{\mathfrak{A}_1}(\Delta(z,\delta)) \leq c\, \gamma_{\mathfrak{A}_2}(\Delta(z,r\delta)) \quad \text{for } \forall z \in \mathbb{C},\ 0 < \forall\delta < \delta_0$$

とすれば, 各 $f \in \mathfrak{A}_1$ は $\mathfrak{A}_2$ の元により前定理の形で近似できる.

[注] この定理を定理1.1, 定理2.2で述べた各点 $z \in \mathbb{C}$ ごとの条件にすることは, pt. b. dense から strongly pt. dense が導びけないために一般には出来ない. $\mathfrak{A}_1 \subset C(S^2)$, もしくは $\mathfrak{A}_2 = A(U)$ の場合にはこの性質がみたされる.

T-不変なsubalgebraがあまりに一般的なためにその台となる定義域すら確定していない.

問題2. pt. b. dense から strongly pt. dense を導びくような適当な条件を付したT-不変algebraを考えて, 既知の場合を含む形で一般論を作る.

§4 Strongly pointwise bounded density

$R(K)$ 及び $A(U)$ を統一的に議論するためにT-不変な $C(K)$ のsubalgebraを次のように定める.

<u>定義4.1.</u> Kを平面のコンパクト集合とする. $C(K)$ のsubalgebra A がT-不変とは, 任意のコンパクトな台をもつ C^1 級関

ϕ に対して，$f \in A$ ならば $(T_\phi f)|_K \in A$ となること．　ここで，$T_\phi f$ を考えるために f は S^2 上の有界 Borel 関数としてのすべての延長を許すことにする．

[注]　A が T-不変な $C(K)$ の subalgebra で uniformly closed ならば "$R(K) \subset A$" が示せる．

T-不変な algebra の例としては，$R(K)$，$A(U)$ の他にも幾つか知られている．　たとえば，E を有界な Borel 集合，E のコンパクト集合の外では 0 となる有界 Borel 関数 h に対して，

$$f(w) = \iint \frac{h(z)}{z-w}\, dx\,dy$$

は連続である．　このような関数の $\bar{E}$ 上の uniform closure を $R(E)$ とすると，$R(E)$ は $C(\bar{E})$ の T-不変な subalgebra となる．[algebra となることは，$\hat{\mu}(w) = \int \frac{1}{z-w}\, d\mu(z)$ とするとき，$\alpha = \hat{\mu}\nu + \hat{\nu}\mu$ とすれば $\hat{\alpha} = \hat{\mu}\hat{\nu}$ となることから従う]．

A を $C(K)$ の T-不変な subalgebra として，

$$\mathcal{A} = \{ f \in C(S^2) \mid f|_K \in A,\ f \text{ は } \infty \text{ 点の近傍で analytic} \}$$

とおけば，$\mathcal{A}$ は T-不変となる．　これより $\mathcal{A}$-capacity $C_{\mathcal{A}}$ を定義する．　前節の定理により次が得られる．

<u>定理4.2</u>　A を $C(K)$ の T-不変 closed subalgebra とすれば，定理1.1 が，A $(\leftrightarrow R(K))$，$C_{\mathcal{A}}(\Delta(z,\delta))$ $(\leftrightarrow \alpha(\Delta(z,\delta) \setminus K))$ と置き換えて成立する．

<u>定理4.3</u>　2つの $C(K)$ の T-不変な closed subalgebra に対して

定理1.2 が同様の置き換えにより成立つ.

以下, $C(K)$ の T-不変な closed subalgebra A を1つ固定して考える. 点 $x \in K$ が A の peak point とは, $f(x)=1$, $|f|<1$ on $K \setminus \{x\}$ となる $f \in A$ が存在することをいう. A の peak point でない点の全体を Q $(\subseteq K)$ であらわす. Q は F_σ-set である. $\lambda_Q = dxdy|Q$ を平面の Lebesgue measure を Q に切ったものとする.

<u>定理4.4</u> (Davie[2]) f を Q 上の有界 Borel 関数, $f_n \in A$, $\|f_n\| \leq M$ $(<\infty)$ が存在して, $f_n \to f$ a.e. $[\lambda_Q]$ ならば, $g_n \in A$, $\|g_n\| \leq \|f\|$ なるものを取って $g_n \to f$ a.e. $[\lambda_Q]$ と出来る.

<u>系</u>. $H^\infty(\lambda_Q)$ を A の $L^\infty(\lambda_Q)$ における w^*-closure とすると, A は $H^\infty(\lambda_Q)$ で strongly pt. b. dense である.

これを用いて, 次の2つの定理が Gamelin - Garnett [5] で与えられた.

<u>定理4.5</u> 任意の $f \in C(K)$ に対して,

$$d(f, A) = d(f, H^\infty(\lambda_Q))$$

とくに, $H^\infty(\lambda_Q) \cap C(K) = A$ となる.

<u>定理4.6</u> $f \in H^\infty(\lambda_Q)$ であるための必要十分条件は, 各点 $z \in \overline{Q}$ に対して, 定数 $r \geq 1$, $c > 0$ が存在して, 十分小さい

$\delta>0$ に対して，ϕ が $\Delta(z_0,\delta)$ に台をもつ C^1 級関数に対して

$$\left|\iint f(z)\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}}\,dxdy\right| \le C\,\delta\,\left\|\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}}\right\|\,\alpha_{\phi}(\Delta(z_0,\delta))$$

となることである．

(注) $H^\infty(\lambda_\phi)\cap C(K)=A$ をこの結果から，定理 1.1 の条件において，$a(\delta)\to 0$ という条件は，単に定数 $C>0$ で置き換えればよい．

もう一つ，次のような algebra を考える．

定義 4.7. $H^\infty(U)$ の closed subalgebra H が stable とは，

(i) $A(U)\subseteq H$

(ii) $f\in H$ ならば，$\dfrac{f-f(z_0)}{z-z_0}\in H$ for $z_0\in U$.

(注) この2つの条件から H が T-不変であることが示せる．逆に T-不変な closed subalgebra (ii) をみたすので，(i) のもとに (ii) は "T-不変" と同値な条件である．

定理 4.8 ([11]) H を $H^\infty(U)$ の closed stable subalgebra，E を ∂U の閉集合とする．L_E を U 上の有界な連続関数で $U\cup E$ 上に連続に延長出来るもの(全体)とする．$H_E=H\cap L_E$ とおくと次は同値である：

(i) $d(h,H_E)=d(h,H)$ for all $h\in L_E$.

(ii) H_E は H において pt. b. dense である．

(iii) 各 $f\in H$ は $f_n\in H_E$ により次のように近似出来る：

$\|f_n\| \leq \|f\|$, f_nはUのsubsetでEからの距離が正であるものの上では一様にfに収束する.

問題3. 条件(i)をstableからはずして, $H^\infty(\lambda_\Omega)$の場合にも定理4.4を一般化できないか?

定理の証明には次の事実が使われる.

<u>定理4.9</u> Hを$H^\infty(U)$のclosed stable subalgebraとする. Hのmaximal ideal spaceを$\mathcal{M}$とし, $z \in H$のGelfand変換$\hat{z}: \mathcal{M} \to \mathbb{C}$を考える. $\lambda \in \partial U$に対して$\mathcal{M}_\lambda = \{\phi \in \mathcal{M} \mid \hat{z}(\phi) = \lambda\} = \hat{z}^{-1}(\{\lambda\})$をλにおけるファイバーという. $f \in H$ならば

$$\sup_{\phi \in \mathcal{M}_\lambda} |\hat{f}(\phi)| = \varlimsup_{\substack{U \ni \zeta \\ \zeta \to \lambda}} |f(\zeta)|$$

問題4. (Cluster value problem) より正確に, $\hat{f}(\mathcal{M}_\lambda)$はfの点λにおけるcluster setに一致しないか. i.e.

$$\{\hat{f}(\phi) \mid \phi \in \mathcal{M}_\lambda\} \overset{?}{=} \{\lim_n f(\zeta_n) \mid \zeta_n \in U, \zeta_n \to \lambda\}.$$

このためには, 次のことを示せばよい. $^{\text{Π}}$ $f \in H$, $|f| > 0$ on U ならば $\frac{1}{f} \in H^{\text{Π}}$ とくに, HがA(U)の$L^\infty(\lambda_U)$におけるw* closureとすると, $1/f$をA(U)の元でpt. b. 近似出来ることを示せばよい.

この問題が正しければ, $H^\infty(U)$に関して知られる定理を一般化できる.

§5 Negligible sets

具体的な集合 E の analytic capacity を求めることは，一般的にはほとんど不可能である．これでは capacity を用いた特徴付けも実用的とはいえない．次のような negligible set を考えることは，続く定理からわかるように応用を広げる．

定義5.1　S^2 の subset E が α-negligible とは，(a) S^2 上の連続関数 f で開集合 U 上 analytic なものがあれば，f は E の近傍及び U 上で analytic な連続関数で S^2 上一様近似できる．また，E が γ-negligible とは，(b) ある定数 $M>0$ があって，S^2 上の有界な Borel 関数 f で U 上 analytic なものがあれば，E の近傍及び U 上で analytic な Borel 関数 f_n が存在して，$f_n \to f$ pt.wise on U，$\|f_n\| \leq M\|f\|$ とできる．

定理5.2.

(i)　E を α-negligible とすれば，定理1.2 の条件 (iv) は $z \in \partial K \setminus E$ に関して確めれば十分である．

(ii)　E を γ-negligible とすれば，定理2.1 の条件 (iv) は $z \in \partial K \setminus E$ に関して確めれば十分である．

定理5.3.　α-negligible set の countable union は α-negligible である．γ-negligible set の有限和は γ-negligible，compact な γ-negligible set の countable union は γ-negligible である．

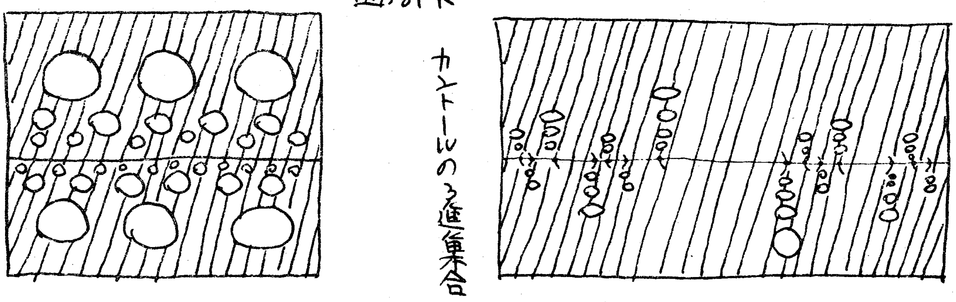
定理5.4.　J を C^2-級の曲線とすれば，

(i) J の subset E は α-negligible である.

(ii) J の subset E で長さ 0 の集合は γ-negligible である.

さて，K を平面のコンパクト集合として，$\mathbb{C}\setminus K$ の連結成分を $U_1, U_2, \cdots$ とすると，U_i の連結性から，$z\in\partial U_i$ に対しては capacity の条件 (iv)（定理 1.2, 2.1）は成立している．従って K の inner boundary といわれる集合 $\partial K\setminus(\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i)$ の点が negligible の場合にはこの定理が適用できる．たとえば，

内部K



$A(K^\circ)=R(K)$　　　$R(K)$ は $H^\infty(K^\circ)$ で pt, b, dense.

negligible set は capacity により次のように特徴付けられる

<u>定理 5.5</u>　E を S^2 の subset とする.

(i) 定数 $C>0$ があって $\alpha(S)\le C\,\alpha(S\setminus E)$ for any set S ならば，E は α-negligible であり，逆にこのとき $\alpha(S)=\alpha(S\setminus E)$ for any set S となる.

(ii) 定数 $M>0$ があって，$\gamma(S)\le M\,\gamma(S\setminus E)$ for any set S ならば，E は γ-negligible である．逆も成立つ．E が compat negligible ならば $\gamma(S) = \gamma(S \setminus E)$ for any S となる.

とくに, negligible set は対応する capacity で零になることがわかる.

問題5　$\alpha(E)=0$ ならば E は α-negligible か? 同様に $\gamma(E)=0$ ならば γ-negligible か?

これは, 次の capacity の semiadditivety が示めされればよい

問題6　universal contant $M>0$ があって,

$$\alpha(E\cup F) \le M(\alpha(E)+\alpha(F)) \quad \text{for any sets } E, F.$$

$$\gamma(E\cup F) \le M(\gamma(E)+\gamma(F)) \quad \text{for any sets } E, F$$

註　上の問題は部分的な解答でも有効である. たとえば, 定理5.4は, C^2-級曲線で分けられた2つの集合 E, F に対して上の不等式を導びくことにより証明される.

これらの問題は互いに関係が深く, 次の事実が示めされている. (Davie [3]).

定理5.6　次の conjecture は同値である.

(i)　E が compact で $\gamma(E)=0$ ならば E は γ-negligible

(ii)　universal constant M があって,

$$\gamma(E\cup F) \le M(\gamma(E)+\gamma(F)) \quad \text{for } {}^\forall \text{compact } E, F,\ E\cap F=\phi$$

(iii)　universal constant M があって,

$$\alpha(E\cup F) \le M(\alpha(E)+\alpha(F)) \quad \text{for } {}^\forall \text{compat } E, F,\ E\cap F=\phi$$

References

1. A. M. Davie, T. W. Gamelin and J. Garnett, Distance estimates and pointwise bounded density, T. A. M. S. 175 (1973), 37-68.
2. A. M. Davie, Bounded limits of analytic functions, P. A. M. S. 32 (1972), 127-133.
3. _____, Analytic capacity and approximation problems, T. A. M. S. 171 (1972), 409-444.
4. T. W. Gamelin and J. Garnett, Pointwise bounded approximation and Dirichlet algebras, J. Functional Anal. 8 (1971), 360-404.
5. __________, Bounded approximation by rational functions, Pac. J. Math. 45 (1973), 129-150.
6. Y. Kobayashi, One condition for R(K)=A(K), Proc, Japan Acad. 48 (1972), 578-580.
7. G. G. Lorentz (Editer), Approximation Theory, Academic Press, Inc., New York and London 1973; T. W. Gamelin, Uniform algebras on plane sets, p101-p149.