数理解析研究所講究録
第265巻 1976年 67-75

テンソル積上の作用素の approximate eigenvalues について

北大 理　一瀬 孝

§0. 序. X, Y を Banach 空間, $X\otimes Y$ をそれらのテンソル積, $X\hat{\otimes}_\alpha Y$ をある crossnorm α に関する, その完備化とする. X, Y 上の恒等作用素を同じ I で表わし, $X\hat{\otimes}_\alpha Y$ 上のそれを $\mathbb{I}\,(= I\hat{\otimes}_\alpha I)$ で表わす.

A, B を, それぞれ, X, Y で稠密に定義された線型閉作用素とする. 多項式 $P(\xi,\eta) = \sum c_{jk}\xi^j\eta^k$ (of degrees m in ξ and n in η) に対して, $X\hat{\otimes}_\alpha Y$ 上の線型作用素

$$P\{A\otimes I, I\otimes B\} \equiv \sum c_{jk} A^j\otimes B^k, \quad \text{定義域} = D[A^m]\otimes D[B^n],$$

を考えよう. 簡単の為に, $P\{A\otimes I, I\otimes B\}$ は, $X\hat{\otimes}_\alpha Y$ で closable であるとし, その closure を $\mathbb{P}$ で表わす.

λ が $\mathbb{P}$ の eigenvalue のとき, λ に対する eigenvector として, λ が isolated finite-dimensional eigenvalue である場合を除いて ([1]), 必ずしも $v = x\otimes y$ ($x\in D[A^m]$, $y\in D[B^n]$)

の形のものが存在するとは限らない.

それでは, λが$\mathbb{P}$の approximate eigenvalue のときには, 対応する事情はどうか。この問題に答えるのが, このノートの主な目的である. ここで, λが, Banach 空間Z上の線型作用素 $T: D[T] \subset Z \to Z$ の <u>approximate eigenvalue</u> であるとは, ある列 $\{z_l\}_{l=1}^{\infty} \subset D[T]$, $\|z_l\|=1$, $l=1,2,\cdots$, が存在して, $(T-\lambda I)z_l \to 0$ $(l\to\infty)$ が成立するときを云う。Tの approximate eigenvaluesの全体を$\sigma_\pi(T)$で表わし, Tの <u>approximate point spectrum</u> と呼ぶ.

上の問題は, $\mathbb{P}$の approximate eigenvalue に関して, 次の如くなる:

$\lambda \in \sigma_\pi(\mathbb{P})$のとき, ある列 $\{x_l\}_{l=1}^{\infty} \subset D[A^m]$, $\{y_l\}_{l=1}^{\infty} \subset D[B^n]$, $\|x_l\|=\|y_l\|=1$, $l=1,2,\cdots$, が存在して, $(\mathbb{P}-\lambda \mathbb{I})(x_l\otimes y_l) \to 0$ $(l\to\infty)$ が成立するか.

この問題のおおざっぱな答は, αがある条件を満しておれば, (あるクラスの多項式$P(\xi,\eta)$に対して) Yes であるが, さもなければ, 一般には No である.

簡単の為に, 多項式 $P(\xi,\eta)=\xi+\eta$ に対応する作用素 $A\otimes I + I\otimes B$ に限定して話を進めよう.

§1. 結果.

先ず記号の説明，定義から始めよう．

Banach 空間 Z で定義された，すべての線型有界作用素 $S: D[S] \subset Z \to Z$（定義域は任意）の集合を $B(Z)$ で表わし，このうち $D[S] = Z$ なる，すべての S の集合を $L(Z)$ で表わす．

$X \otimes Y$ 上の norm α が，

$\|x \otimes y\|_\alpha = \|x\|\|y\|,\ \forall (x, y) \in X \times Y$; $\|x' \otimes y'\|_{\alpha'} = \|x'\|\|y'\|,\ \forall (x', y') \in X' \times Y'$,

を満しているとき，reasonable であると云う． reasonable norm α が，quasi-uniform (with constant k) であるとは，

$$
(1.1) \quad \begin{aligned} &\|(T \otimes S) u\|_\alpha \leq k \|T\| \|S\| \|u\|_\alpha, \\ &\qquad \forall (T, S) \in L(X) \times L(Y),\ \forall u \in X \otimes Y, \end{aligned}
$$

が成立するときを云う． k は，T, S, u に無関係な定数．
更に，α が，strongly quasi-uniform であるとは，α が quasi-uniform であって，しかも，(1.1) が

$$
\forall (T, S) \in B(X) \times B(Y),\quad \forall u \in D[T] \otimes D[S]
$$

に対して成立するときを云う．

norm $\varepsilon\ (=\lambda)$ は，strongly quasi-uniform $(k=1)$ である．より一般に，Grothendieck の意味の injective $\otimes$-norms も又，そうである $(k=1)$． 又，X, Y が共に Hilbert 空間のとき，norm $\pi\ (=\gamma)$ 及び prehilbertian norm σ は，strongly quasi-uniform になる $(k=1)$．

T を Banach 空間 Z で稠密に定義された線型閉作用素とするとき，T の spectrum, resolvent set, approximate point spectrum を，それぞれ，$\sigma(T)$, $\rho(T)$, $\sigma_\pi(T)$ で表わす．

T がある $0 \leq \theta_T < \pi$ に対して，条件：

$$\rho(T) \supset \complement S(\theta_T), \quad S(\theta_T) = \{\zeta\,;\, |\arg\zeta| \leq \theta_T\},$$

$$\|\zeta(\zeta I - T)^{-1}\| \leq M_T(\theta), \quad \theta = \arg\zeta, \ \forall \zeta \notin S(\theta_T)$$

を満しているとき，$(\theta_T, M_T(\theta))$-型であると云う．

得られた主結果は，次の定理である．

Theorem 1. α を $X \otimes Y$ 上の strongly quasi-uniform reasonable norm とする．A, B がそれぞれ $(\theta_A, M_A(\theta))$-，$(\theta_B, M_B(\theta))$-型であって，且 $0 \leq \theta_A + \theta_B < \pi$ を満しているとする．そのとき，

$$\sigma_\pi((A \otimes I + I \otimes B)^\sim) = \sigma_\pi(A) + \sigma_\pi(B).$$

（簡単の為に，$A \otimes I + I \otimes B$ は，$X \otimes_\alpha Y$ で closable であるとし，従て，$(A \otimes I + I \otimes B)^\sim$ はその closure を表わす．）

Theorem 1 の証明に必要な次の定理を挙げておこう．

先ず記号の説明から．稠密に定義された線型閉作用素 $T : D[T] \subset Z \to Z$ の extended spectrum, extended approximate point spectrum を $\sigma_e(T)$, $\sigma_{\pi e}(T)$ で表わす：

$$\sigma_e(T) = \begin{cases} \sigma(T) \cup \{\infty\}, & T\text{が非有界のとき}, \\ \sigma(T), & T\text{が有界のとき}, \end{cases}$$

$$\sigma_{\pi e}(T) = \begin{cases} \sigma_\pi(T) \cup \{\infty\}, & T\text{が非有界のとき}, \\ \sigma_\pi(T), & T\text{が有界のとき}. \end{cases}$$

$\sigma_e(T)$は Riemann 球 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の空でない compact 部分集合であり，$\sigma_{\pi e}(T)$は，$\sigma_e(T)$の compact 部分集合である．

さて，A，B を それぞれ X，Y で稠密に定義された線型閉作用素とし，$\rho(A) \neq \phi$，$\rho(B) \neq \phi$ とする．$\mathfrak{F}_\infty(A, B)$ を $\sigma_e(A) \times \sigma_e(B) \subset \mathbb{C}^{*2}$ の近傍で正則な関数全体とする．$f \in \mathfrak{F}_\infty(A, B)$ に対して，$X \hat{\otimes}_\alpha Y$ 上の線型有界作用素

(1.2)
$$\begin{aligned} f\{A\otimes I, I\otimes B\} \equiv\ & f(\infty,\infty)\, I \hat{\otimes}_\alpha I + (2\pi i)^{-1} I \hat{\otimes}_\alpha \Big(\int_{\partial V} f(\infty, \zeta_2)(\zeta_2 I - B)^{-1} d\zeta_2\Big) \\ & + (2\pi i)^{-1} \Big(\int_{\partial U} f(\zeta_1, \infty)(\zeta_1 I - A)^{-1} d\zeta_1\Big) \hat{\otimes}_\alpha I \\ & + (2\pi i)^{-2} \int_{\partial U}\int_{\partial V} f(\zeta_1, \zeta_2)(\zeta_1 I - A)^{-1} \hat{\otimes}_\alpha (\zeta_2 I - B)^{-1} d\zeta_1 d\zeta_2 \end{aligned}$$

を考えよう．ここに，U，V は，$\mathbb{C}^*$の開集合で，その境界∂U，∂V は，有限個の rectifiable Jordan curves からなり，$f(\zeta_1, \zeta_2)$は，$\overline{U} \times \overline{V} \subset \mathbb{C}^{*2}$ で正則となっているものである．但し，Aが有界のとき，$f(\infty, \zeta_2) \equiv 0$，$B$が有界のとき，$f(\zeta_1, \infty) \equiv 0$ と約束する．(1.2) の右辺は，U，V の選び方には依らない．

<u>Theorem</u> 2. α を $X\otimes Y$ 上の strongly quasi-uniform reasonable norm とする. そのとき $f\in\mathfrak{F}_\infty(A,B)$ に対して,

$$\sigma_\pi(f\{A\otimes I, I\otimes B\}) = f(\sigma_{\pi e}(A), \sigma_{\pi e}(B)).$$

<u>Remarks</u>. 1. Theorem 1 の下での A, B に対して, $P(\xi,\eta)=\xi+\eta$ は, 一般には, $\mathfrak{F}_\infty(A,B)$ に属していない.

2. Theorem 1 は, §0. で提起した問題の答を与えている. 即ち, $\lambda\in\sigma_\pi((A\otimes I+I\otimes B)^\sim)$ ならば, ある列 $\{x_\ell\}_{\ell=1}^\infty\subset D[A]$, $\{y_\ell\}_{\ell=1}^\infty\subset D[B]$, $\|x_\ell\|=\|y_\ell\|=1$, $\ell=1,2,\cdots$, が存在して,

$$[(A\otimes I + I\otimes B)^\sim - \lambda I\hat{\otimes}_\alpha I](x_\ell\otimes y_\ell) \longrightarrow 0 \quad (\ell\to\infty)$$

が成立する. 更に Theorem 1 は, 次のことをも主張している: ある $\mu,\nu\in\mathbb{C}$ が存在して, $\mu+\nu=\lambda$ であって

$$(A-\mu I)x_\ell\to 0, \quad (B-\nu I)y_\ell\to 0 \quad (\ell\to\infty).$$

3. α が quasi-uniform であるが, strongly quasi-uniform ではないとき, Theorems 1 & 2 は必ずしも成立しない.

<u>Example</u>. 適当に Banach 空間 X, Y 及び isomorphism $A: X\to X$ を取って, $A\hat{\otimes}_\pi I$ が $X\hat{\otimes}_\pi Y$ 上の線型有界作用素として閉値域を持たないようにできる. このとき, π は, quasi-uniform $(k=1)$ であるが, strongly quasi-uniform ではない. 従って, $0\in\sigma_\pi(A\hat{\otimes}_\pi I)$ であるが, $0\notin\sigma_\pi(A)=\sigma_\pi(A)\cdot\sigma(I)$ である.

§2. 証明の概略

Proof of Theorem 2. "左辺⊃右辺" の証明は容易．逆の inclusion の証明は，次の2つの lemmas を用いて行う．特に，Słodkowski-Żelasko [2] による Lemma 1 が本質的役割を果す．

Lemma 1. $\{T_1, \cdots, T_{p+q}\} \subset L(Z)$ であって，互に commute するとする．もし

$$\inf\{\textstyle\sum_{j=1}^{p} \|T_j z\| \;;\; z \in Z, \|z\|=1\} = 0$$

ならば，ある $(\lambda_1, \cdots, \lambda_q) \in \mathbb{C}^q$ が存在して

$$\inf\{\textstyle\sum_{j=1}^{p} \|T_j z\| + \sum_{k=1}^{q} \|(T_{p+k} - \lambda_k I) z\| \;;\; z \in Z, \|z\|=1\} = 0$$

が成立する．

Lemma 2. α が $X \otimes Y$ 上の strongly quasi-uniform reasonable norm とする．そのとき，任意の X で稠密に定義された線型閉作用素 A に対して，

$$\sigma_\pi(A \hat{\otimes}_\alpha I) = \sigma_\pi(A).$$

Proof of Theorem 1. 同じく "左辺⊃右辺" の証明は容易．逆の inclusion を示せばよい．$\mathbb{P} = (A \otimes I + I \otimes B)^{\sim}$

とおく．$\lambda_0 \notin \sigma(A)+\sigma(B)$ を1つとって固定する．定理の条件の下で，$\sigma(A)+\sigma(B)=\sigma(\mathbb{P})$ が成立するから，$(\mathbb{P}-\lambda_0\mathbb{I})^{-1}$ が存在して，$\mathcal{L}(X\otimes_\alpha Y)$ に属し，それは，

$$(\mathbb{P}-\lambda_0\mathbb{I})^{-1}=(2\pi i)^{-2}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B}(\zeta_1+\zeta_2-\lambda_0)^{-1}(\zeta_1 I-A)^{-1}\otimes_\alpha(\zeta_2 I-B)^{-1}d\zeta_1 d\zeta_2$$

で与えられる．Γ_A, Γ_B は，A, B が $(\theta_A, M_A(\theta))$-, $(\theta_B, M_B(\theta))$-型で，$0\leq\theta_A+\theta_B<\pi$ であることを考慮して，$\rho(A)$, $\rho(B)$ の中で適当に取った arcs である．このとき，

$$(\zeta+\eta-\lambda_0)^{-1}=(2\pi i)^{-2}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B}(\zeta_1+\zeta_2-\lambda_0)^{-1}(\zeta_1-\zeta)^{-1}(\zeta_2-\eta)^{-1}d\zeta_1 d\zeta_2$$

だから，(広義) Riemann 積分の定義から，Riemann sums の列 $\{f_n(\zeta,\eta)\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{F}_\infty(A,B)$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty}f_n(\zeta,\eta)=(\zeta+\eta-\lambda_0)^{-1},\ \text{pointwise on } \sigma_e(A)\times\sigma_e(B).$$

しかも，

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n\{A\otimes I, I\otimes B\}-(\mathbb{P}-\lambda_0\mathbb{I})^{-1}\|=0.$$

(但し，$\infty\in\sigma_e(A)$ のとき，$(\infty+\eta-\lambda_0)^{-1}=0$, $\forall\eta\in\sigma_e(B)$，及び $\infty\in\sigma_e(B)$ のとき，$(\zeta+\infty-\lambda_0)^{-1}=0$, $\forall\zeta\in\sigma_e(A)$ と約束する．)

よって，Theorem 2 及び次の2つの lemmas を用いて，

$$\sigma_\pi((\mathbb{P}-\lambda_0\mathbb{I})^{-1})=\{(\mu+\nu-\lambda_0)^{-1};\ \mu\in\sigma_e(A),\ \nu\in\sigma_e(B)\}$$

を証明することができる．これより，Theorem 1 を得る．証明の中で，Lemma 3 が本質的な役割を果す．

<u>Lemma</u> 3. 上の $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，$(\xi+\eta-\lambda_0)^{-1}$ に $\sigma_e(A)\times\sigma_e(B)$ 上で 一様収束する.

<u>Lemma</u> 4. $T\in L(Z)$，$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L(Z)$ であって $\lim_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$ とする.

a) $\lambda_n\in\sigma_\pi(T_n)$, $n=1,2,\cdots$, $\lambda=\lim_{n\to\infty}\lambda_n$ ならば，$\lambda\in\sigma_\pi(T)$.

b) T, T_n, $n=1,2,\cdots$, は 互に commute するとする. そのとき，各 $\lambda\in\sigma_\pi(T)$ に対して，ある列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lambda_n\in\sigma_\pi(T_n)$, $n=1,2,\cdots$, が存在して，$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$.

References

[1] 筆 者 : Essential spectra for tensor products of linear operators, ∞次元空間のテンソル積, 数理研講究録 228(1975年3月).

及び

筆 者 : On the spectral properties of tensor products of linear operators, スペクトル理論・散乱理論とその周辺, 数理研講究録 242(1975年 6月).

[2] Słodkowski-Żelasko: On joint spectra of commuting families of operators, Studia Math.50(1974),127-148.