数理解析研究所講究録
第268巻 1976年 44-51

Almost homeomorphic 3-manifolds

北大 教養 小林一章

ここでは C.H.Edwards, JR.[1] によって与えられた次の定理の別証明を与えます。

定理. M_1, M_2 をコンパクト3次元多様体とする。もし Int M_1 と Int M_2 が位相同形ならば M_1 と M_2 は位相同形である。

上の定理の証明に次の補題を使います。

補題1. F を連結閉曲面とし $(W;F,F)$ をコンパクト3次元 h-cobordism とすると $\partial\varphi \equiv \varphi|\partial W$ が位相写像となるようなホモトピー同値写像 $\varphi: W \longrightarrow F\times I$ がある。

定義. 3次元多様体 M の中の任意のコンパクト可縮な3次元部分多様体が3次元 ball D^3 に位相同形のとき M を (C.P.)-多様体という。

補題2. $(W;F,F)$ をコンパクト3次元 h-cobordism とし W は (C.P.)-多様体, F は連結閉曲面とするならば W は $F\times I$ と位相同形である。

補題3. F を連結な閉曲面とすると $F\times I$ は (C.P.)−多様体である。

補題1の証明) 今 $\partial W = \partial_- W \cup \partial_+ W = F \cup F$ とかく. W は h-cobordism だから deformation retraction $f: W \searrow \partial_- W$ がある。collar theorem より $U(\partial_- W) \cong F\times I$ (ここで $U(\partial_- W) \equiv U(\partial_- W, W)$ は $\partial_- W$ の W における正則近傍). そこで deformation retraction $\tilde{f}: W \searrow U(\partial_- W)$ で $\tilde{f}(\partial_+ W) \subset \partial_+ U(\partial_- W)$ なるものがあるとしてよい。(ここで $\partial U = \partial_- U \cup \partial_+ U = \partial_- W \cup \partial_+ U$ とかく) $U(\partial_- W) \cong F\times I$ だから $g: U(\partial_- W) \to F\times I$ を位相写像とすると $\tilde{\varphi} \equiv g\tilde{f}: W \longrightarrow F\times I$ はホモトピー同値写像で $\tilde{\varphi}|\partial_- W$ は位相写像, $(\tilde{\varphi}|\partial_+ W)_*: \pi_1(\partial_+ W) \to \pi_1(F\times\{1\})$ は同形写像になっている。従って $(\tilde{\varphi}|\partial_+ W)$ は位相写像 $\psi: \partial_+ W \longrightarrow F$ にホモトピック 即ち $\Phi_0 = (\tilde{\varphi}|\partial_+ W)$, $\Phi_1 = \psi$ となるホモトピー $\Phi: \partial_+ W\times I \longrightarrow F\times I$ が存在する。

$$\varphi = \begin{cases} \Phi & \text{on } U(\partial_+ W) \cong F\times I \\ \tilde{\varphi} & \text{on } W - \mathring{U}(\partial_+ W) \end{cases}$$

と定義する事によって, φ は求めるホモトピー同値写像になっている。

補題2の証明） Fについての次の様な列を作ります。

$F = F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_{p+1}$

α_i : properly embedded 2-sided simple arc or simple closed curve in F_i $(1 \leqq i \leqq p)$

$F_{i+1} = F_i - \mathring{U}(\alpha_i, F_i)$

F_{p+1} : disjoint union of 2-balls

（特に後の index 2 の embedded surgery のため $p \geqq 2$ としておく）. 補題1によってWからF×Iへのホモトピー同値写像 $f : W \longrightarrow F \times I$ で $\partial f \equiv f|\partial W$ が位相写像になっているものがある。$\alpha_i \times I$ は $F \times I$ に自然に埋め込まれているとし，f が各 $\alpha_i \times I$ に transversal になるようにしておくと，∂f が位相写像だから $f^{-1}(\alpha_i \times I)$ はWに proper に埋め込まれた連結な2次元曲面.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] & F \times I \\ f^{-1}(\alpha_i \times I) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \alpha_i \times I \arrow[u, hook, "j"'] \end{tikzcd}$$

ここで i, j は包含写像

$f|f^{-1}(\alpha_i \times I) = f'$ とおくと ∂f が位相写像だから

$f'_* : \pi_1(f^{-1}(\alpha_i \times I)) \longrightarrow \pi_1(\alpha_i \times I)$ は epimorphism.

$\alpha \in \ker f'_*$ は $i_*(\alpha) = 0$ だから α_i が F で 2-sided curve だという事を使うとWの中に埋め込まれた 2-ball D^2 で $D^2 \cap f^{-1}(\alpha_i \times I) = \partial D^2$ となるものがある。しかも $\alpha_i \times I$ が $F \times I$ で 2-sided,

従って $f^{-1}(\alpha_i \times I)$ が W で 2-sided である事と上の可換な図式より $\mathring{D}^2 \cap \bigcup_{j \neq i} f^{-1}(\alpha_j \times I) = \phi$ と仮定してよい。 この $\mathring{D}^2$ を使い次のような index 2 の embedded surgery を行ない α を消去する。先ず写像 g を $W - \mathring{U}(D^2, W)$ 上で次のように定義する。

$g | W - \mathring{U}(D^2, W) = f | W - \mathring{U}(D^2, W)$ ここで D^2 の正則近傍 $U(D^2, W)$ を十分小さくとっておくと $U(D^2, W) \cap f^{-1}(\alpha_i \times I)$ は $U(D^2, W)$ に proper に埋め込まれた annulus A である。

$U(D^2, W)$ の中に proper に埋め込まれた 2 つの disjoint 2-ball D_1, D_2 で $\partial A = \partial D_1 \cup \partial D_2$, $A \cap D_i = \partial D_i$ $(i = 1, 2)$ となっているものを選ぶ。 $\alpha \in \mathrm{Ker} f'_*$ より g を $g(D_i) \subset \alpha_i \times I$ になるように $D_1 \cup D_2$ 上に拡大出来る。次に $\pi_2((F - \bigcup_i \alpha_i) \times I) = 0$ より $U(D^2, W)$ の中の残りの 3 つの balls に対し g を拡大する事が出来，結局写像 $g : W \longrightarrow F \times I$ が得られ

$g | W - \mathring{U}(D^2, W) = f | W - \mathring{U}(D^2, W)$

$g^{-1}(\alpha_i \times I) = (f^{-1}(\alpha_i \times I) - \mathring{A}) \cup (D_1 \cup D_2)$ となっている。

しかも $f(U(D^2, W)) \cup g(U(D^2, W)) \subset (F - \bigcup_{j \neq i} \alpha_j) \times I$

そして最初の仮定 $p \geqq 2$ より $\bigcup_{j \neq i} \alpha_j \neq \phi$ 従って $\pi_3(F - \bigcup_{j \neq i} \alpha_j) = 0$、それ故 $g \simeq f$. このようにして W の境界では動かさないホモトピーの範囲内の変形で $\alpha \in \mathrm{Ker} f'_*$ を消去した。この操作をくり返して $\mathrm{Ker} f'_*$ を消去し，次の①，②を満足するホモトピー同値写像 $\tilde{g} : W \longrightarrow F \times I$ を得る。

① $\partial\tilde{g}=\partial f$（位相写像）　② $\tilde{g}|\tilde{g}^{-1}(\alpha_i\times I)$ は位相写像.
更にこのような事を全ての $\alpha_i\times I$ に対して行ない．次のようなホモトピー同値写像 h を得る。

$h: W\longrightarrow F\times I$ ） ⓐ $h\simeq f$ keeping ∂ fixed

ⓑ $h|h^{-1}(\alpha_i\times I): h^{-1}(\alpha_i\times I)\longrightarrow \alpha_i\times I$ は全ての i に対し位相写像になっている。

すると $(F-\bigcup_i\mathring{U}(\alpha_i,F))\times I=F_{p+1}\times I$ は 3-balls の disjoint union だから $W-\bigcup_i\mathring{U}(h^{-1}(\alpha_i\times I),W)$ は 3 次元コンパクト可縮な多様体であり，W は仮定によって (C.P.)-多様体だから全て 3 次元 ball になる。そこで $\hat{h}=h|\bigcup_i U(h^{-1}(\alpha_i\times I),W)$ とおいて $\hat{h}$ を cone extension technique で位相写像

$k: W\longrightarrow F\times I$ に拡大すればよい。

補題3の証明）．F についての次のような列を取ります。

$F=F_1\supset F_2\supset\cdots\cdots\supset F_{p+1}$

α_i: properly embedded simple arc or simple closed curve in F_i $(1\leqq i\leqq p)$.

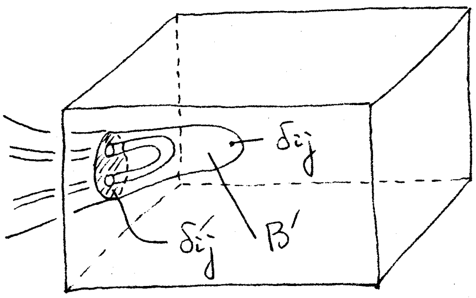
$F_{i+1}=F_i-\mathring{U}(\alpha_i,F_i)$

F_{p+1} : 2-balls の disjoint union

V を $F\times I$ の中のコンパクト可縮な 3 次元部分多様体とする。

従って∂Vは2次元球面S^2と位相同形．各$\alpha_i\times I$と∂Vがtransversalに交わるようにしておくと

$(\alpha_i\times I)\cap\partial V=\{\beta_{i1},\cdots,\beta_{ip_i}\}$ は simple closed curves の集合である。今β_{ij}が∂Vの中での inner-most curve であるとする（$\bigcup_{i,j}\beta_{ij}$ の中には必らず∂V の中での inner-most curves があるが任意のiに対して$\beta_{i1},\cdots,\beta_{ip_i}$ の中に∂Vの中での innermost curve があるとは限らない）．



すると次のような2-balls $\delta_{ij}\subset\partial V$，$\delta'_{ij}\subset\alpha_i\times I$ がある。即ち $\partial\delta_{ij}=\beta_{ij}=\partial\delta'_{ij}$，

$\delta_{ij}\cap\bigcup_{p,q}\beta_{p,q}=\beta_{ij}$.

そこで$(F-\mathring{U}(\alpha_1\cup\cdots\cup\alpha_p))\times I=F_{p+1}\times I$（3-balls の disjoint union）の中の1つの3-ball Bがδ_{ij}を含む。Schoenflies の定理によってδ'_{ij}はBを2つの3-ballsに分ける。δ_{ij}を含む方をB'とする。B'を使う事により$F\times I$の境界$(F\times\{0\}\cup F\times\{1\})$を動かさない$F\times I$のイソトピーにより交わり$\beta_{ij}$を消去する。このとき$\delta'_{ij}$と交わっていた$\{\beta_{i\ell}\}$も同時に消去される。この操作を有限回行なう事により$(F\times\{0\})\cup(F\times\{1\})$を動かさない$F\times I$の isotopy の範囲内の変形で$\partial V\cap\bigcup_i(\alpha_i\times I)=\phi$と出来る。従って$V$は$F_{p+1}\times I$の中の1つ

の3-ball に含まれるから Schoenflies の定理より $V \cong D^3$ が証明され、従って $F \times I$ は (C.P.)-多様体である。

定理の証明）．$h: \mathrm{Int}\, M_1 \longrightarrow \mathrm{Int}\, M_2$ を位相写像とする。$c_i: \partial M_i \times I \longrightarrow M_i$ $(i=1,2)$ を M_i の boundary collars とする。即ち c_i は embedding で $c_i(x,0)=x$ $(x \in \partial M_i)$ となっている。すると $h(M_1 - c_1(\partial M_1 \times [0,1))) \subset M_2$ であり，しかも $hc_1(F_{1j} \times \{1\}) \subset c_2(F_{2j} \times (0,1))$ となっているとすると $(W_j; hc_1(F_{1j} \times \{1\}), F_{2j})$ は h-cobordism（ここで F_{ij} $(i=1,2)$ は ∂M_i の連結成分） W_j の次元は3だから F_{1j} と F_{2j} は位相同形．これから先ず ∂M_1 と ∂M_2 が位相同形である事が証明される。そこで上の h-cobordism を簡単に $(W; F, F)$ とかくと $W \subset F \times I$ となっており，F は連結閉曲面．すると補題3から $F \times I$ は (C.P.)-多様体，そこで W も (C.P.)-多様体になる．何故なら V を W の中のコンパクト可縮な3次元部分多様体とすると $F \times I$ が (C.P.)-多様体だから V は D^3 と位相同形．従って W は (C.P.)-多様体．すると補題2より W は $F \times I$ に位相同形．従って h を位相写像 $H: M_1 \longrightarrow M_2$ に拡張出来る。従って $M_1 \cong M_2$ が証明された。

Reference

C. H. Edward Jr : *Concentricity in 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 113 (1964), 406 ~ 423.