数理解析研究所講究録
第265巻 1976年 48-57

Weak－＊Dirichlet algebraに現われる近似について

北大 応電研　中路 貴彦

Aを$L^\infty(m)$のweak－＊Dirichlet algebra、$H^\infty(m)$をそのweak－＊閉包とするとき、3つのある種の近似について述べる。1つは実数値関数を実数値有界関数によって近似することと、不変部分空間の形を決定する問題との関係についてである。2つ目は特性関数をそれより本当に小さい特性関数によって近似することと、$H^\infty(m)$に属する関数のsupport setとの関係である。3つ目は近似と密接な関係にあるmaximal性についてである。

§1. 準備

Aがweak－＊Dirichlet algebraであるとは、(i) Aが確率測度空間$(X, \mathcal{A}, m)$の上の$L^\infty(m)$のsubalgebraであり定数を含む、(ii) $A+\bar{A}$は$L^\infty(m)$でweak－＊稠密であり、(iii)

mはA上 *multiplicative* である、ことである。
抽象的なHardy空間$H^p(m)$（$1 \leq p \leq \infty$）とは、$1 \leq p < \infty$のとき$H^p(m)$はAの$L^p(m)$での閉包でありかつ$H^\infty(m)$はAの$L^\infty(m)$でのweak-*閉包である。B^∞はAを含む$L^\infty(m)$のweak-*閉subalgebraとし、$B_0^\infty = \{ f \in B^\infty : \int_X f\, dm = 0 \}$とする。$B^p$（$1 \leq p < \infty$）とは、$B^\infty$の$L^p(m)$での閉包である。$I_B^\infty$は$B^\infty$の$B_0^\infty$に含まれるweak-*閉maximal idealである。その存在はZornの補題によって示される。X上の可測集合Eに対して、χ_Eはその特性関数である。$f \in L^p(m)$に対して、χ_fはfのsupport set E_fの特性関数である。

§2．不変部分空間

Mが$L^p(m)$の閉部分空間であり、$f \in M$かつ$g \in A$なら$fg \in M$が成立するとき、Mを不変部分空間という。次の定理は modification の定理として知られている〔1，p125〕。

$\boxed{\text{定理1}}$（Gamelin-Lumer）Mを$L^p(m)$（$1 \leq p < \infty$）の不変部分空間とする。任意の$f \in M$に対して$f_n \in M \cap L^\infty(m)$が存在して、$\| f - f_n \|_p \to 0$（$n \to \infty$）とできる。

もっと詳しく不変部分空間を調べるために、上の定理で、実数値の f に対して実数値の f_n が選べるかどうかを考えてみると、簡単な反例がすぐ得られる。しかし、$M \cap L^{\infty}(m)$ が *algebra* となるときには、多くの例はそれが正しい事を示している。そこで次の問題が考えられる。

問題　B^{∞} を A を含む $L^{\infty}(m)$ の *weak*－＊閉 *subalgebra* とする。$v \in B^{p}$ が実数値なら、$v_n \in B^{\infty}$ かつ実数値であるものが存在して、$\| v - v_n \|_p \to 0 \ (n \to \infty)$ とできる。$(1 \leq p < \infty)$

$\mathcal{L}_B^{\infty}$ を B^{∞} の自己共役な部分とし、$\mathcal{J}_B^{\infty} = \{ f \in B^{\infty} : \int_E f \, dm = 0$ すべての $\chi_E \in B^{\infty} \}$ とする。このとき、もし $B^{\infty} = H^{\infty}(m)$ 又は $B^{\infty} = L^{\infty}(m)$ ならば、$\mathcal{J}_B^{\infty} = I_B^{\infty} = H_0^{\infty}$ 又は $\mathcal{J}_B^{\infty} = I_B^{\infty} = \{0\}$ である。一般的には、$\mathcal{J}_B^{\infty} \supseteq I_B^{\infty}$ である。

以後、S が $L^{p}(m)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ の *subset* とすると、$[S]_p$ は S の閉 *linear span* を示すとする。$p = \infty$ は *weak*－＊閉。

$\boxed{\text{定理 2}}$　M を $L^{p}(m)$ の不変部分空間とする。もし $B^{\infty} M \subseteq M$ で、$\chi_E M \neq \{0\}$ である任意の $\chi_E \in B^{\infty}$ に対して、

$$\chi_E M \supsetneq \chi_E [\mathcal{J}_B^{\infty} M]_p$$

ならば、$M = \chi_{E_0} q B^{p}$ と表現できる。ここで q は *unimodular* 関数であり、$\chi_{E_0} \in B^{\infty}$ である。

さて、定理2は病的なもの以外の全ての不変部分空間の形を決定しているが、残念な事に逆が成立するかどうかわからない。次の定理は、逆が成立することと上に述べた問題とが同値であることを示している。

$\boxed{\text{補題 1}}$ $\quad B^{\infty} = \mathcal{L}_{B}^{\infty} \oplus \mathcal{G}_{B}^{\infty}$.

ここで $\oplus$ は代数的直和である。更に、$1 \leq p < \infty$ に対して

$$B^{p} = [\mathcal{L}_{B}^{\infty}]_{p} \oplus [\mathcal{G}_{B}^{\infty}]_{p} \ .$$

略証 $\mathcal{L}_{B}^{\infty}$ は B^{∞} の *weak*－＊閉 *subalgebra* だから、$L^{2}(m)$ 上の作用素の作る *algebra* として、可換な *von Neuman algebra* である。$\mathcal{B}$ を $\chi_{E} \in B^{\infty}$ なる $E \in \mathcal{A}$ よりなる σ-*algebra* とする。このとき、$\mathcal{L}_{B}^{\infty}$ は確率測度空間 $(X, \mathcal{M}, m)$ 上の本質的に有界な可測関数の全体 $L^{\infty}(\mathcal{B})$ と一致しかつ $[\mathcal{L}_{B}^{\infty}]_{p} = L^{p}(\mathcal{B})$ $(1 \leq p < \infty)$ となる。B^{∞} の各関数に対して、*conditional expectation* を見つけて、$B^{\infty} = \mathcal{L}_{B}^{\infty} \oplus \mathcal{G}_{B}^{\infty}$ を示すことができる。$B^{p} = [\mathcal{L}_{B}^{\infty}]_{p} \oplus [\mathcal{G}_{B}^{\infty}]_{p}$ $(1 \leq p < \infty)$ を示すためには、$u \in \mathcal{L}_{B}^{\infty}$ かつ $F \in \mathcal{G}_{B}^{\infty}$ に対して、

$$\left(\int_{X} |u|^{p} dm\right)^{1/p} \leq \left(\int_{X} |u+F|^{p} dm\right)^{1/p}$$

を示すとよい。

$\boxed{\text{定理3}}$　B^∞をAを含む任意の weak-*閉 subalgebra とし、$1 \leq p \leq \infty$ とする。このとき次は同値である。

(1)　$v \in B^p$ が実数値なら、$v_n \in B^\infty$ かつ実数値であるものが存在して、$\|v - v_n\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$ とできる。

(2)　全ての零でない $\chi_E \in B^\infty$ に対して、

$$\chi_E B^p \supsetneq \chi_E [\mathcal{G}_B^\infty B^p]_p$$

である。

(3)　$f \in B^\infty$ で、すべての $\chi_E \in B^\infty$ に対して $\int_E f\,dm = 0$ なら $\int_X f^2\,dm = 0$ である。

(4)　$\mathcal{G}_B^\infty = I_B^\infty$

(5)　$B^\infty = \mathcal{L}_B^\infty \oplus I_B^\infty$

<u>略証</u>　(1)⇒(4)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5)⇒(1) の順に示すと良い。

(1)⇒(4)　SをB^2の自己共役な部分とすると、補題1から、$[\mathcal{L}_B^\infty]_2 \oplus [\mathcal{G}_B^\infty]_2 = S \oplus [I_B^\infty]_2$ を示せる。

(2)⇒(3)　$R = B^2 \ominus [\mathcal{G}_B^\infty B^2]_2$ とすると、任意の $f \in R$ に対して、

$$\int_X g|f|^2\,dm = 0 \quad (g \in \mathcal{G}_B^\infty).$$

これより、$|f|^2 \in B^1$ かつ $|f|^2$ は $\mathcal{G}_B^\infty$ を anihilate する。補題1より、$|f|^2 \in [\mathcal{L}_B^\infty]_1 = L^1(\mathcal{B})$ とできるから、$|f| \in B^2$ かつ $\varepsilon > 0$ に対して $1/(|f| + \varepsilon) \in B^\infty$ とできる。よって

(2) の仮定より、$f \in R$ として $X_f = 1$ なるように選んで、$g = f/|f|$ とすると、$g \in R \cap \mathcal{L}^\infty_B$ を示すことができる。これより、R は定数 1 を含むから、補題より、$\mathcal{J}^\infty_B$ が *ideal* であることが示せる。

§3. $H^\infty(m)$ の *support set*

$H^\infty(m)$ が $L^\infty(m)$ の *weak-** 閉 *subalgebra* の中で *maximal* なら、任意の $f \in H^\infty(m)$ に対して、$X_f = 0$ か $X_f = 1$ であることは知られている[2]。この§では、一般的な $H^\infty(m)$ に属する関数 f の、X_f について調べる。次の補題3は $H^\infty(m)$ の *support set* を調べるのに有効であるだけでなく、次の§4で $H^\infty(m)$ の *maximal* 性を調べるのにも有効である。その証明には、*Hoffman* [1, *p*138] による次の補題2が本質的である。

補題2 (*Hoffman*) E を X 上の $m(E) < 1$ である可測集合とする。そのとき、$H^\infty(m)$ の関数で E 上実数値であるが E 上定数でないものが存在する。

$\boxed{\text{補題 3}}$ B^∞ を A を含む $L^\infty(m)$ の任意の *weak*-*閉 *sub*-*algebra* とする。もし $\chi_E \in B^\infty$ かつ $0 \lneqq \chi_E \lneqq 1$ なら

$$\chi_{E_n} \lneqq \chi_E \quad \text{かつ} \quad \chi_{E_n} \to \chi_E \quad a.e.\ (n \to \infty)$$

とできる $\chi_{E_n} \in B^\infty$ が存在する。又、

$$\chi_E \lneqq \chi_{F_n} \quad \text{かつ} \quad \chi_{F_n} \to \chi_E \quad a.e.\ (n \to \infty)$$

とできる $\chi_{F_n} \in B^\infty$ が存在する。

略証 $\chi_F \lneqq \chi_{E_0}$ かつ $\chi_F \in B^\infty$ なら $\chi_F = 0$ となる $\chi_{E_0} \in B^\infty$ がないといえると良い。もし存在したとすると、$\chi_{E_0} B^\infty$ は実数値関数を含まないことは *von Neumann* の定理より示せるから、補題2に矛盾する。

$\boxed{\text{定理 4}}$ もし $f \in H^\infty(m)$ で、$0 \lneqq \chi_f \lneqq 1$ なら、$\chi_{f_n} \lneqq \chi_f$ かつ $\chi_{f_n} \to \chi_f$ $a.e.\ (n \to \infty)$ とできる $f_n \in H^\infty(m)$ が存在する。

略証 $D^\infty = [\chi_f H^\infty(m)]_\infty + (1-\chi_f) L^\infty(m)$ とすると、D^∞ は *weak*-*閉 *subalgebra* で $H^\infty(m)$ を含む。このとき、$f \in I_D^\infty$ かつ $\chi_f \in D^\infty$ となり、I_D^∞ が *ideal* であることと補題3により定理を示すことができる。

自然な問題として、$\chi_f \lneqq \chi_{f_n}$ かつ $\chi_{f_n} \to \chi_f$ $a.e.$ $(n \to \infty)$ とできる $f_n \in H^\infty(m)$ が存在するかがあるが、反

例がある。

反例 $\mathcal{A}$ を torus T^2 の上の Borel set の全体からなる σ-algebra とする。$\mathcal{A}_0$ を $\mathcal{A}$ の σ-subalgebra で、$E_1 \times T$ のような Borel set の全体とする。$\mathcal{B}$ を $0 < \theta(E) < 1$（ここで θ は T 上の正規）Haar 測度である）である T 上のある Borel set に対して、$\{(E^c \times T) \cap F : F \in \mathcal{A}_0\} \cup \{(E \times T) \cap F' : F' \in \mathcal{A}\}$ のような σ-subalgebra とする。m を T^2 上の正規 Haar 測度とし、m を σ-subalgebra $\mathcal{B}$ に制限した測度を m_0 とする。

$$\Gamma = \{(n, m) : m > 0\} \cup \{(n, m) : n \geq 0\}$$

とするとき、A を $(n, m) \in \Gamma$ に対して $z^n g^m$ の多項式である Borel 複素数値関数のつくる algebra とする。ここで、z と w は T 上の座標関数であり、$g = \chi_{E \times T}\, w$ とする。このとき、A は $L^\infty(m_0)$ の weak-* Dirichlet algebra となる。この g は $h \in H^\infty(m)$ に対して $\chi_g \subsetneq \chi_h$ ならば、$\chi_h = 1$ となる関数である。

§4. $H^\infty(m)$ の maximal 性

$H^\infty(m)$ が $L^\infty(m)$ の weak-* 閉 subalgebra の中で maximal とする。もし $g \in L^\infty(m)$ が $H^\infty(m)$ に属さないなら、$L^\infty(m)$ の全ての

関数は、$H^\infty(m)$ の中に係数をもった g の多項式で、weak-* topology で近似される。よって maximal かどうかは近似問題である。Muhly〔2〕は、$H^\infty(m)$ が integral domain ならば $H^\infty(m)$ は maximal であることを示した。ここでは補題3を使う別の証明を与える。

$\boxed{\text{定理5}}$（Muhly） $H^\infty(m)$ についての次の性質は同値である。

（1） どんな $f \in H^\infty(m)$ も正測度の集合上で零とならない。

（2） $H^\infty(m)$ は $L^\infty(m)$ の weak-*閉 subalgebra の中で maximal である。

（3） $H^\infty(m)$ は integral domain である。

<u>略証</u> （1）⇒（3）⇒（2）⇒（1） の順に示す。（3）⇒（2）のみが本質的である。$H^\infty(m) \subsetneq B^\infty \subsetneq L^\infty(m)$ となる weak-* 閉 subalgebra があるとする。補題3により、$\{0\} \subsetneq \chi_E I_B^\infty \subsetneq I_B^\infty$ となる $\chi_E \in B^\infty$ が存在するから、明らかである。

$H^\infty(m)$ が maximal でなくとも、$H^\infty(m)$ を含む weak-* 閉 subalgebra の中に maximal なものがあるかも知れないが、次の否定的な結果を補題3より示すことができる。

$\boxed{\text{定理6}}$ $H^\infty_{(m)}$ が maximal でないなら．$H^\infty_{(m)}$ を含む weak-* 閉 subalgebra の中に maximal なものは存在しない。

<u>略証</u> B^∞ を weak-* 閉 subalgebra で maximal とすると、$B^\infty \supsetneqq H^\infty_{(m)}$ としてよい。このとき、零でない $\chi_{E_0} \in B^\infty$ があって、$B^\infty = \chi_{E_0} B^\infty + (1-\chi_{E_0}) L^\infty_{(m)}$ とできる。ここで、$(1-\chi_{E_0}) L^\infty_{(m)}$ は $L^\infty_{(m)}$ により reduce される B^∞ の最大の subspace である。補題3より B^∞ より本当に大きく $L^\infty_{(m)}$ と異なる weak-* 閉 subalgebra を作ることができる。

文　献

1. T. Gamelin, Uniform algebras, Prentice-Hall, Englewood, Cliff, N.J., 1969.
2. P.S. Muhly, Maximal weak-*Dirichlet algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 36(1972), 515-518.
3. T. Nakazi, Nonmaximal weak-*Dirichlet algebras, Hokkaido Math. J., (to appear).
4. ________, Invariant subspaces of weak-*Dirichlet algebras, (to appear).
5. ________, Superalgebras of weak-*Dirichlet algebras.