数理解析研究所講究録
第266巻 1976年 130-141

二次以上の charactersが消える包合的偏微分方程式系について

立教大 理　　垣江邦夫

§0. 序

E. Cartanは1900年頃に包合系と言われる概念を導入して偏微分方程式系の解析的局所解の存在を示した(いわゆるCartan-Kählerの定理)。それより前に、Cauchyは(単独)一階偏微分方程式の解がLagrange-Charpit系と言われる常微分方程式系を積分することによって得られることを示し、又、Monge、Ampère、Darboux等は、主として二独立変数二階(単独)偏微分方程式に対して、その解法を常微分方程式系の積分に帰着させる方法を研究した。これらと、最近の松田(道彦)及び講演者の研究を踏まえて次の問題を提起する:

問題：偏微分方程式系のCauchy問題の解法を、完全積分可能なPfaff系の積分に帰着させよ。

講演者は、Darbouxの方法が包合系の理論及びCartanの

characteristicsの理論の立場からとらえられることに着目し、一つの二変数函数に関する包合系へDarbouxの方法を拡張した[4]。しかしながら、既存の理論は、一部の研究はあるものの、独立変数の数が三以上の場合を本質的にとらえ得るものではない。講演者は、上述の研究[4]をさらにとらえ直し、多独立変数のある種の包合系に対してDarbouxの求積法に類似したそれを得ることに成功した。解かねばならない問題は次の二つに分けられる：

I. 与えられた包合系Σに対し、その解がまたΣのそれとなる新しい包合系を構成すること。

II. Cartanのcharacteristicsの理論が適用され得る包合系を見出すこと。

我々の研究において必要な、問題IIに対する答は、Cartan[1]によって得られている。問題Iを解くことが我々の主要な研究であり、それは即ち包合系の構造を詳しく調べることに他ならない。ここでは、一未知函数に関する二次以上のcharactersが消える包合系に対して考察を行う。研究の出発点は、特性イデアルの導入とその性質を詳しく調べることにある。議論は、(実又は複素)解析的範疇において行う。

§1. 包合系とそのcharacters

pをMからNへの射影とする fibered manifold (M, N, p) における l 階偏微分方程式系Φは、$J^l(M, N, p)$上の解析函数の芽の層$\mathcal{O}(J^l)$のイデアルの部分層として定義される。ここに $J^l = J^l(M, N, p)$ は (M, N, p)の切断の l-jetsからなる空間を表わす。以後Φは一未知函数に関する系と仮定する；即ち $\dim M = \dim N + 1$ を仮定する。(M, N, p)に付随するMの局所座標系が$(x_1, x_2, \cdots, x_n, z)$, $n = \dim N$, で与えられる時 J^lの局所座標系は次で与えられる：

$$(x_1, \cdots, x_n, z, p_{i_1 \cdots i_m}; 1 \leqq i_1, \cdots, i_m \leqq n, 1 \leqq m \leqq l).$$

ここに $p_{i_1 \cdots i_m} = \partial^m z / \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}$.

p^l_{l-1}でJ^lからJ^{l-1}への自然な射影を表わす。$X \in J^l$に対し、接空間$T_X(J^l)$の部分空間$Q_X(J^l)$をdp^l_{l-1}の核として定義する。それは$\{\partial/\partial p_{i_1 \cdots i_l}; 1 \leqq i_1, \cdots, i_l \leqq n\}$で張られる部分空間である。

Φの積分点の全体を$I\Phi$と記す。各$X \in I\Phi$に対し、空間$C_X(\Phi)$は次で定義される：

$$C_X(\Phi) = \{\mathfrak{X} \in Q_X(J^l); \mathfrak{X}(\varphi) = 0, \varphi \in \Phi_X\}.$$

この空間は自然に$Q_{\bar{X}}(J^{l-1}) \otimes T_a^*(N)$ ($\bar{X} = p^l_{l-1} X$, $a = X$のNへの射影)の部分空間とみなし得る。$T_a(N)$の要素の系$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$に対して

$$C_X(\Phi)(v_1, \cdots, v_k) = \{\mathfrak{X} \in C_X(\Phi); \mathfrak{X}(v_1) = \cdots = \mathfrak{X}(v_k) = 0\}$$

と定義する。整数 $g_k(X)$, $X\in I\Phi$, を次で定義する：

$$g_0(X) = \dim C_X(\Phi),$$

$$g_k(X) = \min\{\dim C_X(\Phi)(v_1,\cdots,v_k)\,;\, v_1,\cdots,v_k\in T_a(N)\}\ (k\geqq 1)。$$

Φ が $X\in I\Phi$ で包合的のとき、Φ の X における $1, 2, \cdots, n$ 次の characters $s_1(X), s_2(X), \cdots, s_n(X)$ は次式で定義される；

$$s_1(X)=g_0(X)-g_1(X),\ s_2(X)=g_1(X)-g_2(X),\ \cdots,\ s_n(X)=g_{n-1}(X)-g_n(X)。$$

これらは Cartan-Kähler の定理においてその意味が見出される量である．定義から $g_1(X)=0$ なることと $s_2(X)=\cdots=s_n(X)=0$ なることとは同等である。この時 $s_1(X)=\dim C_X(\Phi)$. この条件下では．倉西[5]と松田[6]により与えられた包合系である為の判定条件は．より簡単に述べ得る。その為に

$$r_l(X) = \dim \langle \pi_l^* dF\,;\, F\in\Phi_X\rangle,$$

$$r_{l+1}(X) = \dim \langle \pi_{l+1}^* dF\,;\, F\in (p\Phi)_{\tilde{X}}\rangle$$

と置く．ここに $\pi_q^* dF = \sum_{i_1\leqq\cdots\leqq i_q} \partial F/\partial p_{i_1\cdots i_q}\, dp_{i_1\cdots i_q}$, $\langle \# \rangle$ は $\#$ で張られるベクトル空間，$p\Phi$ は Φ の (total) prolongation，$\tilde{X}$ は X 上の $(l+1)$-jet とする。

<u>定理1</u>．Φ が $X_0\in I\Phi$ で包合的かつ $s_2(X_0)=\cdots=s_n(X_0)=0$ である為の必要十分条件は次の四条件である：

(i) X_0 は Φ の通常積分点であり $g_1(X_0)=0$。

(ii) $r_l(X)$ は $I\Phi$ での X_0 の近傍上一定である．

(iii) $I\Phi$ での X_0 の近傍上 $r_{l+1}(X) = r_l(X) + \binom{l+n-1}{n-2}$.

(iv) ΦはX₀で p-closedである。

§2. 特性イデアル

下に定義するΦの特性イデアルという概念は、そのイデアル論的考察によって包合系Φの構造をより詳しく知ることができるという事実によって、非常に重要である。

XをΦの積分点とする。$T_a(N)$ ($a = X$のNへの射影)の底 $\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n$ をそれぞれ $\xi_1, \cdots, \xi_n$ と記す。Kでもって、議論を実又は複素の範疇で行うかに従って、実数体又は複素数体を表わす。ΦのXにおける特性イデアル$\mathfrak{M}$を次の性質(*)を有し、多項式達

$$\sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_l} \partial F(X)/\partial p_{i_1 \cdots i_l} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_l} \quad (F \in \Phi_X)$$

を含む $K[\xi_1, \cdots, \xi_n]$ における最小のイデアルとして定義する：

(*) $\xi_1 P, \xi_2 P, \cdots, \xi_n P \equiv 0 \ (\mathfrak{M}) \Rightarrow P \equiv 0 \ (\mathfrak{M})$。

古典的イデアル論によれば、$\mathfrak{M}$は最大準素イデアルによる簡約された表示をもつ：

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{Q}_1 \cap \mathfrak{Q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_\nu .$$

ここに$\mathfrak{Q}_j$は同次準素イデアルである。この簡約された表示において、成分の個数νと、$\mathfrak{Q}_1, \cdots, \mathfrak{Q}_\nu$に属する(同次)素イデアル$\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_\nu$は一意的に定まる。性質(*)をもたせた

ことによって、$\mathfrak{M}$ が単位イデアルでない限り、各素イデアル $\mathfrak{p}_j$ は、$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ で生成されるイデアルを含まない。

<u>命題</u>. Φ が X で包合的かつ $s_2(X) = \cdots = s_n(X) = 0$ ならば、$\mathfrak{M}$ に随伴する素イデアル $\mathfrak{p}_j$ は、$\mathfrak{M}$ が単位イデアルでない限り、すべて射影次元 0 である。

以下、この命題の条件下で考え、更にもし K が実数体ならば、$\mathfrak{M}$ の零点はすべて実であるものと仮定する。この時、各成分 $\mathfrak{q}_j$ は孤立成分であり、従ってそれはそれに随伴する素イデアル $\mathfrak{p}_j$ によって一意的にきまる。成分 $\mathfrak{q}_j$ の指数は $\min\{\sigma ; \mathfrak{p}_j^{\sigma} \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_j)\}$ として定義される。単様イデアルの理論 (Waerden [7], §90) を応用すれば、定理1を用いて次の基本的結果を示すことができる。

<u>定理2</u>. Φ は X で包合的かつ $s_2(X) = \cdots = s_n(X) = 0$ と仮定する。更に K が実数体のとき $\mathfrak{M}$ のすべての零点は実であると仮定する。$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_\nu$ をそれぞれ $\mathfrak{M}$ の成分 $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_\nu$ の指数とする。この時 $\sum_{j=1}^{\nu} \varepsilon_j \leqq s_1(X)$。もしすべての ε_j が 1 に等しいならば、$\nu = \sum_{j=1}^{\nu} \varepsilon_j = s_1(X)$。

注意。$n=2$ の時を除き上の不等式の等号は一般には成立しない。

§3. 包合系の構成

序に述べた問題『Φを含む新しい包合系を構成すること』に対する解答を得る為には、更に空間$C_x(\Phi)$に関する代数的考察を必要とする；即ち$C_x(\Phi)$の部分空間が包合的部分空間になる為の条件を見出さねばならない。この考察は我々の議論の一つの要点ではあるが、ここでは省略していきなり解析的考察に入る。議論は、より一般な条件下でも実行可能であるが、説明を簡単にする為次の条件下で考える。

(H_1) ΦはX_0で包合的かつ$s_2(X_0)=\cdots=s_n(X_0)=0$.

(H_2) Kが実数体のときは、ΦのX_0における特性イデアル$\mathfrak{M}$のすべての零点は実である。更に$\mathfrak{M}$の最大準素イデアルによる簡約された表示の各成分の指数は1に等しい。

この条件(H_1), (H_2)の下では、$\mathfrak{M}$の簡約された表示の各成分は素イデアルであり、従って$\mathfrak{M}$は次の形の表示を持つ：

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{P}_\nu ,$$

ここに$\mathfrak{P}_j$は、$n-1$個の一次形式から生成される素イデアルである。定理2によれば$\nu=s_1(X_0)$である。

仮定によりΦはX_0で包合的であるから、次の微分形式系$\Sigma(\Phi)$はX_0でNに関して包合的である([4], §1参照)：

$$(\Sigma(\Phi))\quad\left\{\begin{array}{l} F=0,\quad dF=0\qquad (F\in\Phi_{X_0}),\\ dp_{i_1\cdots i_m}-\sum_{i=1}^{n} p_{i_1\cdots i_m i}\,dx_i=0,\\ \sum_{i=1}^{n} dp_{i_1\cdots i_m i}\wedge dx_i=0\quad (1\leqq i_1,\cdots,i_m\leqq n,\ 0\leqq m\leqq l).\end{array}\right.$$

ここに $m=0$ の時 $p_{i_1\cdots i_m}=z$ とする。

Φ の Monge 特性系は $\Sigma(\Phi)$ の特異要素を決定する Pfaff 系として定義される。これらは $\mathfrak{M}$ での表示の各成分 R_j（より正確には、X_0 の $I\Phi$ での近傍上定義された成分 R_j の場）に対応して得られる $I\Phi$（での X_0 の近傍）上の $\nu=i_1(X_0)$ 個の Pfaff 系である。R_j に対応して得られる特性系を $\Delta^l(R_j)$ と記す。u を $X\in I\Phi$ の近傍上定義された l-jets の函数とする。X の $I\Phi$ での近傍上 $du\equiv 0 \pmod{\Delta^l(R_j)}$ となる時、u は $\Delta^l(R_j)$ の X での<u>積分</u>であるといい、$u(X)=0$, $du(X)\neq 0$ かつ $du\equiv 0 \pmod{\Delta^l(R_j)}$ が、$u=0$ で定義される $I\Phi$ の部分多様体での X の近傍上成り立つ時、u は $\Delta^l(R_j)$ の X における<u>相対積分</u>であると言う。

$\Sigma(\Phi)$ の prolongation $p^m\Sigma(\Phi)$ を考えることによって、高次の Monge 特性系及び高次の（相対）積分も定義される。

l-jets の函数 u が <u>X で Φ と独立である</u>とは、$u=0$ が $\Phi=0$ から導かれぬ時、即ち精確には $\pi_l^* du\neq 0 \pmod{\pi_l^* dF;\ F\in\Phi_X}$ である時にいう。

$J^l(M,N,p)$ の開集合 $\mathcal{V}$ 上の函数 $u_1,\cdots,u_q$ に対して $\mathcal{V}$ 上の l 階偏微分方程式系 $\Phi^l(u_1,\cdots,u_q)$ を、Φ と $u_1,\cdots,u_q$ によって生成される層 $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ のイデアルの部分層として定義する。明らかに、$\Phi^l(u_1,\cdots,u_q)$ の解は Φ の解である。

新しい包合系の構成に関する我々の基本的結果は、次の二定理である。

定理3. (H_1)と(H_2)を仮定する．uをX_0の近傍上のℓ-jetsの函数で、ΦとX_0で独立である函数とせよ。この時、$\Phi^\ell(u)$がX_0で包合的である為の必要十分条件は、uがある特性系$\Delta^\ell(\mathfrak{P}_j)$の相対積分となることである．この場合、$\Phi^\ell(u)$の$X_0$での特性イデアルは、$\mathfrak{M}=\mathfrak{P}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{P}_\nu$から成分$\mathfrak{P}_j$を省くことによって得られる。

定理4. (H_1)と(H_2)を仮定する．$u_1,\cdots,u_q$をX_0でΦと独立な函数で、それぞれ、相異なるq個の特性系$\Delta^\ell(\mathfrak{P}_{j_1}),\cdots,\Delta^\ell(\mathfrak{P}_{j_q})$の$X_0$における相対積分とする。この時、偏微分方程式系$\Phi^\ell(u_1,\cdots,u_q)$は$X_0$で包合的である．又、$\Phi^\ell(u_1,\cdots,u_q)$の$X_0$における特性イデアルは、$\mathfrak{M}=\mathfrak{P}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{P}_\nu$から$q$個の成分$\mathfrak{P}_{j_1},\cdots,\mathfrak{P}_{j_q}$を省くことにより得られる。

これらの定理は、高次の特性系及び積分が現われる場合へ拡張されうる。

§4. 求積法

条件(H_1)をみたす系Φに対しては、Cartan-Kählerの定理により、次のCauchy問題がもっとも妥当である："与え

られた$\Sigma(\Phi)$の非特性な積分曲線を通る$\Sigma(\Phi)$のn次元積分多様体を求めよ。” ここにおける多様体はすべて空間$J^{\ell}(M, N, p)$の部分多様体であるが、Nへの射影が退化しないような多様体を意味するものとする。以後 Cauchy 問題と言えばこの問題を指す。

Φに対する Cauchy 問題は、Cartan-Kähler の定理によって、一意的な局所解を持つ（Kähler [3]）。我々は、序に説明した問題『Cauchy 問題の解法を、完全積分可能な Pfaff 系の積分に帰着させよ。』を考察する。$\nu = s_1(X_0) = 0$ の時は、ΦはX_0で完全積分可能であり、各$X \in I\Phi$を通る一意的な解が存在する。この解は、完全積分可能な系$\Sigma(\Phi)$を積分して得られる。従って、この場合問題は自明となる。

1°) $\nu = 1$ の時：Cauchy問題の解法は、完全積分可能な Pfaff系の積分に帰着させることが出来る。より精確に言えば、解は、初期曲線を通る一助変数の$n-1$次元特性多様体の族によって生成される。

この事実は、Cartan による次の結果(i)、(ii) から従う：

(i) $s_1(X_0) = 1$, $s_2(X_0) = \cdots = s_n(X_0) = 0$ ならば、微分形式系$\Sigma(\Phi)$は、$n-1$ 次元の Cauchy-Cartan characteristics を持つ（Cartan [1], p. 306）。

(ii) Cartan の意味の特性系は、完全積分可能である

(Cartan [2], Chap. III).

完全積分可能なPfaff系は、常微分方程式系を積分することにより解かれ得ることも注意しておく。

2°) $\nu > 1$ の時: この場合、一般には、1° に述べたような状況、すなわち、解法が完全積分可能なPfaff系の積分に帰着する状況にはない。しかしながら、我々が既に得た結果を組合せることにより、Darbouxの方法を一般化した求積法を得ることができる。それは次のように述べられる:

"$\nu-1$ 個の相異なるMonge特性系がそれぞれ互と独立な二つの独立な積分をもつならば、Cauchy問題の解法は、完全積分可能なPfaff系の積分に帰着される。"

尚、Monge特性系の積分は、常微分方程式系を積分することにより求められることを注意しておく。

文献

[1] E. Cartan: *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales*. Ann. Sci. École Norm. Sup., 3e série, 18, 241-311.

[2] ——: *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*. Hermann, Paris (1945).

[3] E. Kähler: Einführung in die Theorie der

Systeme von Differentialgleichungen. Teubner, Leipzig (1934).
[4] K. Kakié : On involutive systems of partial differential equations in two independent variables. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I A, 21, 405～433.
[5] M. Kuranishi : Lectures on involutive systems of partial differential equations. Publ. Soc. Mat. São Paulo (1967).
[6] M. Matsuda : Cartan-Kuranishi's prolongation of differential systems combined with that of Lagrange and Jacobi. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., 3, 69-84.
[7] B. L. van der Waerden : Moderne Algebra II (2nd edition). Springer, Berlin (1940).