数理解析研究所講究録
第 267 巻 1976 年 27-54

菊池の関数 $x^{\alpha}\omega^{-\beta}(1-\omega)=N$ $(0<\omega<1)$ について, I

東京都立大　理　　岩野正宏

まえがき.

10数年前から問題にしていた境界層の方程式

$$
(A)\quad \begin{cases} x''' + 2xx'' + 2\lambda(1-x'^2)=0, & \lambda<0 \\ x(0)=0,\ x'(0)=0, & x'(\infty)=1 \\ 0<x(t)<1 & \text{for } 0<t<\infty \end{cases}
$$

が, ようやく最近になって　菊池氏の独創的な存在定理によって　実験結果 $(-0.199<\lambda<0)$ を cover するに十分な解 $(-0.19880\leqq\lambda<0)$ をもつことがわかった。菊池氏の研究成果は, 彼のよき協力者である林, 上え郷の両君との連名で慶應大学工学部紀要から発表されている. 菊池の存在定理を使用するさいに, ある意味で本質的な役割を果したのは表題にある菊池の関数 $(\alpha=2,\ \beta=1.5)$ であって, これを用いて $-\frac{1}{6}<\lambda<0$ において境界値問題(A)が解をもつことを証明し, さらに　この関数にある意味で perturbation をおこなって

解の存在するλの範囲をしだいに拡げていき，ついに最後の結果に到達したのである。発表された論文を読んでみてもう少し補足すればその辺の考え方がもっとよく理解できるように思われたので，Part II において林氏に解説してもらうことにした。一方著者はもっぱら南雲型の存在定理を用いてλの範囲を拡げることに努力したがなかなか思うような結果が得られなかった。菊池の関数を用いたところ，$\alpha=3.32$，$\beta=2.49$のとき南雲型の存在定理では最もよいと思われる結果$-0.1751\leqq\lambda<0$がえられることがわかった。（この関数を使用する以前は，$-0.09\leqq\lambda<0$が"やっと"であったことを思えば，格段の違いである！）

境界値問題(A)の解決のために残されていた問題は，いわゆる exponential type の解（§2を見よ）の存在の証明であったが，菊池の論文にはこの解の存在の証明だけがなされているので若干の補足を必要とするように思われる。このPart I では，"どのようにして境界値問題(A)が解決されたか"と併せて"菊池の関数は南雲型の存在定理を用いる場合にも極めて有用であること"を説明したい。なお補足の部分は，Kemnitz と Iglisch 両氏の考え方を借りてはいるが，著者の考えに基づくものである。

§1. 境界値問題(B)へ変換

$x=x(t)$を新しい独立変数に，$y=x'(t)^2$を従属変数にとり，yをxの関数とみれば，

$$x'(t)=\sqrt{y(x)}\,,\quad x''(t)=\frac{1}{2}\dot{y}(x),\quad x'''(t)=\frac{1}{2}\sqrt{y(x)}\,\ddot{y}(x).$$

方程式(A)の階数は 1 だけ下がり，境界値問題(A)の代わりに，境界値問題

$$(\mathbf{B})\qquad\begin{cases}\ddot{y}=-y^{-\frac{1}{2}}\{2x\dot{y}+4\lambda(1-y)\}, & \lambda<0\\ y(0)=0, \quad y(\infty)=1 & \\ 0<y(x)<1 \quad \text{for} \quad 0<x<\infty & \end{cases}$$

を考えればよいことは 講究録224 で詳しく説明した。さらに，境界値問題(A)に解$x(t)$があったと仮定し，**(B)**の対応する解を$y(x)$とすれば，

$$(1.1)\qquad \lim_{x\to 0} y/x = 2x''(0)\neq 0$$

$$(1.2)\qquad \lim_{x\to 0} y/x^{\frac{4}{3}} = (-9\lambda)^{\frac{2}{3}}, \qquad x''(0)=0$$

のどちらかが成り立つことも示した。したがって，もし，境界値問題(B)が

$$(1.3)\qquad \lim_{x\to 0} y/x^{\frac{4}{3}} > (-9\lambda)^{\frac{2}{3}}$$

を満足する解$y(x)$をもてば，$x''(0)\neq 0$ の case となり，$\dot{y}(0)>0$ であることが結論される。すなわち

$$(1.4)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{y}{x^{\frac{4}{3}}} > (-9\lambda)^{\frac{2}{3}} \quad\Longrightarrow\quad \dot{y}(0)>0.$$

§2. $x\to\infty$ のとき $y(x)\to 1$ となる解.

(2.1) $$u=1-y,\quad v=x\dot{u}$$

とおいて，方程式(B)を連立になおし $x\to\infty$ のとき，$(u,v)\to(0,0)$ となる一般解が構成できることを，Ann. Mat. Pura Appl. 82 (1969) 189–256，Analytic Theory of Differential Equations，Lecture Notes in Math 183 Springer-Verlag，59–127 において詳しく説明した。(2.1) によって，方程式(B)は次のような連立方程式に変換される：

(2.2) $$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=A(x,u)\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix},$$

$$A(x,u)=\begin{bmatrix}0 & x^{-1}\\ 4\lambda x & -2x+x^{-1}\end{bmatrix}+a(u)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 4\lambda & -2\end{bmatrix},$$

$$a(u)=(1-u)^{-1/2}-1.$$

さらに，線形項の x, x^0, x^{-1} の係数行列を対角化するために，次の線形変換を行う：

$$\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2\lambda & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -x^{-2}/2\\ \lambda(1-2\lambda)x^{-2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y\\ Z\end{bmatrix},$$

または，もとの変数にもどせば；

(2.3) $$\begin{cases} y=1-u=1-Y+\frac{1}{2}x^{-2}Z,\\ x\dot{y}=-v=(-2\lambda-\lambda(1-2\lambda)x^{-2})Y-(1-\lambda x^{-2})Z.\end{cases}$$

Y, Z は次の形の連立方程式をみたす；

(2.4) $\quad \dot{Y} = x^{-1} g(x, Y, Z), \quad \dot{Z} = x\, h(x, Y, Z),$

g, h は

$$R \leqq |x|, \quad |Y| \leqq c, \quad |Z| \leqq c$$

において1価正則な関数で次のような展開式をもつ；

$$g = 2\lambda Y + O(x^{-2})Y + O(x^{-2})Z$$
$$\quad + a(Y - \tfrac{1}{2}x^{-2}Z)\big(O(x^{-2})Y + O(1)Z\big),$$
$$h = (-2 + (1-2\lambda)x^{-2})Z + O(x^{-4})Y + O(x^{-4})Z$$
$$\quad + a(Y - \tfrac{1}{2}x^{-2}Z)\big(O(x^{-2})Y + O(1)Z\big)$$

ここで，例えば $O(x^{-2})$ は x^{-1} の収束べキ級数で表現され その展開式は少くとも2次の項から始まる関数を表わす．

g, h の右辺の leading terms だけを残してえられる方程式を積分してえられる2つの関数を

$$\Phi(x) = C_1\, x^{2\lambda}, \qquad \Psi(x) = C_2\, x^{-2\lambda+1} \exp(-x^2)$$

と書けば，方程式 (2.4) の一般解は，x, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ が

$$|\arg x - \tfrac{\pi}{4}| < \tfrac{\pi}{2}, \quad R' \leqq |x|, \quad |\Phi(x)| \leqq c', \; |\Psi(x)| \leqq c'$$

or

$$|\arg x + \tfrac{\pi}{4}| < \tfrac{\pi}{2}, \quad R' \leqq |x|, \quad |\Phi(x)| \leqq c', \; |\Psi(x)| \leqq c'$$

を満足する限り，$\Phi(x)$ と $\Psi(x)$ との一様収束2重級数で表現される．そのとき展開式の各係数は $|\arg x - \frac{\pi}{4}| < \frac{\pi}{2}$, $x \to \infty$ or $|\arg x + \frac{\pi}{4}| < \frac{\pi}{2}$, $x \to \infty$ のとき x^{-1} のべキ級数に漸近

展開可能な関数として一意的に定まる。

$1-x'=(1-y)/(1+\sqrt{y})$ および (2.3) に注意して，$C_1=0$ とおけば，次の関係式がえられる：

$$
(2.5)\quad
\begin{cases}
1-x'(t)=\frac{1}{4}C_2\,x^{-2\lambda-1}\exp(-x^2)\cdot(1+o(1))\ \text{as}\ x\to+\infty\\
\qquad\qquad =\frac{1}{4}C_2\,t^{-2\lambda-1}\exp(-t^2)\cdot(1+o(1))\ \text{as}\ t\to+\infty,\\
x''(t)\ =\frac{1}{2}C_2\,t^{-2\lambda}\exp(-t^2)\cdot(1+o(1))\ \text{as}\ t\to+\infty,\\
x''(t)\ =2t\,(1-x'(t))(1+o(1))\quad \text{as}\ t\to+\infty.
\end{cases}
$$

このような解，すなわち，境界値問題 (A) に解 $x(t)$ が存在すると仮定して，$t\to\infty$ のとき $x'(t)\to1$ が指数関数の order で decay するものを exponential type とよぶ。

同様にして，$C_2=0$ とおけば，

$$
(2.6)\quad
\begin{cases}
1-x'(t)=\frac{1}{2}C_1\,x^{2\lambda}(1+o(1))\quad \text{as}\ x\to+\infty\\
\qquad\qquad =\frac{1}{2}C_1\,t^{2\lambda}(1+o(1))\quad \text{as}\ t\to+\infty.
\end{cases}
$$

このような解が存在すれば，これを algebraic type とよぶ。その意味は明らかであろう。

§3. Exponential type の解の一意性.

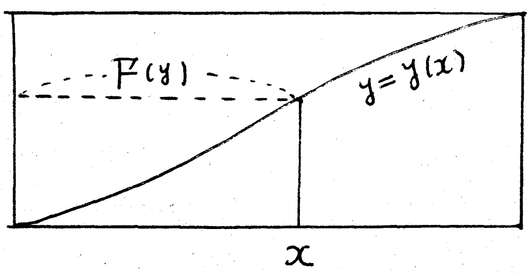
Exponential type の解は仮りに存在しても高々一つであることが証明できる。この証明のさいに南雲先生の結果を使うから，証明なしで，それを述べる。

“ $\quad dy_i/dx=f_i(x,y_1,\dots,y_k),\quad 1\leq i\leq k$

において，任意の初期条件に対して積分がただ一つであると仮定する．さらに $i\neq j$ なる y_j について f_i が単調増加 $(\partial f_i/\partial y_j>0)$ とする．このとき2組の積分 $\overset{1}{y}_i(x)$, $\overset{2}{y}_i(x)$ において，

$$\overset{1}{y}_i(x_0)\leqq \overset{2}{y}_i(x_0) \Rightarrow \overset{1}{y}_i(x)\leqq \overset{2}{y}_i(x) \quad \text{for } x_0<x,$$
$$\overset{1}{y}_i(x_0)< \overset{2}{y}_i(x_0) \Rightarrow \overset{1}{y}_i(x)< \overset{2}{y}_i(x) \quad \text{for } x_0<x.$$

が成立する．”



境界値問題(B)の解を $y(x)$ とし，$y=y(x)$ の逆関数を $x=F(y)$, $\dot{y}(F(y))=G(y)$, すなわち，

$$y\equiv y(F(y)),\quad G(y)\equiv \dot{y}(F(y))$$

によって二つの関数 $F(y)$, $G(y)$ を定める．$1\equiv \dot{y}\, dF/dy$ より，$(-F(y), G(y))$ は連立方程式

$$(3.1)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dy}(-F(y)) = -\dfrac{1}{G(y)}, \\[2ex] \dfrac{d}{dy}G(y) = 2\,\dfrac{-F(y)}{\sqrt{y}} - \dfrac{4\lambda(1-y)}{\sqrt{y}}\,\dfrac{1}{G(y)} \end{cases}$$

を満足することがわかる．ここで(3.1)の右辺の第1式はGの増加関数，第2式は $-F$ の増加関数であることを注意しておく．

すでに示したように，Exponential type の解 $x(t)$ or $y(x)$ に

対しては, $x''(t) = 2t\,(1-x'(t))(1+o(1)) \to 0$ as $t \to +\infty$

ゆえに, $\frac{1}{2}\,\dot{y}(x) = 2x\,(1-\sqrt{y(x)})(1+o(1)) \to 0$ as $x \to +\infty$.

よって, $\dot{y}(x) = 2x\,(1-y(x))(1+o(1)) \to 0$ as $x \to +\infty$.

この関係式から ただちに

(3.2) $$G(y) = 2\,F(y)(1-y)(1+o(1)) \to 0 \quad \text{as } y \to 1-0.$$

さて, 一般に 境界値問題 (A) が二つの解 $x_j(t)$ $(j=1,2)$ をもつと仮定し, 対応する F, G を $F_j(y), G_j(y)$ $(j=1,2)$ で表わす。 $x'' = \frac{1}{2}\dot{y}$, $\dot{y}(0) \geqq 0$ であることと, 方程式(A) において $t=0$ は特異点ではないことから, 初期値 $(x(0), x'(0), x''(0))$ によって (A) の解は一意に定まる. よって

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1'(0) = x_2'(0) = 0, \quad x_1''(0) > x_2''(0) \geqq 0$$

と仮定してよい. これらの条件に対応して,

(3.3) $$\begin{cases} -F_1(0) = -F_2(0) = 0, \\ G_1(0) > G_2(0) \geqq 0 \end{cases}$$

をえる. 初期条件 (3.3) を満足する (3.1) の2組の解に対して南雲の補助定理を用いれば まず

$$F_2(y) - F_1(y) \geqq 0, \quad G_1(y) - G_2(y) \geqq 0, \quad 0<y<1$$

をえる. じつは $\geqq$ は $>$ となることが次のようにしてわかる。 まず, 初期値に関する解の連続性により,

$$G_1(y) - G_2(y) > 0 \quad \text{for } 0 < y \leqq {}^{\exists}\varepsilon.$$

(3.1)の第1の方程式から,

$$F_2(y) - F_1(y) > 0 \quad \text{for } 0 < y \leqq \varepsilon.$$

$y=\varepsilon$ において, $-F_1(\varepsilon) > -F_2(\varepsilon)$, $G_1(\varepsilon) > G_2(\varepsilon)$ が成り立つから, 再び南雲の補助定理を用いれば $\varepsilon < y$ においても不等式が成立する。したがって,

$$F_2(y) - F_1(y) > 0, \quad G_1(y) - G_2(y) > 0, \quad \text{for } 0<y<1.$$

(3.1) のはじめの方程式から,

(3.4) $\underline{F_2(y) - F_1(y) \text{ は } y \text{ の増加関数である.}}$

ことがわかる。

とくに $x_j(t)$ は Exponential type と仮定すれば, (3.2) より

(3.5) $$\lim_{y \to 1} \bigl(G_1(y) - G_2(y)\bigr) = 0.$$

このような解 $x_j(t)$ に対して, (3.1) のあとの式から,

$$\frac{dG_j}{dy} = \frac{2}{\sqrt{y}}(-F_j) + O\left(\frac{1}{F_j}\right) \qquad (\because (3.2))$$

$$= \frac{2}{\sqrt{y}}(-F_j) + o(y) \quad \text{as } y \to 1-0.$$

故に,

$$\frac{d}{dy}\bigl(G_1(y) - G_2(y)\bigr) = \frac{2}{\sqrt{y}}\bigl(F_2(y) - F_1(y)\bigr) + o(y) \quad \text{as } y \to 1-0.$$

ところが, (3.4) により,

$$F_2(y) - F_1(y) \geqq {}^{\exists}\alpha > 0 \quad \text{for } {}^{\exists}\delta \leqq y < 1.$$

をえるから, $G_1(y) - G_2(y)$ は $y=1$ の近くでも増加関数となる。これは (3.5) に反する。したがって, Exponential type の解は, 存在しても高々一つしかないことがわかった。

§4. Algebraic type の解の族

Exponential type の解は存在してもただ一つしかないことがわかった。この§では，存在すると仮定して，それを $y^*(x)$ or $x^*(t)$ で表わそう。このとき

$$(4.1) \qquad \gamma^* \equiv \dot{y}^*(0) > 0$$

と仮定する。この仮定は，$x'' = \frac{1}{2}\dot{y}$ より，

$$x^{*\prime\prime}(0) = \frac{\gamma^*}{2} > 0$$

と同等である．

$t=0$ のとき，初期値 $(0, 0, \gamma/2)$，$0 \leq {}^\forall\gamma < \gamma^*$，をみたす方程式 (A) の解を $\tilde{x}(t)$，これに対応する方程式 (B) の解を $\tilde{y}(x)$ と書くことにする。このとき

$$\tilde{y}(0) = 0, \quad \dot{\tilde{y}}(0) = \gamma.$$

つぎのことが証明できる：

"解 $\tilde{y}(x)$ は，不等式

$$0 < \tilde{y}(x) < 1, \qquad \text{for } 0 < x < \infty$$

を満足しながら，$x = \infty$ まで接続可能で，関係式

$$1 - \tilde{y}(x) = O(x^{2\lambda}) \qquad \text{as } x \to +\infty$$

または

$$1 - \tilde{x}'(t) = O(t^{2\lambda}) \qquad \text{as } t \to +\infty$$

を満足する。すなわち，初期値 $(0, 0, \gamma/2)$，$0 \leq {}^\forall\gamma < \gamma^*$ at $t=0$ をもつ (A) の解 $\tilde{x}(t)$ は境界値問題 (A) の algebraic type な解である。"

これを証明するために，まず次のことを証明する．

(4.2) $y(0)=0$ となる方程式(B)の解 $y(x)$ は $0<y(x)<1$ なる限り $x>0$ において正の導関数をもつ．

証明 $\dot{y}(x)>0$ for $0<x<{}^{\exists}x_1$, しかし

$$\dot{y}(x_1)=0 \quad \text{かつ} \quad 0<y(x_1)<1$$

となる x_1 が存在したと仮定する。このとき，

$$\ddot{y}(x_1)\leqq 0$$

でなければならない。一方 方程式(B)から，

$$\ddot{y}(x_1)=-(y(x_1))^{-1/2}\left\{2x_1\,\dot{y}(x_1)+4\lambda(1-y(x_1))\right\}$$
$$=-(y(x_1))^{-1/2}\cdot 4\lambda(1-y(x_1))>0$$

をえる。これは矛盾である。

(4.3) $y(0)=0$ となる方程式(B)の解 $y(x)$ で，十分大きい x に対して $\dot{y}(x)>0$ かつ $0<y(x)<1$ となるものは $x\to\infty$ のとき 1 に近づく．

証明 十分大きい x に対して $\ddot{y}(x)>0$ を仮定すれば，$y(x)$ の graph は下に凸となるから，$y(x)$ は非有界となる。したがって，十分大きい x に対して $\ddot{y}(x)\leqq 0$ でなければならない． このとき

$$\lim_{x\to\infty} y(x)<1$$

を仮定しよう。そうすれば

$$4\lambda(1-y(x)) \leqq -\overset{\exists}{c} < 0 \quad \text{for large } x$$

となる正数 c がとれる。方程式(B)は

$$\sqrt{y}\,\ddot{y} + 2x\dot{y} + 4\lambda(1-y) = 0$$

と書ける。左辺の第1項 $\leqq 0$, 第3項 $\leqq -c$ for large x, に注意すれば, $x\dot{y} \geqq c/2$ for large x となるから, これを積分して,

$$y(x) > \frac{c}{2}\log x + const. \to \infty$$

をえる。これは矛盾である。

さきに述べた二つの解 $y^*(x)$; $\tilde{y}(x)$ に対応する F, G を $F^*(y), G^*(y)$; $\tilde{F}(y), \tilde{G}(y)$ で表わす。このとき,

$$-F^*(0) = -\tilde{F}(0) = 0,$$

$$\gamma^* = G^*(0) > \tilde{G}(0) = \gamma$$

であるから, (3.4) により $\tilde{F}(y) - F^*(y)$ は $0<y<1$ において増加関数である。また (4.2) によって $\dot{\tilde{y}}(x) > 0$. これらのことから,

$$0 < \tilde{y}(x) < 1, \quad \dot{\tilde{y}}(x) > 0 \quad \text{for } 0 < x < \infty.$$

となることがわかる。(4.3) から $\lim \tilde{y}(x) = 1$ がえられる。$\tilde{y}(x)$ は Algebraic type の解でなければならない。(2.6) によって, $1-\tilde{y}(x) = 1-\tilde{x}'(t)^2 = C_1\tilde{x}(t)^{2\lambda}(1+o(1))$ as $t\to+\infty$, or $1-\tilde{y}(x) = C_1 x^{2\lambda}(1+o(1))$ as $x\to+\infty$ をえる。

§5. 菊池の存在定理による Exponential type の解の存在.

方程式(B)を

$$(5.1)\qquad \ddot{y} = f(x, y, \dot{y})$$

と書けば, $f(x, y, z)$ は 次の不等式で表わされる (x, y, z) 空間内の有界閉領域 $\mathfrak{D}$ において連続となる:

$$(5.2)\qquad \mathfrak{D}:\begin{cases} a \leqq x \leqq b \\ 0 < \omega(x) \leqq y \leqq 1 \\ 0 < \underline{\Omega}(x, y) \leqq z \leqq \overline{\Omega}(x, y). \end{cases}$$

ここで a は 0 に, b は ∞ にいくらでも近い値をとることができる。さらに $\omega(x)$, $\underline{\Omega}(x,y)$, $\overline{\Omega}(x,y)$ は 不等式

$$(5.3)\qquad \omega'(x) < \underline{\Omega}(x, \omega(x)) < \overline{\Omega}(x, \omega(x)),$$

$$(5.4)\qquad \underline{\Omega}_x(x,y) + \underline{\Omega}_y(x,y)\,\underline{\Omega}(x,y) - f(x, y, \underline{\Omega}(x,y)) > 0,$$

$$(5.5)\qquad \overline{\Omega}_x(x,y) + \overline{\Omega}_y(x,y)\,\overline{\Omega}(x,y) - f(x, y, \overline{\Omega}(x,y)) > 0$$

が $a \leqq x \leqq b$, $\omega(x) \leqq y \leqq 1$ において成立することを仮定する。菊池氏は, $\omega = \omega(x)$ は 陰関数によって

$$x^2\, \omega^{-\frac{3}{2}}(1-\omega) = N,$$

(N は $\frac{2}{3} < N < 1+2\lambda$ さえ満足すれば何でもよい),

$$\underline{\Omega}(x,y) = 2x\, y^{-\frac{1}{2}}(1-y),$$

$$\overline{\Omega}(x,y) = 2\frac{y}{x}$$

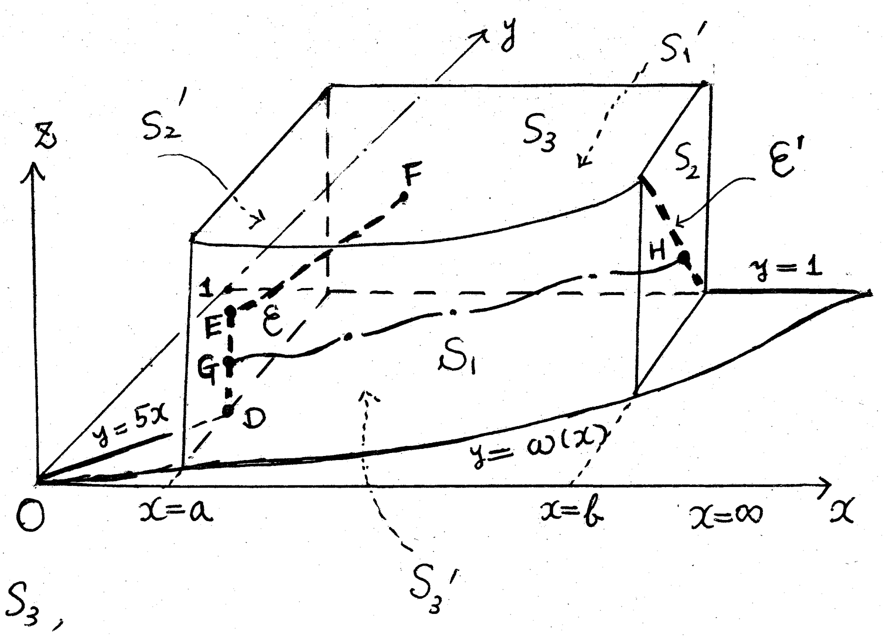
と定義すれば, $\frac{2}{3} < 1+2\lambda$ なる λ; $-\frac{1}{6} < \lambda < 0$ において, 不等式 (5.3), (5,4), (5.5) が満足されることから, 境界値問

題(B)には, $-\frac{1}{6}<\lambda<0$ において, 指数関数型の解 $y(x)$ で, $\dot{y}(0)>0$ となるものが存在することを証明した。

これだけの条件からは, 一般には解の存在を結論することはできないが, 方程式(5.1)は特殊解 $y(x)\equiv 1$ をもつことと解の一意性の条件が満足されることから境界値問題(B)に解が存在する。この存在定理は非常に簡明である!

このように定義された関数 $\omega, \Omega, \bar{\Omega}$ が(5.3), (5.4), (5.5)を満足することは簡単に検証される。解の存在を結論するためには, いわゆる**Kneser**の定理のような位相的な考え方をする。

説明を簡単にするために領域 $\mathcal{D}$ を直方体とみなす。その境界である表面 $\partial\mathcal{D}$ は6個の面からなる。図のように, S_1, S_2, S_3,



相対する面(図では裏側にある)を S_1', S_2', S_3' とする。例えば表面 S_3 は, 面 $z=\bar{\Omega}(x,y)$ が柱面 $x=a$, $y=\omega(x)$, $x=b$, $y=1$ によって切り取られる部分を表わす。三つの面 S_1, S_3, S_2' からなる点集合を開集合とみなしそれを $\mathcal{S}$

それの $\partial\mathcal{D}$ における補集合 $\mathcal{S}^c$ は 閉集合である。

境界 $\partial\mathcal{D}$ 上の任意の点を(ξ,η,ζ)で表わし，$x=\xi$ のとき $y=\eta$, $y'=\zeta$ となる(B)の解を $\varphi(x)$ と書けば，解曲線$(x,\varphi(x),\varphi'(x))$は，点$(\xi,\eta,\zeta)$を通る曲線である。

証明は省略するが，次のことがわかる：

“$(\xi,\eta,\zeta)\in\mathcal{S}$ ならば，解曲線$(x,\varphi(x),\varphi'(x))$は，$x$が増加するとき，$\mathcal{S}$ に接することなく $\mathcal{D}$の外部から $\mathcal{D}$の内部に入る。$(\xi,\eta,\zeta)\in\mathcal{S}^c$ ならば，解曲線は，xが増加するとき，$\mathcal{D}$ の内部から $\mathcal{D}$ の外部へ出ていく。ただし，(ξ,η,ζ)が，側面 S_1' と底面 S_3' との共通部分である稜 $\mathcal{C}$ (両端点を含めて閉線分とみなす)の点であれば，解曲線は $\mathcal{D}$に含まれる限り この稜に含まれる。” じっさい この解曲線は，特殊解 $y(x)\equiv 1$ に対応するから，$(x,1,0)$, $a\leqq x\leqq b$, で表わされる。

つぎに，点Dは底面 S_3' 上にあり，平面 $y=5x$ と側面 S_2' との交線に含まれる線分DEを考える。このとき，次のことがわかる：

“Eを適当にとれば，Eから出る解曲線 $(x,\varphi(x),\varphi'(x))$は必ず側面 S_1' 上の一点Fに達する。”

閉集合DEF(線分DEと，EとFを結ぶ解曲線との合併集合)を $\mathcal{E}$ で表わす。$\mathcal{E}$ は $\mathcal{D}$ に含まれる連続体であり，か

$\mathcal{E}$と$\partial\mathcal{D}$との共通部分は，閉集合$\mathcal{S}^c$と2点 D, F のみを共有する．$\mathcal{E}$の各点から出る方程式(B)の解曲線の集合を$\mathcal{F}(\mathcal{E})$で表わす。解の一意性により，$\mathcal{F}(\mathcal{E})$と稜曲線$\mathcal{C}$とは決して共通部分をもたない．福原先生のKneser族に関する一般的な存在定理によれば，$\mathcal{F}(\mathcal{E}) \cap \mathcal{S}^c$は連続体となる．ことがわかる。故に，この連続体は側面S_2の対角線である連続体$\mathcal{E}'$（図を見よ）と交わらなければならない．その点を H とする．結局 線分 DE 上の一点 G と H とを結ぶ解曲線 $(x, \Phi(x;a,b), \Phi'(x;a,b)) \in \mathcal{D}$ が存在することになる．

$a \downarrow 0,\ b \uparrow \infty$ とすれば，このような解曲線の族

$$\{(x, \Phi(x;a,b), \Phi'(x;a,b))\}$$

がえられる。この族から，$0<x<\infty$ において広義一様収束する部分列をとりだし，それの極限曲線を$(x, \Phi(x), \Phi'(x))$と書けば，$y=\Phi(x)$は境界値問題(B)の解である．

この解に対して，

(5.6) $\dot{\Phi}(0) > 0.$

証明　$\omega(x) \leqq \Phi(x)$が成り立つ．$\omega(x)$の定義から，

$$\lim_{x \to 0} \frac{\omega(x)}{x^{\frac{4}{3}}} = N^{-\frac{2}{3}} > (1+2\lambda)^{-\frac{2}{3}}.$$

$-\frac{1}{6} < \lambda < 0$ なる限り，$(1+2\lambda)^{-\frac{2}{3}} > (-9\lambda)^{\frac{2}{3}}$ 。したがって，

$$\lim_{x\to 0} \Phi(x)/x^{\frac{4}{3}} > (-9\lambda)^{\frac{2}{3}}.$$

故に (1.4) により $\dot{\Phi}(0)>0$.

(5.7) <u>解 $\Phi(x)$ は Exponential type である.</u>

<u>証明</u> $\omega(x)$ の定義から,

$$1-\omega(x)=O(x^{-2}) \qquad \text{as } x\to+\infty.$$

$\omega(x)\leqq\Phi(x)<1$ より,

$$1-\Phi(x)\leqq O(x^{-2}) \qquad \text{as } x\to+\infty.$$

$\Phi(x)$ に対応する境界値問題(A)の解を $x(t)$ とすれば,

$1-x'(t)^2=1-\Phi(x)$, $x'(t)\to1$ であるから,

$$1-x'(t)\leqq O(t^{-2})<O(t^{2\lambda}) \quad \text{as } t\to+\infty.$$

この解が algebraic type であれば (2.6) が成立しなければならない. 故に algebraic type ではなく, Exponential type である.

ここでは $-\frac{1}{6}<\lambda<0$ のとき境界値問題(A)が解をもつことを示したが, 解の存在するような λ の範囲を拡げるには (5.3), (5.4), (5.5) を満足する関数 $\omega(x)$, $\Omega(x,y)$, $\overline{\Omega}(x,y)$ を作ればよい. そのような関数の一般的な作り方は"Part II"の林氏の解説に委ねたい. 解の存在は, $-0.19880\leqq\lambda<0$ まで保証されることが示されるであろう。そこで得られる解は Exponential type であること, また解の導関数の原点における値が正であることも示されるであろう.

§6. 南雲型の存在定理による Exponential type の解の存在.

方程式(B)を

$$(6.1)\qquad \ddot{y} = f(x, y, \dot{y})$$

の形に書けば, $f(x, y, z)$ は (x, y, z) 空間の閉領域 $\mathfrak{D}$:

$$a \leqq x \leqq b,$$

$$(6.2)\qquad (0<)\underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}(x)(<1)$$

$$\underline{\Omega}(x, y) \leqq z \leqq \overline{\Omega}(x, y)$$

で連続となる. a は 0 に, b は ∞ にいくらでも近い値をとることができる. 南雲先生の存在定理のように次の不等式が満足されることを仮定する:

$$(6.3)\qquad \ddot{\overline{\omega}}(x) \leqq f(x, \overline{\omega}(x), \dot{\overline{\omega}}(x)),$$

$$(6.4)\qquad \ddot{\underline{\omega}}(x) \geqq f(x, \underline{\omega}(x), \dot{\underline{\omega}}(x)),$$

$$(6.5)\qquad \underline{\Omega}(x, \overline{\omega}(x)) \leqq \dot{\overline{\omega}}(x) \leqq \overline{\Omega}(x, \overline{\omega}(x)),$$

$$(6.6)\qquad \underline{\Omega}(x, \underline{\omega}(x)) \leqq \dot{\underline{\omega}}(x) \leqq \overline{\Omega}(x, \underline{\omega}(x)),$$

$$(6.7)\qquad \overline{\Omega}_x(x, y) + \overline{\Omega}_y(x, y)\overline{\Omega}(x, y) - f(x, y, \overline{\Omega}(x, y)) < 0,$$

$$(6.8)\qquad \underline{\Omega}_x(x, y) + \underline{\Omega}_y(x, y)\underline{\Omega}(x, y) - f(x, y, \underline{\Omega}(x, y)) > 0.$$

$\underline{\omega}(x)$ $(\overline{\omega}(x))$ は区分的に2回連続微分可能であればよく, $\dot{\underline{\omega}}(x)$ $(\dot{\overline{\omega}}(x))$ が不連続なところでは曲線 $y=\underline{\omega}(x)$ $(y=\overline{\omega}(x))$ は下に凸(上に凸)であれば十分である. 菊池氏の存在定理とは条件が異なることに注意しよう.

"$\underline{\omega}(a) \leqq A \leqq \overline{\omega}(a)$, $\underline{\omega}(b) \leqq B \leqq \overline{\omega}(b)$ となる A, B を適

当にとれば，境界条件

$$y(a)=A,\quad y(b)=B$$

を満足する (6.1) の解が $a\leqq x\leqq b$ において存在し，積分曲線は $\mathcal{D}$ に含まれる.

証明は，講究録 224 において詳しく説明したので，省略する.

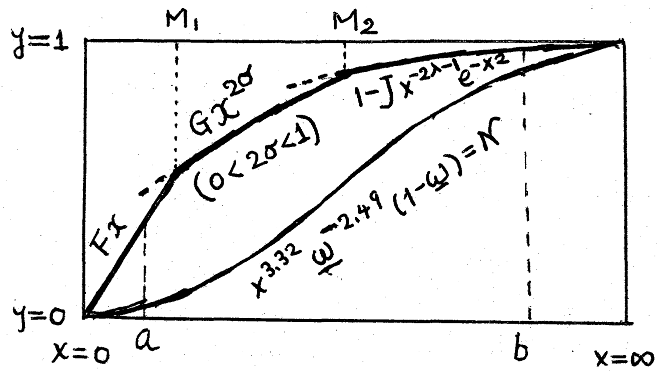
$\underline{\omega}(x)$, $\overline{\omega}(x)$ が

(6.9) $$\lim_{x\to\infty}\underline{\omega}(x)=\lim_{x\to\infty}\overline{\omega}(x)=1,\quad \lim_{x\to 0}\underline{\omega}(x)=\lim_{x\to 0}\overline{\omega}(x)=0$$

を満足すれば，$a\downarrow 0$, $b\uparrow\infty$ とするとき，$A\to 0$, $B\to 1$ となるから，結局 境界値問題(B) が解をもつことが結論できる.

$\underline{\omega}(x)$, $\overline{\omega}(x)$, $\underline{\Omega}(x,y)$, $\overline{\Omega}(x,y)$ としては次のような関数をえらぶ.

(6.10) $$\overline{\omega}(x)=\begin{cases} Fx, & 0\leqq x\leqq M_1, \\ Gx^{2\sigma}, & M_1\leqq x\leqq M_2, \\ 1-Jx^{-2\lambda-1}e^{-x^2}, & M_2\leqq x<\infty, \end{cases}$$



(6.11) $\underline{\omega}(x)=\omega(x)$ は 陰関数

$$x^{3.32}\omega^{-2.49}(1-\omega)=N$$

で定める. $N=(-9\lambda^*)^{-1.66}$ であり，λ^* は §8 において定義する.

(6.12) $$\underline{\Omega}(x,y)\equiv 0,\quad \overline{\Omega}(x,y)=Ly/x.$$

(6.10) における F, J, M_1, M_2 は $\overline{\omega}(x)$ が $0<x<\infty$ で連続

かつ $x=M_1, M_2$ において上に凸であるように，G の関数として定める．例えば

$$
(6.13)\quad \begin{cases} F=\left(\dfrac{1-2\lambda}{-\lambda}\right)^{(1-2\sigma)/2\sigma} G^{1/2\sigma}, & M_1=\dfrac{-\lambda}{1-2\lambda}\,\dfrac{1}{F}, \\ J=(1-G M_2^{2\sigma}) M_2^{2\lambda+2} e^{M_2^2}, & M_2=\left(\dfrac{\sigma(1-2\sigma)}{2(\sigma-\lambda)}G^{\frac{1}{2}}\right)^{1/(2-\sigma)}, \\ 0<G<\left(\dfrac{2(\sigma-\lambda)}{\sigma(1-2\sigma)}\right)^{\sigma}, & 0<2\sigma<1. \end{cases}
$$

また L は十分大きく，例えば $L \geqq \max(F, \frac{4}{3})$ でよい．

(6.3),(6.4) 以外の不等式の検証は比較的容易であるから，省略する．

§7. 不等式 (6.3), $-\frac{1}{4}<\lambda<0$, の証明.

$$
(7.1)\quad G \to \left(\frac{2(\sigma-\lambda)}{\sigma(1-2\sigma)}\right)^{\sigma} \Rightarrow J \to 0.
$$

証明　$G=[2(\sigma-\lambda)/\sigma(1-2\sigma)]^{\sigma}$ とおけば，$M_2=G^{-1/2\sigma}$ をえる．

(7.2)　$\omega_3(x)=1-Jx^{-2\lambda-1}e^{-x^2}$ は，$-\frac{1}{4}<\lambda<0$ のとき，任意に固定された M_2（(6.13) で定まっているが）に対して，J を十分小さくとれば，$\ddot{\omega}_3<f(x,\omega_3,\dot{\omega}_3)$, $M_2 \leqq x<\infty$ を満足する．

証明　不等式 $\ddot{\omega}_3<f(x,\omega_3,\dot{\omega}_3)$ は，計算すれば

$$
\sqrt{\omega_3(x)}\left\{(1+2\lambda)(1+\lambda)+(1+4\lambda)x^2+2x^4\right\}>(1+4\lambda+2x^2)x^2
$$

と同等であることがわかる。両辺の各項は $-\frac{1}{4}<\lambda<0$ において正であるから，平方し整理すれば，求める不等式は

(7.3) $$J\,k(x)^2 < h(x),$$

$$k(x) = x^{-\lambda-\frac{1}{2}}\left(2x^4 + (1+4\lambda)x^2 + (1+2\lambda)(1+\lambda)\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$h(x) = 4(1+\lambda)(1+2\lambda)x^4 + 2(1+4\lambda)(1+2\lambda)(1+\lambda)x^2 + (1+2\lambda)^2(1+\lambda)^2$$

と同等であることがわかる. 関数 $k(x)$ の導関数 $\dot{k}(x)$ は, $-\frac{1}{6} \leqq \lambda < 0$ のときに限り唯一つの正根

$$x_0 = \sqrt{1-\lambda + \sqrt{(13-20\lambda)/2}}$$

をもつ。このとき $\dot{k}(x_0) > 0$ となることが確かめられる. 一方 $\dot{k}(x) \to -\infty$ as $x \to 0+$, $\dot{k}(x) \to 0-$ as $x \to +\infty$ であるから, $\dot{k}(x)$ は二つの正の零点 x_1, x_2 ($x_1 < x_0 < x_2$) をもち, $x = x_2$ において極大値を与える. $-\frac{1}{6} > \lambda$ のときは $\dot{k}(x) < 0$ $(0 < x)$ である. 故に $M_2 \leqq x \leqq x_2$ において (7.3) が成立するように J を十分小さくとっておけば, 同不等式は $M_2 \leqq x < \infty$ で成立する.

(7.4) <u>$\omega_2(x) = G x^{2\sigma}$, $0 < 2\sigma < 1$ は, $0 < x \leqq M_2$ において, $0 < \omega_2(x) < 1$ および $\ddot{\omega}_2 < f(x, \omega_2, \dot{\omega}_2)$ を満足する.</u>

<u>証明</u> J の決め方から, $\omega_2(x) = \omega_3(x)$ at $x = M_2$. パラメータ G のとり方から $G M_2^{2\sigma} < 1 \Leftrightarrow \omega_2(x) < 1$ が成立する. 直接計算すればわかるように, $\ddot{\omega}_2(x) < f(x, \omega_2(x), \dot{\omega}_2(x))$ は,

$$\sigma(1-2\sigma)\,G^{3/2}x^{3\sigma-2} > 2(\sigma-\lambda)\,G x^{2\sigma} + 2\lambda$$

と同等である. $\lambda < 0$ より, $\sigma(1-2\sigma)\,G^{1/2}x^{\sigma-2} \geqq 2(\sigma-\lambda)$ が成立する x に対しては上記の不等式はもちろん成立する.

後者の不等式は 確かに $0<x\leqq M_2$ において成り立つ.

(7.5) <u>$\omega_1(x)=Fx$ は $0\leqq x\leqq M_1$ において $\ddot{\omega}_1 < f(x,\omega_1,\dot{\omega}_1)$ を満足する</u>.

<u>証明</u> F の決め方から, $FM_1 = GM_1^{2\sigma}$ or $\omega_1(M_1)=\omega_2(M_1)$. $\ddot{\omega}_1(x)<f(x,\omega_1(x),\dot{\omega}_1(x))$ は, $(1-2\lambda)Fx+2\lambda<0$ と同等である. この不等式は, $0\leqq x< -2\lambda/(1-2\lambda)F$, したがって, $0\leqq x\leqq M_1$ において満足される.

(7.6) <u>$\dot{\bar{\omega}}(x)$ が不連続な点 M_1, M_2 において曲線 $y=\bar{\omega}(x)$ は上に凸である</u>.

<u>証明</u> $\dot{\omega}_1(M_1)>\dot{\omega}_2(M_1)$, $\dot{\omega}_2(M_2)>\dot{\omega}_3(M_2)$

がわかればよい.

$$\dot{\omega}_1(M_1)>\dot{\omega}_2(M_1) \Longleftrightarrow F > 2\sigma G M_1^{2\sigma-1} \Longleftrightarrow FM_1>2\sigma G M_1^{2\sigma},$$

$GM_1^{2\sigma}=FM_1$ より, $\Longleftrightarrow FM_1>2\sigma FM_1 \Longleftrightarrow 1>2\sigma$. OK!.

$$\dot{\omega}_2(M_2)>\dot{\omega}_3(M_2) \Longleftrightarrow 2\sigma G M_2^{2\sigma-1} > J(2\lambda+1+M_2^2)M_2^{-2\lambda-2}e^{-M_2^2}$$

一方
$$2\sigma G M_2^{2\sigma-1} = \frac{2\sigma}{M_2}\left(\frac{\sigma(1-2\sigma)}{2(\sigma-\lambda)}\right)^{\frac{2\sigma}{2-\sigma}} \cdot G^{\frac{2}{2-\sigma}} \longrightarrow \frac{2\sigma}{S}>0,$$

$$M_2 \to \left(\frac{\sigma(1-2\sigma)}{2(\sigma-\lambda)}\right)^{1/2} \equiv S, \qquad \text{as } G\to\left(\frac{2(\sigma-\lambda)}{\sigma(1-2\sigma)}\right)^{\sigma}.$$

このとき,

$$J(2\lambda+1+M_2)M_2^{-2\lambda-2}e^{-M_2^2} \longrightarrow 0.$$

故に J を十分小さくとれば, $\dot{\omega}_2(M_2)>\dot{\omega}_3(M_2)$ が成立する.

§8　不等式(6.4)，$-0.1751 \leqq \lambda < 0$，の証明

$\alpha > 0,\ \beta > 0$　とする。　$\omega = \omega(x)$　を

$$(8.1)\qquad x^{\alpha}\,\omega^{-\beta}(1-\omega) = N$$

で定義される x の関数とみれば，その導関数 $\dot{\omega}(x)$ は，

$$(8.2)\qquad \dot{\omega}(x) = \alpha\, x^{-1}\,\omega(1-\omega)\left[\beta-(\beta-1)\omega\right]^{-1}$$

で与えられる．(8.1) を x^{-1} について解き，(8.2) にそれを代入すれば，

$$(8.3)\qquad \dot{\omega}(x) = \alpha\, N^{-1/\alpha}\ \frac{\omega^{(\alpha-\beta)/\alpha}\,(1-\omega)^{(1+\alpha)/\alpha}}{\beta-(\beta-1)\omega}$$

をえる．もう一度微分すれば，

$$(8.4)\qquad \ddot{\omega}(x) = \alpha N^{-\frac{2}{\alpha}}\ \frac{\omega^{\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}}\,(1-\omega)^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}}{\left[\beta-(\beta-1)\omega\right]^{3}}\times$$
$$\times\left[(\alpha-\beta+1)(\beta-1)\omega^{2}-2\beta(\alpha-\beta+1)\omega+(\alpha-\beta)\beta\right].$$

(8.2) を $f(x,\omega,\dot{\omega})$ の中の $x\dot{\omega}$ に代入すれば

$$(8.5)\qquad f(x,\omega(x),\dot{\omega}(x)) = \frac{2\omega^{-\frac{1}{2}}(1-\omega)}{\beta-(\beta-1)\omega}\Big[-2\lambda\beta-[\alpha-2\lambda(\beta-1)]\omega\Big]$$

故に，不等式　$\ddot{\omega}(x) \geqq f(x,\omega(x),\dot{\omega}(x))$　は，

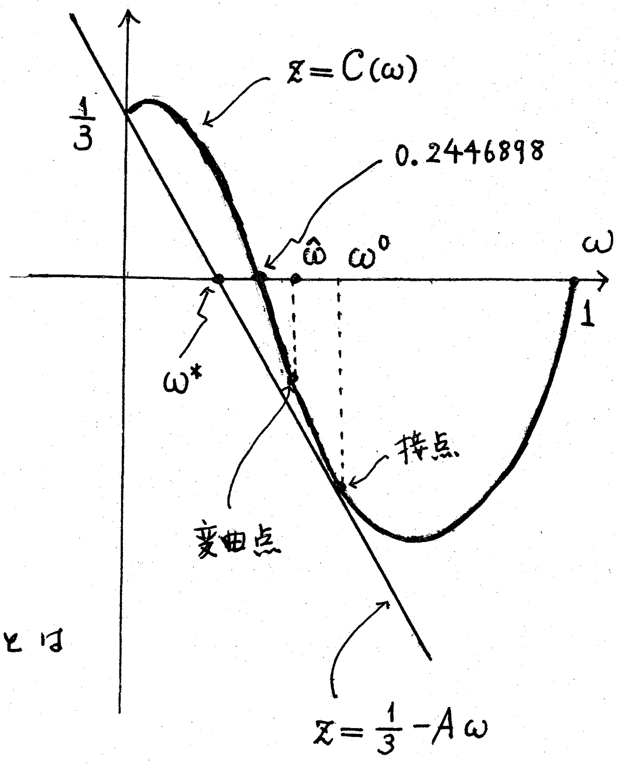
$$(8.6)\qquad \frac{\alpha N^{-\frac{2}{\alpha}}}{2}\ \frac{\omega^{\frac{3}{2}-\frac{2\beta}{\alpha}}\,(1-\omega)^{\frac{2}{\alpha}}}{\left[\beta-(\beta-1)\omega\right]^{2}}\Big[(\alpha-\beta+1)(\beta-1)\omega^{2}-$$
$$-2\beta(\alpha-\beta+1)\omega+(\alpha-\beta)\beta\Big] \geqq -2\lambda\beta-\big[\alpha-2\lambda(\beta-1)\omega\big],$$
$$0<\omega\leqq 1.$$

と同等になる。

$\omega=0$ の近くで成り立つためには $\alpha>\beta>0$ でなければならない。α, β に何組かの値を代入して数値的に計算した結果、$\beta=\frac{3}{4}\alpha$ のときが都合がよく、さらに $\alpha=3.32$, $\beta=2.49$ のときに最もよい結果がえられた。

(8.6) の左辺の、乗数項 $\alpha N^{-\frac{2}{\alpha}}/2$ を除き、$\alpha=3.32$, $\beta=2.49$ に対する値を $c(\omega)$ で表わせば

(8.7) $$c(\omega)=\frac{(1-\omega)^{\frac{1}{1.66}}}{(2.49-1.49\omega)^2}\left[2.7267\,\omega^2-9.1134\,\omega+2.0667\right]$$



となる。$z=c(\omega)$ が3点

$(0, \frac{1}{3})$, $(0.2446898, 0)$, $(1,0)$

を通ることはすぐわかる。

点 $(0, \frac{1}{3})$ を通る直線

(8.8) $$z=\frac{1}{3}-A\omega$$

が曲線 $z=c(\omega)$ と接するような A の値、その接点の ω-座標の値 ω^0 を求めよう。ω^0 と A とは

$$c(\omega)=\frac{1}{3}-A\omega\ ,\quad c'(\omega)=-A$$

なる連立方程式から定まる。

計算の結果、$C'(\omega)$ は次の式で与えられる:

(8.9) $$C'(\omega) = \frac{(1-\omega)^{-\frac{0.66}{1.66}}}{(2.49-1.49\omega)^3}[2.4474598\,\omega^3 - 12.270151\,\omega^2 + 32.058751\,\omega - 19.63365].$$

関係式$\omega A = \frac{1}{3} - C(\omega)$を用いてAを消去すれば，$\omega^0$は方程式

(8.10) $$G(\omega) \equiv 1.6180371\,\omega^4 - 12.161081\,\omega^3 + 14.081447\,\omega^2 - 11.284182\,\omega + 5.146083 - \frac{1}{3}(1-\omega)^{0.66/1.66}(2.49-1.49\omega)^3 = 0$$

の正根で与えられることがわかる。その根を求めるために，Casio fx-15を使用して計算した。結果は下表の通り：

ω	$G(\omega)$	$C'(\omega)$
0.62	0.0318998	
0.63	0.0019378	
0.6306	0.0000805	
0.63062	0.0000189	-1.4682855
0.63063	-0.0000129	-1.4682601
0.6307	-0.0002287	
0.631	-0.0011599	
0.633	-0.0074099	
0.635	-0.0137326	

この表から，

(8.11) $$0.63062 < \omega^0 < 0.63063$$

がわかる。$A = -C'(\omega^0)$より，Aの値は次の不等式をみたす：

(8.12) $$1.4682601 < A < 1.4682855.$$

接線$z = \frac{1}{3} - A\omega$と$\omega$-軸との交点の$\omega$-座標を$\omega^*$とすれば，$\omega^* = \frac{1}{3A}$より

(8.13) $$0.2270221 < \omega^* < 0.227026.$$

つぎに，$\alpha = 3.32$, $\beta = 2.49$のとき，(8.6)の右辺を$D(\omega,\lambda)$で表

わせば，

(8.14) $$D(\omega, \lambda) = -4.98\lambda - (3.32 - 2.98\lambda)\omega$$

で与えられる．直線 $z=D(\omega,\lambda)$ が $(\omega^*, 0)$ を通るときの λ の値を λ^* と書けば，

$$\frac{-4.98\lambda^*}{3.32 - 2.98\lambda^*} = \omega^* \quad \text{より} \quad \lambda^* = -\frac{3.32\omega^*}{4.98 - 2.98\omega^*}$$

したがって，

(8.15) $$-0.1751406 > \lambda^* > -0.1751441 \ .$$

さいごに，曲線 $z = C(\omega)$ は接線 $z = \frac{1}{3} - A\omega$ の下側にないことは直観的には明らかであると思う．これをはっきり確めるには，$C''(\omega)$ の符号を調べればよい．計算の結果

(8.16) $$C''(\omega) = \frac{(1-\omega)^{-1.16/0.83}}{(2.49 - 1.49\omega)^4} E(\omega) \ ,$$

(8.17) $$E(\omega) = -1.449898\omega^4 + 9.691941\omega^3 - 65.56909\omega^2 + 85.73518\omega - 27.37344 \ .$$

$E(\omega)=0$ の根 $\hat{\omega}$ は次頁の表からわかるように，不等式

$$0.4917 < \hat{\omega} < 0.4918$$

をみたす．この開区間に属する ω に対して

$$C(\omega) > \frac{1}{3} - A\omega$$

が成り立つ．故に この不等式は $0 < \omega \leqq 1$ において満足されることがわかる．

ω	$E(\omega)$	$C''(\omega)$	$C(\omega)$	$\frac{1}{3}-A\omega$
0	-27.37344			
⋮	⋮	−		
0.491	-0.021954			
0.4916	-0.005368			
0.4917	-0.002606	0	-0.3780487	-0.3886101
0.4918	0.000149		-0.378207	-0.388757
0.492	0.005661			
0.495	0.08787			
⋮	⋮	+		
1	1.034693			

Nの決め方を説明しよう。(8.6) が $\lambda=\lambda^*$ に対して成立するためには，

(8.18) $$\frac{3.32}{2} N^{-\frac{2}{3.32}} C(\omega) \geqq \mathcal{D}(\omega, \lambda^*)$$

が $\omega=0$ で成立するように N を定めればよい。$z=C(\omega)$ と $z=\frac{1}{3}-A\omega$ とは2点 $(0, \frac{1}{3})$, $(\omega^0, \frac{1}{3}-A\omega^0)$ を共有する。また直線 $z=\frac{1}{3}-A\omega$, $z=\mathcal{D}(\omega,\lambda^*)$ は点 $(\omega^*, 0)$ を共有する。したがって不等式(8.18)が成立するための必要十分条件は，$\omega=0$ のとき等号が成り立つことである。故に，

$$1.66\ N^{-\frac{1}{1.66}} \cdot \frac{1}{3} = -4.98\lambda^*,$$

すなわち，$$N=(-9\lambda^*)^{-1.66}.$$

さて $\frac{\partial}{\partial\lambda} D(\omega,\lambda) = -4.98 + 2.98\,\omega < 0$ $(0 \leqq \omega \leqq 1)$ であるから，$\lambda^* < \lambda < 0$ のとき，$0 \leqq \omega \leqq 1$ における直線 $z = D(\omega,\lambda)$ の部分は，直線 $z = D(\omega,\lambda^*)$ の部分より下側に位置する。したがって $N = (-9\lambda^*)^{-1.66}$ とおけば，

$$\frac{3.32}{2} N^{-\frac{2}{3.32}} C(\omega) > D(\omega,\lambda)$$

$$0 < \omega \leqq 1, \quad \lambda^* < \lambda < 0$$

が満足されることがわかる。

このように定められた N に対して，(8.1) から

$$\lim_{x \to 0} \omega(x)/x^{\frac{4}{3}} = N^{-1/2.49} = (-9\lambda^*)^{\frac{2}{3}}.$$

故に 境界値問題(B) の解 $y(x)$ に対して

$$\lim_{x \to 0} y(x)/x^{\frac{4}{3}} \geqq (-9\lambda^*)^{2/3} > (-9\lambda)^{2/3} \quad \text{for } \lambda^* < \lambda < 0.$$

(8.15) より $\lambda^* < -0.1751$ であるから，$-0.1751 \leqq \lambda < 0$ において

$$\lim_{x \to 0} y(x)/x^{\frac{4}{3}} > (-9\lambda)^{\frac{2}{3}}$$

が成り立つことがわかる。(1.4) により $\dot{y}(0) > 0$.

このようにして得られた解が Exponential type であることは説明するまでもなく明らかであろう。