数理解析研究所講究録
第 265 巻 1976 年 58-66

単位元のノルム近似

都立大学・理　　佐伯貞浩

単位元1を持つBanach環 B を考える。但し $\|1\|=1$ と仮定する。各 $\varepsilon>0$ に対し $\eta(\varepsilon)=\eta_B(\varepsilon)$ を

(i)　　$\|x\|\leq 1$ かつ $\|1-x\|_{sp}<\varepsilon \Rightarrow \|1-x\|\leq\eta(\varepsilon)$

を満たす最小の実数と定義する。こゝに $\|y\|_{sp}=\lim_n \|y^n\|^{1/n}$ とする。この論文では

(ii)　　　$\varepsilon\longrightarrow 0$ のとき $\eta(\varepsilon)\longrightarrow 0$

が成立するかという問題を提起する。一般のBに対しては、この問題は否定的であるように思われるが、もしすべてのBに対し肯定的であるならば (i) と (ii)を満たす $\eta(\varepsilon)$ として、Bに無関係なものを選ぶ事ができる。後者をみるには、適当な Banach環 の列の無限テンソル積を考えればよい。以下では、いくつかの特殊な Banach環 に対して上の事が

成立する事を示そう。

まず G を局所コンパクトなアーベル群とし，G 上の有界正則な複素 Borel 測度全体が作る Banach 空間を M(G) で表わす。従って M(G) は，convolution を積として可換で半単純な Banach 環をなす：

$$\int_G f\, d(\mu * \nu) = \int_G\int_G f(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \qquad \forall f \in \mathbb{C}_0(G).$$

さらに G の単位元 0 における単位点測度を δ_0 で表わせば，これは M(G) の単位元になる。

<u>定理1.</u> M(G) に対しては (i) と (ii) が成立する。即ち

$$\|\mu\| \leq 1 \text{ かつ } \|\delta_0 - \mu\|_{sp} < \varepsilon \Rightarrow \|\delta_0 - \mu\| < 4\varepsilon.$$

証明. G の指標群を Γ で表わす。従って $\mu \in M(G)$ の Fourier 変換は

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \gamma(x)\, d\mu(x) \qquad \forall \gamma \in \Gamma$$

で定義され，$\widehat{\mu * \nu} = \hat{\mu}\hat{\nu}$ が成立する。さらに自然な方法により $\Gamma \subset \Delta_G$ と考えてよい。こゝに M(G) の極大イデアル空間を Δ_G で表わす。特に $\|\hat{\mu}\|_\infty \leq \|\mu\|_{sp}$ に注意する。

最初に G が離散群である場合を考える。このときは Γ はコンパクトであって，$M(G) = \ell^1(G)$，$\Delta_G = \Gamma$，かつ

(1) $$\mu(\{x\}) = \int_\Gamma \hat{\mu}(\gamma)\,\overline{\gamma(x)}\,d\gamma \qquad \forall x \in G \ \&\ \mu \in M(G)$$

が成立する。よって $\|\delta_0 - \mu\|_{sp} < \varepsilon$ とすれば

(2) $$|1 - \hat{\mu}(\gamma)| \leq \|\delta_0 - \mu\|_{sp} < \varepsilon \qquad \forall \gamma \in \Gamma$$

であるから，

(3) $$|1 - \mu(\{0\})| \overset{(1)}{=} \left|\int_\Gamma (1-\hat{\mu})\,d\gamma\right| \overset{(2)}{<} \varepsilon.$$

さらに $\|\mu\| \leq 1$ を仮定すると

$$\sum_{0 \neq x \in G} |\mu(\{x\})| = \|\mu\|_M - |\mu(\{0\})| \leq 1 - |\mu(\{0\})| \overset{(3)}{<} \varepsilon.$$

以上より $\|\delta_0 - \mu\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ を得る。

さて一般の場合を考える。このとき $M(G) = M_c(G) + M_d(G)$ と直和分解され，M_c と M_d は各々 $M(G)$ の閉イデアル及び閉部分環である。よって $\nu \in M(G)$ の連続部分・離散部分を各々 ν_c と ν_d で表わせば，対応

$$\nu \longrightarrow \nu_d \ :\ M(G) \longrightarrow M_d(G) = M(G_d)$$

は準同型写像であり，従って $\|\nu_d\|_{sp} \leq \|\nu\|_{sp}$ が成立する。

以上の事に注意すれば，定理の仮定の下に $\|\mu_d\| \leq 1$ かつ $\|\delta_0 - \mu_d\|_{sp} < \varepsilon$．よって前半の結果より $\|\delta_0 - \mu_d\| < 2\varepsilon$ を得る。従って $\|\mu_d\| > 1 - 2\varepsilon$, $\|\mu_c\| < 2\varepsilon$, よって又

$$\|\delta_0 - \mu\| = \|\delta_0 - \mu_d\| + \|\mu_c\| < 4\varepsilon. \qquad \text{Q.E.D.}$$

さて $\mathbb{T} \cong [-\pi, \pi)$ をトーラス，$\mathbb{Z} = \hat{\mathbb{T}}$ を整数の全体とする。このとき $\mathbb{T}$ 上の Fourier 環は

$$A(\mathbb{T}) = \{ f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}) : \|f\|_A = \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(m)| < \infty \}$$

と定義される。こゝに

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-imt} dt \qquad \forall m \in \mathbb{Z}$$

である。$A(\mathbb{T})$ は $\ell^1(\mathbb{Z}) = M(\mathbb{Z})$ の Gelfand 表現と考えてよいから，前定理により $\eta(\varepsilon) < 2\varepsilon$ が成立する。

<u>補題</u>（[5] 参照）．$0 < \varepsilon \leq \pi/2$ に対し

$$\omega(\varepsilon) = \inf \{ \|f\|_A : f(t) = 1 - e^{it} \quad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \}$$

と定義すると

$$\omega(\varepsilon) = \varepsilon + O(\varepsilon^2) \qquad (\varepsilon \to 0).$$

証明. $[-\pi,\pi)$ 上で φ を $\varphi(t)=\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-|t|)$ により定義すると，$\hat{\varphi}\geq 0$ が成立するから $\|\varphi\|_A=\varphi(0)=1$ である。さて

$$\frac{\pi}{2(N+1)}<\varepsilon\leq\frac{\pi}{2N},\quad \psi(t)=\frac{\pi}{2N}\varphi(Nt-\frac{\pi}{2})$$

により自然数 $N=N_\varepsilon$ と $\psi\in A(\mathbb{T})$ を定めると

$$\psi(t)=t \quad \text{on } [-\frac{\pi}{2N},\frac{\pi}{2N}],\qquad \|\psi\|_A=\frac{\pi}{2N}.$$

よって

$$\begin{aligned} 1-e^{i\psi(t)} &= 1-e^{it} \qquad \text{on } [-\pi/2N,\pi/2N],\\ \|1-e^{i\psi}\|_A &< e^{\|\psi\|}-1 = \pi/2N+O(N^{-2})\\ &= \varepsilon+O(\varepsilon^2) \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

<u>定理2.</u> もし $x\in B^{-1}$ が

$$M\equiv\sup_{m\in\mathbb{Z}}\|x^m\|<\infty,\quad \|1-x\|_{sp}\leq\varepsilon$$

を満たせば

$$\|1-x\|\leq M\cdot\omega[2\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\varepsilon}{2}]=M\varepsilon+O(\varepsilon^2).$$

証明. $d=2\,\mathrm{Sin}^{-1}\varepsilon/2$ とおくと，補題より $\exists f\in A(\mathbb{T})$ s.t.

$$f(t)=1-e^{it} \text{ on } [-d,d],\qquad \|f\|_A=\omega(d).$$

一方仮定より $sp(x) \subset \{e^{it} : -d \le t \le d\}$ となるから

$$\|1-x\| = \|\sum_n \hat{f}(n) x^n\| \le M\|f\|_A \le M\omega(d). \qquad \text{Q.E.D.}$$

系 (Browder [3], Sinclair [6]). もし $y \in B$ が
すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|e^{ity}\| \le M$ を満たせば,
$\|y\| \le M\|y\|_{sp}$ が成立する。

証明. $\varepsilon \equiv \|y\|_{sp} < 1$ としてよい. このとき

$$\sup_n \|e^{iny}\| \le M \quad かつ \quad \|1-e^{iy}\|_{sp} \le 2\sin\frac{\varepsilon}{2}$$

であるから前定理より $\|1-e^{iy}\| \le M\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. よって
y を ty で置き代えて

$$\|1-e^{ity}\| \le M\cdot t\varepsilon + O(t^2) \qquad (|t|<1).$$

両辺を t で割って $t \to 0$ とすれば, $\|y\| \le \|y\|_{sp} \cdot M$
を得る. Q.E.D.

これまでに述べたすべての結果は, やゝ自明であるが,
次に自明でない結果を与えよう。2つのコンパクト空間 X_1
と X_2 に対し, $X = X_1 \times X_2$ と置いて

$$V(X) = \mathbb{C}(X_1) \hat{\otimes} \mathbb{C}(X_2) \subsetneq \mathbb{C}(X)$$

と定義する。こゝに記号 $\hat{\otimes}$ は最大のクロス・ノルムに関するテンソル積の完備化を表わす。従って $V(X)$ は $\mathbb{C}(X)$ の稠密な部分環であって，

$$\begin{cases} f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x)\, h_m(y) & \forall x \in X_1 \ \&\ y \in X_2, \\ \text{但し} \quad M = \sum_{m=1}^{\infty} \|g_m\|_{\infty} \cdot \|h_m\|_{\infty} < \infty \end{cases}$$

の形の展開を持つ $f \in \mathbb{C}(X)$ の全体より成る。さらに f の V-norm $\|f\|_V$ は 上のような展開に関する M の下限で定義される。

<u>定理 3</u> (Kaijser [4]). $B = V(X)$ に対し (i) と (ii) を満たす $\eta(\varepsilon)$ が存在する。

この証明は次の２つの補題と Jensen の不等式より導かれるが，詳しい証明は [4] に譲る.

<u>補題.</u> $f_i, g_i \in \mathbb{C}(X_i)$, $\Lambda \in V'(X)$ とし

$$\|\Lambda\| \le 1, \quad \|f_i\|_{\infty} \le 1, \quad \|g_i\|_{\infty} \le 1 \quad (i=1,2)$$

$$\mathcal{Re}\ \langle f_1 \otimes f_2, \Lambda \rangle \ \ge\ 1 - x,$$

$$\mathcal{Re}\ \{\langle f_1 \otimes g_2 + g_1 \otimes f_2, \Lambda \rangle\} \ \ge\ 2 - y$$

を仮定する。このとき

$$|1 - \langle g_1 \otimes g_2, \Lambda \rangle| \le \eta(x,y), \quad \text{但し}$$

$$\eta(x,y) = \sqrt{2y} + \pi\,(2x + \sqrt{2x} + \sqrt{2y})^{1/2}.$$

補題 (Bohnenblust - Karlin [1]). 任意の Banach環 B と任意の $x \in B$ に対し

$$\|x\| \le e \cdot \sup\{ |\langle x, \varphi\rangle| : \|\varphi\|_{B'} = 1 = \varphi(1_B)\}.$$

さて各 $\varepsilon > 0$ と自然数 n に対しコンパクト集合

$$K_\varepsilon^n = \left\{ (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{T}^n : \left| 1 - \frac{e^{it_1} + \cdots + e^{it_n}}{n} \right| \le \varepsilon \right\}$$

を考え,

$$\left\| 1 - \frac{e^{it_1} + \cdots + e^{it_n}}{n} \right\|_{A(K_\varepsilon^n)} = \inf \|f\|_{A(\mathbb{T}^n)}$$

と定義する。こゝに inf は $f(t_1, \cdots, t_n) = 1 - (e^{it_1} + \cdots + e^{it_n})/n$ on K_ε^n を満たす $f \in A(\mathbb{T}^n)$ について取る。

予想.
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{n \ge 1} \left\| 1 - \frac{e^{it_1} + \cdots + e^{it_n}}{n} \right\|_{A(K_\varepsilon^n)} = 0.$$

もしこの予想が成立すれば, 定理3は無限個の $\mathbb{C}(X)$ 空間のテンソル積についても成立する。もっと一般に, 上の事を仮定すると, Fourier環 $A(G)$ の restriction algebra $A(E) = A(G)|_E$ と同型なすべての Banach環 B に対し (i) と (ii) を満たす $\eta(E)$ の存在が云える。近い将来に於て

再びこの問題について論ずる機会を与えられゝば，幸いである。

文　献

[1] H. F. Bohnenblust & S. Karlin, Geometrical properties of the unit sphere of Banach algebras, Ann. Math. 62 (1955), 217-229.

[2] F. F. Bonsall & M. J. Crabb, The spectral radius of a Hermitian element of a Banach algebra, Bull. London Math. Soc. 2 (1970), 178-180.

[3] A. Browder, On Bernstein's inequality and the norm of Hermitian operators, A. M. Month. 78 (1971).

[4] S. Kaijser, Representations of tensor algebras ---, Ark. Mat. 10 (1972), 107-141

[5] S. Saeki, Infinite tensor products in Fourier algebras, Tôhoku Math. J. 27 (1975), 355-379.

[6] A. M. Sinclair, The norm of a Hermitian element in a Banach algebra