数理解析研究所講究録
第266巻 1976年 176-188

一般線型偏微分方程式に対する局所境界値問題とその応用*)

東大 教養　金子 晃

実解析係数の m 階線型偏微分方程式 $p(x,D)u=0$ の解 u が非特性実解析的超曲面 $S=\{\varphi(x)=0\}$ の一方の側 $\varphi(x)>0$ で存在すれば必ず S 上への境界値 $b_j^+(u)$, $j=0,\cdots,m-1$ を取ることができる。もっとも解 u が境界面 S に近づくときの増大度に制限がなければ，境界値は一般に佐藤の超函数となる。もともと佐藤の超函数は Cauchy-Riemann の方程式 $\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}=0$ という楕円型の方程式の半平面 $y>0$（或いは $y<0$）における解の"理想的"境界値として導入されたものであるが，任意の方程式に対して解の範囲を超函数にまで拡げても境界値がやはり超函数の範囲で得られるという意味で境界値問題について閉じた函数概念の拡張となっている。

---

*) これは同じ頃行われた偏微分方程式札幌シンポジウムにおける筆者の報告の原稿である。本シンポジウムの予稿は Proc. Japan Acad. にそのまま掲載される予定である。

以下簡単のため非特性境界面を $x_1=0$ とする。u を $p(x,D)u=0$ の $x_1>0$ における超函数解とすれば超函数の flabbiness により $x_1=0$ を超えて u の拡張である超函数 $[u]$ を台が $x_1\geqq 0$ に含まれるように作ることができる。$p(x,D)[u]$ は台が $x_1=0$ に含まれる超函数となるから，初めから台が $x_1=0$ に含まれる超函数 v に p が掛かっているようなもの $p(x,D)v$ を modulo として，$\sum_{j=0}^{m-1} b_j^+(u)\delta^{(m-j-1)}(x_1)$ の形のものを作ることができる。ここに $b_j^+(u)$ は $x'=(x_2,\cdots,x_n)$ のみの超函数である。この操作は一種の割り算であり，u が distribution としてのびれば拡張 $[u]$ も distribution でとれ，従って $b_j^+(u)$ も distribution となる。v を $[u]$ に繰り込むことにより

$$(1)\qquad p(x,D)[u]=\sum_{j=0}^{m-1} b_j^+(u)\,\delta^{(m-j-1)}(x_1)$$

を満たす $[u]$ をとることができる。この様な $[u]$ は一意に定まり，u の標準的拡張と呼ばれる。$b_j^+(u)$ は境界作用素系 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^j\right\}_{j=0}^{m-1}$ の双対系に関する境界値に相当する。一般の正規境界作用素系 $\{B_j(x,D)\}_{j=0}^{m-1}$ に関する境界値 $b_j^+(u)=B_j(x,D)u\big|_{x_1\to+0}$ を得るには，この双対系 $\{C_j(x,D)\}_{j=0}^{m-1}$ を用いて(1)の代わりに

$$(2)\qquad p(x,D)[u]=\sum_{j=0}^{m-1} {}^tC_{m-j-1}(x,D)\left(b_j^+(u)\,\delta(x_1)\right)$$

とおけばよい。小松－河合[10]は以上の手続きを Cauchy-

Kowalevski の定理の双対表現を用いて裏付けし，境界値 $b_j^+(u)$ が解 u により局所的に定まる（層の準同型になる）ことを証明した。

逆に方程式の階数だけの境界値 $b_j^+(u)$ が指定されると解は境界面の近傍で一意に定まる。これは Holmgren の定理の云い換えである。ただし境界値を勝手に与えたとき，それを達成する解が必ずしも存在するとは限らない。これは既に初期値問題においてそうであった。初期値問題は境界値問題の特別な場合である。$x_1=0$ の両側 $x_1>0$，$x_1<0$ で解が存在して，$x_1=0$ への両側から境界値が一致するとき解は $x_1=0$ でつながり，このとき境界値は初期値となる。まず初期値問題の結果を思い出そう。以下双対変数を $\xi=(\xi_1,\xi')$，$\xi'=(\xi_2,\cdots,\xi_n)$ と記す．$p_m(x,D)$ を p の主部とする。

<u>定理 1</u>（河合[8]，Bony-Schapira[2]）$p(x,D)$ の ξ_1 に関する特性方程式 $p_m(x,\xi_1,\xi')=0$ が $\xi'\in R^n$ に対して必ず m 実根を持てば任意の初期データ $u_j(x')$ に対し初期値問題

$$(3)\qquad \begin{cases} p(x,D)u=0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^j u\Big|_{x_1=0}=u_j(x'),\quad j=0,\dots,m-1 \end{cases}$$

の超函数解 u が局所的に存在する。

これを詳しくしたものに次がある。（[7]）

定理2（柏原－河合） I を $\mathbb{R}^n \times iS_\infty^{*n-2}$ の開集合で $I^a = I$ を満たすものとする。（a は S_∞^{*n-2} において対蹠点に写す写像.） ξ_1 に関する特性方程式 $p_m(x, \xi_1, \xi') = 0$ が $(x, i\xi' dx'\infty) \in I$ について必ず m 実根を持つならば, $S.S.\, u_j \subset\subset I|_{x_1=0}$ なる任意の初期データ u_j に対し初期値問題(3)の超函数解 u が局所的に存在する。

これと同様境界値問題について次が成り立つ.

定理3　I を $\mathbb{R}^n \times iS_\infty^{*n-2}$ の開集合とする。$\forall (x, i\xi' dx'\infty) \in I$ に対し ξ_1 に関する特性方程式 $p_m(x, \xi_1, \xi') = 0$ は虚部負の根を持たぬとする。このとき $S.S.\, u_j \subset\subset I|_{x_1=0}$ なる任意の境界データ u_j に対し境界値問題

$$(4) \quad \begin{cases} p(x, D)u = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^j u \Big|_{x_1 \to +0} = u_j(x'), \quad j = 0, \cdots, m-1 \end{cases}$$

の超函数解 u が $x_1 > 0$ において局所的に存在する。

つまり $S.S$ の条件が半分で済む. $x_1 < 0$ に対する境界値問題のときは仮定における虚部の符号を反対にせねばならぬ。

初期値問題のとき定理1の条件が必要なことは信ぜられているが未だ完全な証明は与えられていない。直観的には $p(x, D)u = 0$ の解は佐藤の基本定理により $S.S.\, u$ が $p(x, D)$ の特性多様体

$$V(p) = \{(x, i\xi dx\infty);\ p_m(x, \xi) = 0\}$$

に含まれる，ということから従うと説明される。例えば初期値問題については，このような特異スペクトルを持つ $u(x)$ の $x_1=0$ への制限として一般論から

<u>定理 4</u>（河合[9]）S.S. $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^j u\big|_{x_1=0}$, $j=0,\cdots,m-1$ は $V(p)\big|_{x_1=0}$ の赤道面 $\xi_1=0$ への射影像に含まれる。

故にもしもこれが $R^{n-1}\times S_\infty^{*\,n-2}$ の真部分集合となれば，初期値 u が一般にとれるはずはない。このことから，もし初期値問題が常に可解ならば ξ_1 に関する特性方程式 $p_m(x,\xi_1,\xi')=0$ は少くとも一つの実根を持たねばならぬことが直にわかる．m 根とも実であるべきことを云うには m 個のデータが任意に選べることを使ってもっと立ち入った議論が必要であり，それはまだなされていない。

境界値問題についてこの議論に相当するのは次の定理である。

<u>定理 5</u>　$x_1>0$ における解 u に対し S.S. $b_j^+(u)$ は

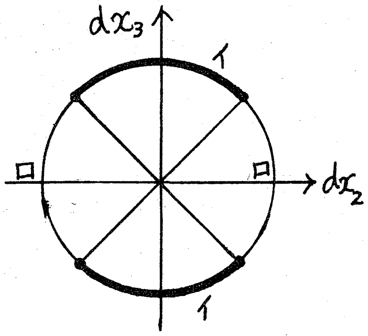
$$V(p)^{\mathbb{C}}\cap\{\mathrm{Im}\,\xi_1\geqq 0,\ \mathrm{Im}\,\xi'=0\}$$

の赤道面 $\xi_1=0$ への射影像に含まれる。ここに $V(p)^{\mathbb{C}}$ は p の複素特性多様体を表わす．

$x_1<0$ からの境界値 $b_j^-(u)$ なら $\mathrm{Im}\,\xi_1\leqq 0$ とする。初期値は両側からの境界値なので $\mathrm{Im}\,\xi_1=0$ となり定理 4 に帰着する。

<u>例 1</u>　波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0$ を考える。解の x_1

=0 への境界値の S.S. は上の定理では何ら制限されない。それ故に混合問題が意味を持つのだが、これをもう少し詳しく見てみよう。図のイにおいては $V(p)^{\mathbb{C}}\cap\{\mathrm{Im}\,\xi_1\geqq 0,\ \mathrm{Im}\,\xi'=0\}$ からの射影は二重であり，この内部に S.S. が含まれる境界データについては二個独立に与えても境界値問題の解がある（実はこの場合は初期値問題すら解ける）．一方ロの部分は射影が一重でしかない。故に通常混合問題で知られる如く全体としては（C^∞ データにしろ L^2 データにしろ）一つしか与えられないことになる。



S^{*1}_∞ の図

そこで一般に I を $\mathbb{R}^n_x\times iS^{*n-2}_\infty$ の開集合とする。$V(p)^{\mathbb{C}}\cap\{\mathrm{Im}\,\xi_1\geqq 0,\ \mathrm{Im}\,\xi'=0\}$ から $\xi_1=0$ への射影が I 上に k 重になっていれば，S.S. $u_j \ll I|_{x_1=0}$ を満たす k 個の勝手な境界値 $u_j(x')$ に対し境界値問題

$$(5)\qquad \begin{cases} p(x,D)u=0 \\ B_{m_j}(x,D)u|_{x_1\to+0}=u_j, \quad j=1,\cdots,k \end{cases}$$

の $x_1>0$ における解が少くとも一つ局所的に存在することが期待される。ここに $\{B_{m_j}\}$ は正規境界作用素系（の一部）とする。この逆が正しいことも期待される。良い特性根の部分と悪い特性根の部分が作用素としてきれいに分割できることを

仮定すれば双曲型混合問題と同様の議論ができるであろう。解として超函数を許した場合，これらの条件（Lopatinski条件に相当するものも含めて）がどこまで実際必要なものか興味のある問題である。データが減った場合一意性はもちろんくずれるが，混合問題の初期条件のように何らかのこれを保障する定式化を探すことにも興味がある。

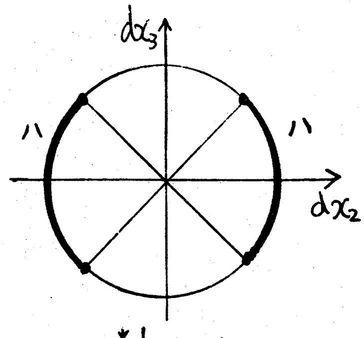
超函数解の場合はこのくらいにして実解析解の場合にうつろう。この場合にはデータのS.S.は当然さらに少なくなるはずである。実際このときには初期値のS.S.はϕとなり，初期値問題に関しては面白いことは何もない。境界値については

定理6　$x_1>0$ における $p(x,D)u=0$ の実解析解 u に対し S.S. $b_j^+(u)$ は $V(p)^c \cap \{\mathrm{Im}\,\xi_1>0,\ \mathrm{Im}\,\xi'=0\}$ の赤道面 $\xi_1=0$ への射影像の閉包の $x_1=0$ との交わりに含まれる。

云いかえると，ξ_1 に関する特性方程式 $p_m(x,\xi_1,\xi')=0$ の根の虚部が非正となるような集合の内点 $(x',i\xi'dx'\infty)$ は S.S. $b_j^+(u)$ に含まれない。これは閉包操作を除けば超函数解の場合の定理5における条件 $\mathrm{Im}\,\xi_1\geq 0$ から等号を除いたものになっている。閉包操作は一般には省けない。さらに詳しい個別的吟味が必要である。

例2　再び波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0$ を考える。

この場合上の定理が与えるS.S.の評価集合はハの部分である。端点は閉包操作によりつけ加わったものであるが，簡単な例によってハの各点が適当な実解析解の境界値のS.S.に実際現われることが確かめられる。つまり通常の混合問題においても $x_1>0$ で実解析的となる解を得ようと思えばただ一個の境界値といえどもS.S.の条件がつくのである。



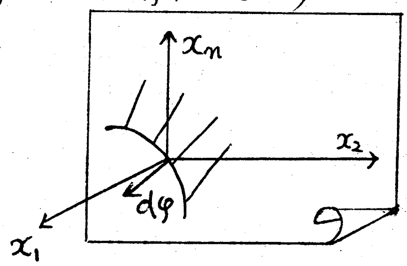
S^{*1}_∞ の図

境界値問題を解く立場からすれば定理6は前述の必要条件に相当するものである。十分条件に相当するものは次の定理である。

定理7　I を $\mathbb{R}^n \times iS^{*n-2}_\infty$ の開集合とする。$\forall(x, i\xi' dx'\infty) \in I$ に対し，ξ_1 に関する特性方程式 $p_m(x, \xi_1, \xi')=0$ の根はすべて虚部が正であるとする。このときS.S. $u_j \subset\subset I|_{x_1=0}$ なる任意の境界データ u_j に対し境界値問題（4）の超函数解 u は $x_1>0$ において実解析的となる。

最後にこれらの結果の応用を述べる。いずれも実解析解の接続の問題の変種である。（定数係数方程式の場合［5］）

定理8　$K=\{\varphi(x')\geqq 0\}$ を $x_1=0$ 内の原点を通る滑らかな超曲面の片側とする。$(0, id\varphi(0)\infty)$ が



(6) $V(p)^{\mathbb{C}} \cap \{\mathrm{Im}\,\xi_1 \neq 0,\ \mathrm{Im}\,\xi' = 0\}$ の赤道面 $\xi_1 = 0$ への射影像の閉包の $x_1 = 0$ との交わりに含まれなければ，Kの外で定義された $p(x, D)u = 0$ の実解析解は必ず原点のある近傍まで超函数解として延長される。

定理の仮定は云い換えれば ξ_1 に関する特性方程式 $p_m(x, \xi_1, \xi') = 0$ の根がすべて実であるような集合の内点に $(0, i\,d\varphi(0)\infty)$ が含まれるということである。この定理は定理6から直ちに証明できるので両者の関連を明らかにする上からもそれを述べておこう。仮定により u は $x_1 > 0$ でも $x_1 < 0$ でも実解析解なので両側から境界値がとれる。その差 $b_j(u) = b_j^+(u) - b_j^-(u)$ はKに台を持つ $n-1$ 変数超函数となるが，仮定により原点においてKの法線は $b_j(u)$ の特異スペクトルに含まれない。故に河合-柏原のHolmgren type定理[11]により原点の近傍で $b_j(u) = 0$。従って境界値が一致し u はそこで超函数解としてつながる。

さらに，方程式の特性帯に条件をつければ正則性伝播が成り立ち，次が得られる。([6])

<u>系1</u> $p_m(x, D)$ は実係数主型とし，定理8の与える集合の原点上のfibreは S_∞^{*n-2} 全体とは一致しないとする。このとき原点の外の定義された実解析解は原点まで実解析解として延長される。

C^∞級の解に対しては定理6の証明から考察し直すことにより次も得られる。便宜上系として並べ掲げておくが定理8から直接得られるわけではない([6])。この結果は筆者のこの方面の研究への動機となった Grušin の仕事([1])の変数係数への拡張である。

<u>系2</u> 系1と同じ仮定のもとに，原点の外で定義されたC^∞級解は原点までC^∞級解として延長される。

次に，$x_1=0$ 内の連続曲線Cの各点x'において適当な超平面$\varphi(x')=0$ が存在して，$(x', id\varphi(x')\infty)$ は定理8の与える集合に含まれず，かつ平面の族$\varphi(x')=c$ はこの近くでCと各一点ずつでしか交わらないとき，Cを admissible ということにする。

<u>定理9</u> Cを$x_1=0$ 内の admissible な曲線とする。$p_m(x,D)$は実係数主型とし，uをCの外で定義された$p(x,D)u=0$の実解析解でCまで distribution として延長されるものとする。このときもしuがCまで超函数解として延びなければ，Cは解析曲線でなければならぬ。

証明は定理6(を系2の証明に変更したもの)と次の補題による。

<u>補題</u> $u(x,t)$はtを実解析パラメーターとする distribution で(i.e. $\mathcal{D}'$ sense での analytic S.S. u が

$\pm i dt\infty$を含まず), supp u は $t=\text{const}$ との交わりが常に一点となるような連続曲線であるとする。このとき C は解析曲線である。

次に C を C^1 級としてみる。C の法線ベクトルが必ず定理8の与える集合(6)に含まれているとき C を $p(x,D)$ に関して timelike ということにする。C の外で定義された実解析解 u は C が timelike でないところでは定理8により超函数解としてのびてしまう。さて，それでは timelike な解析曲線は必ず実解析解のこの意味での特異集合となり得るであろうか？ それとも更に条件が要るのであろうか？ この問はなかなか微妙であり混合問題の深い理論とも密接な関りがあるものと思われる。

今のところ筆者には何もわからないが，境界値問題のこれより深い部分は方程式の既約性がかかわってくることは確かである。それはモノドロミー群により表現されて境界値の完全な特徴づけを与えるであろうと筆者は夢想している。ともあれ特異集合が超曲面に含まれている場合の実解析解の接続問題に対しては境界値理論が統一視点を与えるという筆者の夢([4])は実現されつつある。

文　献

[1] Grušin, V.V., On solutions with isolated singularities for partial differential equations with constant coefficients, Trudy Moskov.Mat.Obšč. 15 (1966), 262-278.

[2] Bony, J.M.-Schapira, P., Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy, Lecture Notes in Mathematics No.287, Springer, 1973, pp,82-98.

[3] Kaneko, A., On continuation of regular solutions of partial differential equations to compact convex sets, J.Fac.Sci. Univ.Tokyo SecIA, 17 (1970), 567-580.

[4] Kaneko A., 定数係数線型偏微分方程式の解の線状特異集合について, 数理解析研究所講究録 226 (1975) pp.1-20.

[5] Kaneko, A., On the singular spectrum of boundary values of real analytic solutions, submitted to J.Math.Soc.Japan.

[6] Kanko, A., On continuation of regular solutions of patial differential equations with real analytic coefficients, submitted to Proc.Japan Acad.

[7] Kashiwara, M.-Kawai, T., On micro-hyperbolic pseudo-differential operators I, to appear.

[8] Kawai, T., On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo Sec.IA, 17

(1970), 467-517.

[9] Kawai,T., Construction of local elementary solutions for linear partial differential operators with real analytic coefficients (I), Publ.RIMS, 7 (1971), 363-397.

[10] Komatsu,H.-Kawai,T., Boundary values of hyperfunction solutions of linear partial differential equations, Publ.RIMS, 7 (1971), 95-104.

[11] Sato,M.-Kawai,T.-Kashiwara,M., Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Mathematics No. 287, Springer, 1973, pp.265-529.

[追記] 実根の仮定は初期平面の上以外では必要条件とはならない。同様の理由で定理2−8は更に拡張できる。本稿において証明を与えられていない定理は拡張された形で次の二論文に載る予定である。

[12] Kaneko,A., Singular spectrum of boundary values of solutions of patial differential equations with real analytic coefficients, submitted to Sci.pap.Coll.Gen.Educ.Univ. Tokyo.

[13] Kaneko,A., Analyticity of lowest dimentional singularity of real analytic solutions, in preparation.