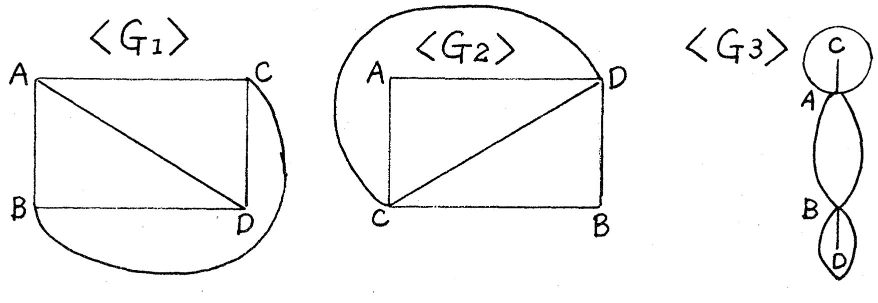
数理解析研究所講究録
第 268 巻 1976 年 52-68

genus 2 の Heegaard 分解をもつ homology 3-sphere

東工大 情報科学科 落合豊行

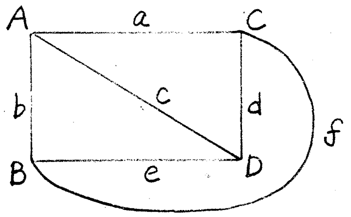
Tatsuo Homma [1] により、genus 2 の Heegaard 分解を持つ 3 次元多様体の構造と平面 graph との間に密接な関係があることが示された。この基本的考えにもとずいて、下記に述べる 3 つの平面 graph から全ての genus 2 homology 3-sphere が理論的に computer で実現できることが示される。さらに homotopy 3-sphere と homology 3-sphere との間の相違点を computer で作った homology 3-sphere のモデルから見つけだすことを目的として、実際に program を実行し、解析を行ってみることにする。

定義）平面 graph G_1, G_2, G_3 とは次の 3 つの graph のことである。

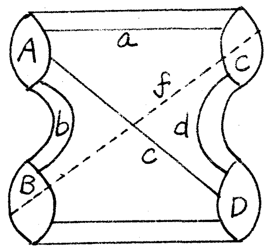


以下で program の説明を行ってみることにする。

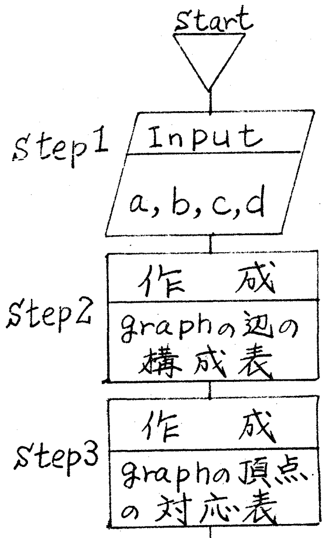
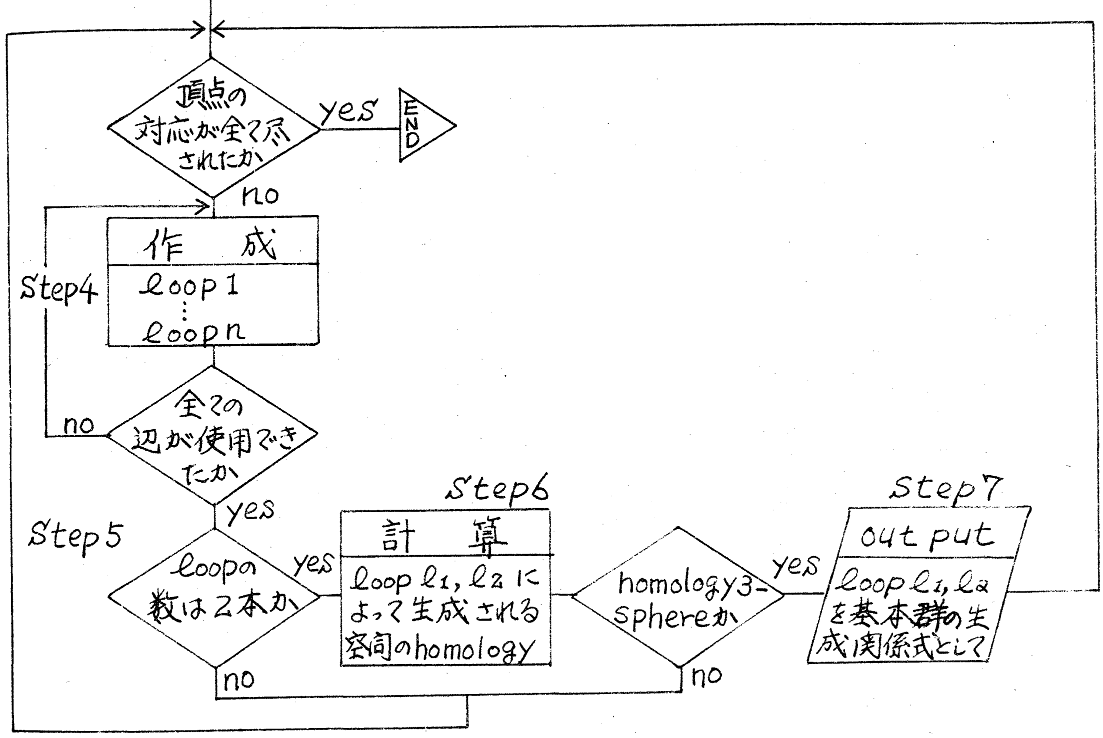
Step1：graph G は input として、次の様に辺の重複度に基ずく parameter a, b c, d, e, f で与えられる。



<G1>



<Fig1>

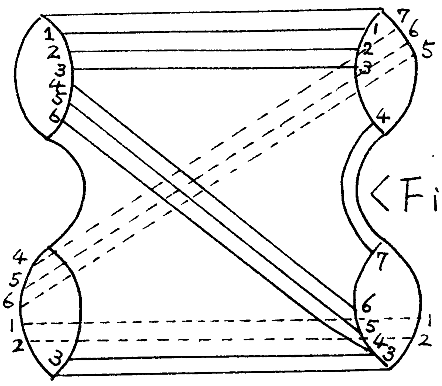



ところが、graph G_1 から Fig-1をもとにして genus 2 の solid torus を作るには A と B，C と D を張り合わせて作るので、実際には $a=e$，$c=f$ であるので．input すべき

parameter は a, b, c, d でよい。$N = a+b+c$, $M = a+d+c$ とすれば、N, M なる2つの parameter でもよい。

Step 2：次に computer が Heegaard 分解における2つの meridian disk の張り合わせを作る為に必要とする辺の構成を作る。graph G_1 では、

A_1	C_1
A_2	C_2
$\wr$	
A_a	C_a
A_{a+1}	D_{a+1}
$\wr$	
A_{a+c}	D_{a+c}
A_{a+c+1}	B_{a+1}
$\wr$	
A_{a+c+b}	B_{a+b}
B_1	D_1
$\wr$	
B_a	D_a
B_{a+b+1}	C_{a+d+c}
$\wr$	
B_{a+b+c}	C_{a+d+1}
C_{a+1}	D_{a+c+1}
$\wr$	
C_{a+d}	D_{a+c+d}



<Fig 2>

Fig-2で与えられるgraphの構成表を書いて見ると次の様になる。(Fig-3)

Fig-3

A_1	C_1
A_2	C_2
A_3	C_3
A_4	D_6
A_5	D_5
A_6	D_4
B_1	D_1
B_2	D_2
B_3	D_3
B_4	C_7
B_5	C_6
B_6	C_5
C_4	D_7

Step3：張り合わせを与える diskA と diskB, diskC と diskD との対応表を作る。

例、Fig-2 で次の対応表となる。この対応

$A_1 \longleftrightarrow B_5$	$C_1 \longleftrightarrow D_3$
$A_2 \longleftrightarrow B_6$	$C_2 \longleftrightarrow D_4$
$A_3 \longleftrightarrow B_1$	$C_3 \longleftrightarrow D_5$
$A_4 \longleftrightarrow B_2$	$C_4 \longleftrightarrow D_6$
$A_5 \longleftrightarrow B_3$	$C_5 \longleftrightarrow D_7$
$A_6 \longleftrightarrow B_4$	$C_6 \longleftrightarrow D_1$
	$C_7 \longleftrightarrow D_2$

表で、trefoil knot から Dehn constructionによって作られるhomology 3-sphereのgenus 2 Heegaard 分解ができる。

Step 4：Heegaard 分解を与える（2つの）loop l_1, l_2 を作る。Fig-3の例でloop l_1, l_2を表示して見ると、

l_1；$(A_1C_1)(D_3B_3)(A_5D_5)(C_3A_3)(B_1D_1)(C_6B_5)$

l_2；$(A_2C_2)(D_4A_6)(B_4C_7)(D_2B_2)(A_4D_6)(C_4D_7)(C_5B_6)$

Step 5：computerは2本以上のloopを持つ空間を作るが、genus 2 のHeegaard 分解には2つのmeridianの張り合わせの為に丁度2本のloopのみを必要とする。

Step 6：2本のloop l_1, l_2 は作られるHeegaard分解のhomologyとhomotopy群を決定する、すなわち基本群の生成関係式を与える。これを使ってhomology群がtrivialかどうかを決める。すなわち、loop l_1, l_2 の辺の結びつきの中で $\overrightarrow{BA}$ を $+1$, $\overrightarrow{AB}$ を -1, $\overrightarrow{CD}$ を $+1$, $\overrightarrow{DC}$ を -1 と決め、次の2次の行列式が ± 1 になるかどうかでhomology 3-sphereかどうかを決定できる。

$$\begin{pmatrix} \sum_{l_1} \overleftrightarrow{BA} & \sum_{l_1} \overleftrightarrow{CD} \\ \sum_{l_2} \overleftrightarrow{BA} & \sum_{l_2} \overleftrightarrow{CD} \end{pmatrix}$$

Step 7：(1) Step4で書いたloop l_1, l_2 の結合表。

(2) $\overrightarrow{BA}$ を s, $\overrightarrow{CD}$ を t とし、s, t を基本群の

２つの生成元として l_1, l_2 を生成関係式として表現する。

例えば、Step4の例を関係式で書いて見ると、

l_1; $tst^{-1}s^{-1}t^{-1}s = 1$

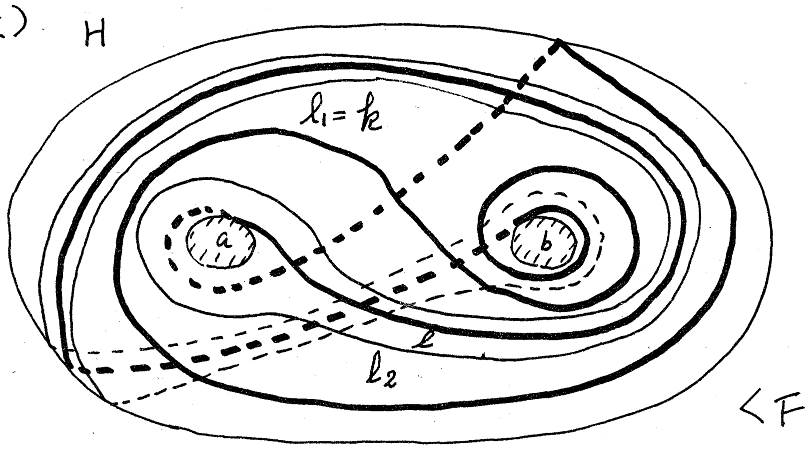
l_2; $ts^{-1}tst^{-2}s = 1$ となる。

(1)、(2) を output として list out する。

次に computer で作った example の解析を始める前に、以下のことを述べておく。2-brigde knot から Dehn construction で作られる homology 3-sphere の Heegaard 分解は次の proposion で述べる如く簡単に作れる。

prop ; 2-brigde knot から自然な方法で genus 2 の Heegaard 分解をもつ homology 3-sphere が作れる。

（証）



<Fig-4>

S^3 に standard に embed された genus 2 の Solid torus を H とする。a, b を H の外側に張った proper な 2つの disk とする。このとき 2-brigde knot k は ∂H の上で a, b とそれぞれ一点づつで交わるようにできる。従って、disk

aとbを結ぶk上の2つのarcが存在する。このarcのうちの1つをlとする。そのとき$a \cup b \cup l$と平行な∂H上のsimple closed curveでkと交わらないものが常に存在する。これをl_2とする。l_2にはHの外側でS^3におけるdiskがはれる。今solid torus Hの2つの生成元をs, tとするとl_2に張ったdiskは$st \sim o$なる関係を与える。一方、$k = l_1$はa, bとそれぞれ一点ずつで交わるのでs, tの間のどんな関係式をも作れるように∂H上にembedされたままで変えられる。よってl_1, l_2をHeegaard分解の2つのmeridian diskの張り合わせとするhomology 3-sphereが作れる。又、disk a,(b)とl_2に張ったdiskで作られるHeegaard分解はS^3のHeegaard分解を与えるので、l_1, l_2はknot kからDehn constructionで作られるhomology 3-sphereのHeegaard分解を与える。実際Fig-4はStep 3で述べているtrefoil knotからDehn constructionで作られるhomology 3-sphereのHeegaard分解を与えている。

さて、Facom 230-45Sで作ったいくつかのhomology 3-sphereの解析を始める。Exampleの範囲は$N \leqq 15$, $M \leqq 15$で作ってみた。使用言語はassemblerを使った。

〔I〕 $\pi_1(M) \neq 0$ が示せる例

(II₁) $\begin{cases} b^2a^3b^2a^2b^2a^3b^2a^{-1} = 1 & \text{—— (1)} \\ b^5a^3b^2a^3 = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$

(2)より $a^3b^2 = b^{-5}a^{-3}$ これを(1)に代入して

$b^2(b^{-5}a^{-3})a^2b^2(b^{-5}a^{-3})a^{-1} = 1$

$b^{-3}a^{-1}b^{-3}a^{-4} = 1$ $a^4b^3ab^3 = 1$ —— (3)

ここで $b^3 = 1$ とおくと (3) より $a^5 = 1$

(2)より $b^2a^3b^2a^3 = 1$ $b^{-1}a^{-2}b^{-1}a^{-2} = 1 \to (ba^2)^2 = 1$

$y = ba$ とおくと $b = ya^{-1}$

$a^5 = (ya^{-1})^3 = (ya)^2 = 1$ —— (4)

従って (I₁) は(4)で表現される群が non-trivial なら

$\pi_1(M) \neq 0$ ところが $a^5 = y^5 = (ya)^2 = (ya^{-1})^3 = 1$

で表現される群は[2]によって non-trivial である。

(II₂) $\begin{cases} baba^{-3}baba^{-3}baba^{-2} = 1 & \text{—— (1)} \\ b^4a^{-1}b^{-1}a^{-1}b^3a^{-1}b^{-1}a^{-1} = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$

Heegaard 分解の2つの meridian disk を(1), (2)で張り合わせる attach map を f とする。このとき f^{-1} を表現する関係式は図を書いてみると、(f で書いた関係式を f^{-1} で書いたものを conjugate presentation とする。) $a^3 = b^2a^8b^2$ —— (3)

$b^2 = a^3b^7a^3$ —— (4) となる。

今、$a^{11} = b^9 = 1$ とおくと (3),(4) 共に $(a^3 b^{-2})^2 = 1$

さらに $A = a^3$, $B = b^2$ とおくと、$a = A^4$, $b = B^5$

従って $A^{11} = B^9 = (AB^{-1})^2 = 1$ これは non-trivial [2]。

(II3) $\begin{cases} a^2 = b^{-1}ab^{-1}aba^{-1}ba^{-1}bab^{-1}ab^{-1} & \text{—— (1)} \\ b^2 = a^{-1}ba^{-1}bab^{-1}ab^{-1}aba^{-1}ba^{-1} & \text{—— (2)} \end{cases}$

$x = a^{-1}b$ とおくと、(2)により $b^3 = (a^{-1}b)^2 a (b^{-1}a)^2 b (a^{-1}b)^2$

$a = bx^{-1}$ であるから $b^3 = x^2 b x^{-1} x^{-2} b x^2$

$b^3 = x^2 b x^{-3} b x^2$ —— (3)

又(1) より　$a^3 = (b^{-1}a)^2 b (a^{-1}b)^2 a (b^{-1}a)^2$

$(bx^{-1})^3 = x^{-2} b x^2 b x^{-1} x^{-2}$

$(bx^{-1})^3 = x^{-2} b x^2 b x^{-3}$ —— (4)

(3)と(4)において $x \longrightarrow -x$

$x^2 b^3 x^2 = b x^3 b$ —— (5)

$(bx)^3 = x^2 b x^{-2} b x^3$ —— (6)

(5)より　$x^{-2} b x^3 = b^3 x^2 b^{-1}$ これを(6)に代入して

$(bx)^3 = x^2 b (b^3 x^2 b^{-1})$　$(bx)^3 = x^2 b^4 x^2 b^{-1}$

$x^3 = b^5 = 1$ とおくと　$(bx)^3 = x^{-1} b^{-1} x^{-1} b^{-1}$

故って $(bx)^5 = 1$

(5)より $x^{-1} b^{-2} x^{-1} = b^2$　$(x b^2)^2 = 1$

ここで $xb = y$ とおくと $x = y b^{-1}$

$b^5 = y^5 = (yb)^2 = (yb^{-1})^3 = 1$ となる。

ところがこれは、〔2〕により non-trivial。

(Ⅱ4) $\begin{cases} a = b^2a^2b^{-2}a^{-2}b^{-2}a^2b^2 & \text{—— (1)} \\ b = a^2b^2a^{-2}b^{-2}a^{-2}b^2a^2 & \text{—— (2)} \end{cases}$

(1)より　$b^2a^2b^{-2}a^{-2} = ab^{-2}a^{-2}b^2$

(2)より　$b^2a^2b^{-2}a^{-2} = a^{-2}b^2a^2b^{-1}$

$ab^{-2}a^{-2}b^2 = a^{-2}b^2a^2b^{-1}$

$a^3b^{-2}a^{-2}b^3 = b^2a^2$ —— (3)

ここで $a^5=1$, $b^5=1$ とおくと

$a^3b^3a^3b^3a^3b^3 = 1 \longrightarrow (a^3b^3)^3 = 1$ —— (4)

(4)より　$b^{-2}a^{-2}b^{-2} = b^3a^3b^3 = a^{-3}b^{-3}a^{-3}$

故って　$a = b^2a^2(b^{-2}a^{-2}b^{-2})a^2b^2$

$= b^2a^2a^{-3}b^{-3}a^{-3}a^2b^2$

従って　$a = b^2a^{-1}b^{-3}a^{-1}b^2 \longrightarrow (a^{-1}b^2)^3 = 1$ —— (5)

$A = a^3$, $B = b^3$ とおくと　$a = A^2, b = B^2$ となり、

$A^5 = B^5 = (AB)^3 = (A^2B)^3 = 1$

$C = AB$ とおくと　$A^5 = C^3 = (A^{-1}C)^5 = (AC)^3 = 1$

$D = AC$ とおくと　$C^3 = D^3 = (DC^{-1})^5 = (CD^{-1}C)^5 = 1$

$C^3 = D^3 = (DC^{-1})^5 = (DC)^5 = 1$ —— (6)

(6)式は〔2〕により non-trivial である。

(Ⅱ5) $\begin{cases} a^2 = bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab \\ b^2 = aba^{-1}bab^{-1}a^{-1}b^{-1}aba^{-1}ba \end{cases}$

この式は(II_2)で述べたconjugate presentationで書いて見ると(II_4)式になるので、やはりnon-trivialである。

$$(\mathrm{II}_6)\quad \begin{cases} ba^{-1}ba^2b^{-1}a^{-2}b^{-1}a^2ba^{-1} = 1 \\ ba^2b^8a^2ba^{-3} = 1 \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}_6')\quad \begin{cases} ba^{-1}ba^2b^{-1}a^{-2}b^{-1}a^2ba^{-1} = 1 \\ ba^2b^na^2ba^{-3} = 1 \end{cases}$$

(II_6')をconjugate presentationで書くと

$$\begin{cases} a^2 = b^{-1}aba^{-1}bab^{-1}aba^{-1}bab^{-1} & \text{—— (1)} \\ b^na^{-1}ba^3ba^{-1} = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

$a^4 = 1$とおくと　(2)より　$b^na^{-1}ba^{-1}ba^{-1} = 1$

$$b^{n-1} = (ab^{-1})^3 \quad \text{—— (3)}$$

さらに　$b^{n-1} = 1$とおくと　$ab^{-1}ab^{-1} = ba^{-1}$で

(1)より　$(ba^{-1})b(ba^{-1})b(ba^{-1})b(ba^{-1})b(ba^{-1})b = 1$

故に　$(ba^{-1}b)^5 = 1$

ここで　$x = ab^{-1}$とすると　$a = xb$

$$x^3 = b^{n-1} = (xb)^4 = (x^{-1}b)^5 = 1 \quad \text{—— (4)}$$

[2]によって　$n-1 = 3m$ $(m = 0, \pm 1, \cdots)$のとき、non-trivial。

注)　(II_6')は(II_6)がHeegaard分解を与えることから、それ自身Heegaard分解を与える。

$$(\mathrm{II}_7)\begin{cases} babab^{-4}ababa^{-3}=1 \\ babab^{-3}ababa^{-4}=1 \end{cases}$$

conjugate presentationで表わすと

$$(\mathrm{II}_7')\begin{cases} abababab^{-1}a^{-2}b^{-2}a^{-2}b^{-1}=1 & \text{—— (1)} \\ bababa^{-1}b^{-2}a^{-2}b^{-2}a^{-1}=1 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

$x=ab$とおくと　$a=xb^{-1}$, $a^{-1}=bx^{-1}$

(1)より　$x^4b^{-2}bx^{-1}bx^{-1}b^2bx^{-1}bx^{-1}b^{-1}=1$

$x^4b^{-1}x^{-1}bx^{-1}b^{-1}x^{-1}bx^{-1}b^{-1}=1$ —— (3)

(2)より　$bx^3bx^{-1}b^{-2}bx^{-1}bx^{-1}b^2bx^{-1}=1$

$bx^3bx^{-1}b^{-1}x^{-1}bx^{-1}b^{-1}x^{-1}=1$ —— (4)

(3)+(4)より　$bx^3(xbx^{-4})x^{-1}=1$　$bx^4b=x^5$ —— (5)

ここで　$y=bx^4$とおくと　$b=yx^{-4}$, $b^{-1}=x^4y^{-1}$

さらに　$x^9=1$とおくと　(5)より　$y^2=1$

(4)より　$(xy)^5=1$

$x^9=y^2=(xy)^5=1$　(unknown)

$$(\mathrm{II}_8)\begin{cases} a^2=bab^{-1}a^{-1}b^{-1}abab^{-1}a^{-1}b^{-1}ab \\ b^2=aba^{-1}b^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba \end{cases}$$

conjugate presentationによって(II_3)と同型。

(II_8)は $\begin{cases} a^2=bab^{-1}a^{-1}b^{-1}abab^{-1}a^{-1}b^{-1}ab \\ b^m=aba^{-1}b^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba \end{cases}$

でも、成立。

(II9) $\begin{cases} ba^2ba^{-1}b^{-3}a^{-1} = 1 & \text{—— (1)} \\ ba^3ba^{-1}b^{-2}a^{-1}ba^3ba^{-1}b^{-2}a^{-1}b^{-2}a^{-1} = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$

$a^3 = 1$ とおくと (1)より $ba^{-1}ba^{-1}b^{-3}a^{-1} = 1$

$b^4 = (a^{-1}b)^3$ —— (3)

$b^4 = 1$ とおくと (2)より $(b^2a^{-1})^5 = 1$ —— (4)

$y = ba^{-1}$ とおくと $b = ya$ で (3) より $y^3 = 1$

(4)より $(yayaa^{-1})^5 = (yay)^5 = 1$

$(y^2a)^5 = 1 \longrightarrow (y^{-1}a)^5 = 1$

従って $a^3 = y^3 = (ya)^4 = (y^{-1}a)^5 = 1$

[2]により non-trivial。

(II10) $\begin{cases} ba^{-1}b^2a^{-1}ba^{-1}b^{-1}ababab^{-1}a^{-1} = 1 & \text{—— (1)} \\ ba^{-1}b^2a^{-1}ba^4ba^{-1}b^2a^{-1} = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$

(2)より $b^3 = 1$ とおくと $ba^{-1}ba^{-1}ba^4ba^{-1}ba^{-1} = 1$

$a^5 = (ab^{-1})^5$

$a^5 = 1$ とおくと (1)より $(ba^{-1})^3b^{-1}ababab^{-1}a^{-1} = 1$

$(ba)^4 = 1$

従って $a^5 = b^3 = (ab)^4 = (ab^{-1})^3 = 1$ (unknown)

(II11) $\begin{cases} baba^{-1}b^{-1}a^{-3}b^{-1}a^{-1}b^4a^{-1}b^{-1}a^{-3}b^{-1}a^{-1} = 1 & \text{—— (1)} \\ b^3a^{-1}b^{-1}a^{-2}b^{-1}a^{-1} = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$

(2)より $a^2 = b^{-1}a^{-1}b^3a^{-1}b^{-1}$ —— (3)

(1) + (3) より $b^2 = aba^{-1}b^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba$ —— (4)

(4) + (2) より $b(aba^{-1}b^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba)a^{-1}b^{-1}a^{-2}b^{-1}a^{-1} = 1$

$a^{-3} = bab^{-1}a^{-1}b^{-1}abab^{-1}a^{-1}b^{-1}ab$ —— (5)

$(\mathrm{II}_{11}) \cong (4) + (5)$ で (4) + (5) において $a^5 = 1$ とおいて上式は non-trivial であるので (II_{11}) も non-trivial。

(II_{12})
$$\begin{cases} ba^{-1}b^{-2}a^{-1}ba^{-1}b^{-2}a^{-1}ba^{-4} = 1 & \text{—— (1)} \\ ba^{-1}b^{2}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}ababab^{-1}a^{-1} = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

$b^3 = 1$ とおくと (1) より $a^3 = (ba^{-1})^5$

$a^3 = 1$ とおくと (2) より $(ba^{-1})^3 b^{-1}ababab^{-1}a^{-1} = 1$

ところが $(ba^{-1})^3 = ab^{-1}ab^{-1}$ より $(ba)^4 = 1$

従って $a^3 = b^3 = (ab)^4 = (a^{-1}b)^5 = 1$

[2] により non-trivial。

(II_{13})
$$\begin{cases} baba^{-1}b^{-2}a^{-1}ba^2ba^{-1}b^{-2}a^{-1} = 1 & \text{—— (1)} \\ ba^2ba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba^2ba^{-1}b^{-2}a^{-1} = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

(1) + (2) より $aba^{-1}bab^{-1} = 1$ $(ba^{-1} = x)$ なる関係式をもつので (II_{13}) は torus knot からの Dehn construction による homology 3-sphere の問題に帰着できるので (4) により non-trivial。

(II_{14})
$$\begin{cases} ba^{-1}b^{-2}a^{-1}ba^2ba^{-1}b^{-2}a^{-1} = 1 & \text{—— (1)} \\ ba^2ba^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}ba^2ba^{-1}b^{-2}a^{-1} = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

(1) + (2) により $a^2ba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba = 1$

$a^3 = b^{-1}abab^{-1}$ これは変換 $x = ab$ で

$x^{a} = axa$ となり (Ⅱ₁₄) は (Ⅱ₁₃) と同様になる。

(Ⅱ₁₅) $\begin{cases} a^2 = babab^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}abab \\ b^2 = ababa^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}baba \end{cases}$

$b \longrightarrow b^{-1}$ で (Ⅱ₁₅) は (Ⅱ₃) と同型。

(Ⅱ₁₆) $\begin{cases} a^2 = b^{-1}a^{-1}b^{-1}abababab^{-1}a^{-1}b^{-1} & \text{—— (1)} \\ b^2 = a^{-1}b^{-1}a^{-1}babababa^{-1}b^{-1}a^{-1} & \text{—— (2)} \end{cases}$

(1) により　$x = ab$ とおくと　$b = a^{-1}x$, $b^{-1} = x^{-1}a$ から

$a = x^{-2}ax^{3}ax^{-2}$

$x^2ax^2 = ax^3a$　　$y = ax$ の変換を続けて

$x^2yx^2 = y^2$ となる。

従って (Ⅱ₁₆) も又 (Ⅱ₁₃) と同様に non-trivial。

(Ⅱ₁₇) $\begin{cases} a^2 = b^{-1}abab^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}abab^{-1} \\ b^2 = a^{-1}baba^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}baba^{-1} \end{cases}$

$b \to b^{-1}$　　$a^2 = bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab$

$b^2 = aba^{-1}bab^{-1}a^{-1}b^{-1}aba^{-1}ba$

$x = a^{-1}b$ の変換で　$a = xax^{-1}axa^{-1}x^{-1}a^{-1}xax^{-1}ax$

$y = a^{-1}x$ の変換で　$1 = yay^{-1}aya^{-1}y^{-1}a^{-1}yay^{-1}ay$

$y^2 = a^{-1}ya^{-1}y^{-1}ayay^{-1}a^{-1}ya^{-1}$

(Ⅱ₁₇) も又 (Ⅱ₁₃) と同様に non-trivial。

(Ⅱ₁₈) $\begin{cases} a^2 = b^{-1}aba^{-1}b^{-1}abab^{-1}a^{-1}bab^{-1} \\ b^2 = a^{-1}bab^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}aba^{-1} \end{cases}$

(Ⅱ8) は conjugate presentation でも表示 (Ⅱ8) をもつ。

unknown。

〔Ⅱ〕2つの関係式がどちらかに代入可能であるが $\pi_1(M)\neq 0$

(Ⅱ1) $\begin{cases} baba^{-2}=1 & \text{—— (1)} \\ babab^{-5}ababa^{-3}=1 & \text{—— (2)} \end{cases}$

$a^3=(ba)^2=1$ とおくと $a^3=b^5=(ab)^2=1$ となり、

non-trivial であるが (1) を (2) に代入した後

$babab^{-5}a\underline{baba}^{-2}a^{-1}=1$ では $\begin{cases} baba^{-2}=1 \\ b^{-4}aba=1 \end{cases}$ となり

代入可能性はなくなる。

(Ⅱ2) $\begin{cases} baba^{-2}=1 \\ baba^{-1}b^{-1}a^{-1}b^3a^{-1}b^{-1}a^{-1}baba^{-1}=1 \end{cases}$

(Ⅱ3) $\begin{cases} baba^{-1}ba^2b^4a^2ba^{-1}=1 \\ bababa^{-1}=1 \end{cases}$

$a^3=b^5=(ab)^3=1$ non-trivial

代入1回後では $\begin{cases} a^2b^5=1 \\ bababa^{-1}=1 \end{cases}$ となり代入可能性はなくなる。

(Ⅱ4) $\begin{cases} baba^{-2}=1 \\ babab^{-6}ababa^{-3}bababa^{-3}=1 \end{cases}$

$a^2=bab,\ b^4=aba$ で non-trivial。

(Ⅱ5) $\begin{cases} bababababababa^{-2}b^{-1}a^{2}b^{4}a^{2}b^{-1}a^{-2}=1 \\ b^{3}a^{2}=1 \end{cases}$

$a^2=b^3=(ab)^5=1$

〔Ⅲ〕 $\pi_1(M)=1$ であるexample

(Ⅲ1) $\begin{cases} ba^2b^2a^2b^2a^2b^2a^2ba^{-1}=1 & \text{—— (1)} \\ b^{-2}a^{-2}b^{-2}a^{-2}b^{-3}a^{-2}=1 & \text{—— (2)} \end{cases}$

(2)の逆をとって　$b^3a^2b^2a^2b^2a^2=1$ これは (1) に代入

可能で　$ba^2b^2a^2b^2a^2b^2a^2ba^{-1}=1$

$$\begin{cases} b^3a^2b^2a^2b^2a^2=1 \\ ba^2a^{-1}=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} b^3a^2b^2a^2b^2a^2=1 \\ ba=1 \end{cases}$$

$N \leqq 15$, $M \leqq 15$ の範囲では $\pi_1(M)=0$ のときは全ての

exampleが最後の段階 ($a=1$, $b=1$) まで代入可能で

ある。

〔Ⅳ〕最後に, exampleから予想されるhomologyとhomotopy

の相違点は次に帰着するものと思われる。

『genus 2のHeegaard分解をもつhomology 3-sphere

がhomotopy 3-sphereである為の必要十分条件は,

fあるいはf^{-1}のどちらかが生成する2つの関係式が,

どの段階でも, 代入可能であること。』

参考文献

[1] Tatsuo Homma ; Heegaard分解と曲面上の曲線系数理解析研究所講究録 1974

[2] H・S・M. Coxeter; The abstract groups $G^{m,n,p}$ Trans. Amer. Math. Soc 45 (1939), 73-150

[3] R.H. Bing & Martin ; Cubeswith knotted holes. Trans. Amer. Math. Soc 155 (1971), 217-231

[4] J. Hempel ; A simmly connected 3-manifold is S^3 if it is the sum of a solid torus and the complement of a torus knot, Proc. Amer. Math Soc 15 (1964), 154-158

最近2-brigde knot に関して、特に 6_2, 6_3 に対する cudes with knotted holes の問題に関して、computer で解決した論文が表われた。

[5] R. Riley ; knots with parabolic property-P, J. Math Oxford, 25 (1974) 273-283