数理解析研究所講究録
第268巻 1976年 69-74

2次元単体複体に対する Cartan の定理の analogy

東大 理 大川哲介

<u>定義</u> C_nを中味を含まないn辺形の cone とする．C_n $(n\leqq 5)$を曲率正の cone，C_6を曲率0の cone，$C_n(n\geqq 7)$を曲率負の cone と呼ぶ．

<u>定理</u> 単体複体Kが曲率正の cone を含まぬならば $\pi_n(|K|)=0$ $(n\geqq 2)$ となる．

<u>注意</u> C_3を含まぬことより，必然的に $\dim K\leqq 2$ となる．

<u>lemma 1</u> S^2の単体分割は曲率正の cone を含む．

<u>証明</u> $|K|=S^2$，Kに於いて辺がn個集まっている頂点の総数をa_n，辺，面の総数をb_n，C_nとすると

$$b=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty} na_n\ ,\quad c=\frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty} na_n$$

となり，Euler 数を計算すると，

$$\sum a_n-\frac{1}{2}\sum na_n+\frac{1}{3}\sum na_n=\sum\frac{(6-n)}{6}a_n$$

となるが，$a_3 = a_4 = a_5 = 0$ とすると Euler 数 $\leqq 0$ となり矛盾である．

<u>lemma 2</u>　K を $\pi_2(K) \neq 0$ なる単体複体とするとき，S^2 の適当な単体分割 L に関する単体写像 $f : L \to K$ で

i)　$f \not\simeq 0$

ii)　f は L の頂点を除いて immersion となる

ものが存在する．

<u>証明</u>　単体近似定理により S^2 の適当な単体分割 L と単体写像 $f : L \to K$ で $f \not\simeq 0$ なるものが取れる．f が ii) を満たさぬとき，次なる reduction を行なう．

<u>Case 1</u>　退化する辺がある場合．

その辺を a，a の両端点を A，B，link $a = \{C, D\}$ とする．

<u>Case 1.1</u>　$\{A, C, D\}$ もしくは $\{B, C, D\}$ がある2単体の3頂点となっている場合．$\{A, C, D\}$ が2単体 α の3頂点になっていたとする．さらに $\{B, C, D\}$ が2単体の3頂点になっていたとすると $f \simeq 0$ となり仮定に反するから，そうでないとする．L から A，BC，ABD，α を取り除き，1個の2単体をはめ込んで L' ($|L'| \approx S^2$) を作り，f を $f' : L' \to K$ へ reduction して，$f' \not\simeq 0$ と出来る．

<u>Case 1.2</u>　$\{A, C, D\}$，$\{B, C, D\}$ が2単体の3頂点になっておらず，頂点 $E \in L$ で，EA，EB が L の辺になっており，

$\{A, B, E\}$ が2単体の3頂点とならないものが存在すると, Lから3辺形ABEを取り除いて2つに分け, 各々に2単体をはめ込んで L_1, L_2 ($|L_1| \approx |L_2| \approx S^2$) とする. f を $f_i: L_i \to K$ に reduce すると $f \simeq f_1 + f_2$ だから f_1, f_2 のうち少なくとも一方は $f_i \not\simeq 0$ と出来る.

<u>Case 1.3</u> case 1.2 のような頂点Eがない場合, この時退化する辺 a を単体複体として一点に縮めればやはり単体複体 L' を得るから, f を $f': L' \to K$ に reduce すれば $f' \not\simeq 0$ となる.

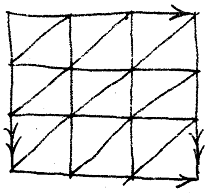
<u>Case 2</u> 辺 $a \in L$ で, $f(\text{link } a) = \{\text{one pt.}\}$ となるものが存在する場合, a の両端点をA, B, link $a = \{C, D\}$ とし, LからABC, ABDを取り除いて $\{C, D\}$ を一点に縮めるのであるが, 縮めたものが単体複体とならぬ場合も, Case 1 と同様な reduction を行うことが出来る. 以上より, $f: L' \to K$ で, $f \not\simeq 0$ かつ退化する辺も $f(\text{link } a) = \{\text{one pt.}\}$ なる辺 a も含まぬものが得られたが, これが lemma の条件を満たすものであることは容易に分る.

<u>定理の証明</u> 定理の statement に現れるKについて, $\pi_2(K) = 0$ を示せば良い. ($\tilde{K}$ に於いて J.H.C. Whitehead の定理を使う.) もし $\pi_2(K) \neq 0$ とすると lemma 2 の条件を満たす $f: L \to K$ があるが, lemma 1 より S^2 の単体分割Lは四面体のcone C を含む. 仮定により $f|C$ は embedding であり得ぬ

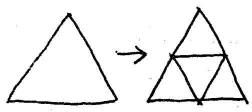
が，そうすると f は C に属するある辺 a に於いて $f(a)=pt.$ or $f(\mathrm{link}\ a)=pt.$ とならざるを得ぬが，仮定と矛盾する．

（証明終り）

<u>Ex.1　閉曲面</u>　T^2 の場合，左図の様に細分すれば cone は全て曲率 0 となる．これに diamond 細分を施してから 2 単体をくりぬいて連結和すればやはり各 cone は曲率 $\leqq 0$ となる．向付け不能の場合も同様の考察で出来る．



<u>注意</u>　曲率正の cone を含まぬ単体複体はその条件を満たしながらいくらでも細く細分出来る．diamond 細分（図）を取れば良い，



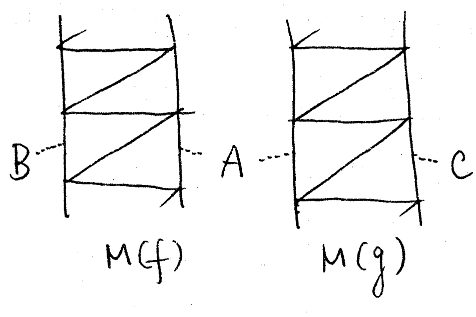
<u>Ex.2</u>　torus knots の complement の spine.

A, B, C を amn, am, an 辺形（$a \geqq 3$, $m, n \neq 0$）

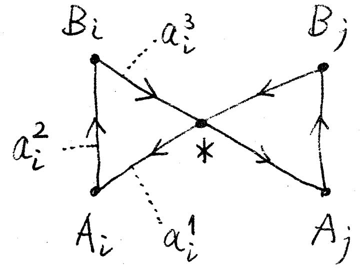
$f: A \to B$, $g: A \to C$ を n, m-sheeted の covering map;

$K = M(f) \underset{A}{\cup} M(g)$ とする．但し mapping cylinders $M(f)$, $M(g)$ は次の様に分割する．

K は torus knot の complement の spine であり，曲率正の cone を含まぬ．torus link の場合も同様の考察で得られる．



<u>Ex. 3</u>　$G = \{ x_i \mid i \in I,\ (x_i^{p_{ij}}, x_j^{q_{ij}}) = 1 \}$ 群，$p_{ij}, q_{ij} \geqq 0$，$p_{ii} = q_{ii} = 0$ とし，さらに $p_{ij} > 0$ なら $p_{ji} = 0$ とする．ここで I を頂点集合とし $(i, j) \in I^2$ に対し，$p_{ij}, q_{ij} > 0$ のときのみ辺で結ばれるとして，グラフ G' を作る．G' が 3，4，5 辺形を含まぬならば $K(G, 1)$ は高々 2 次元に取れる．



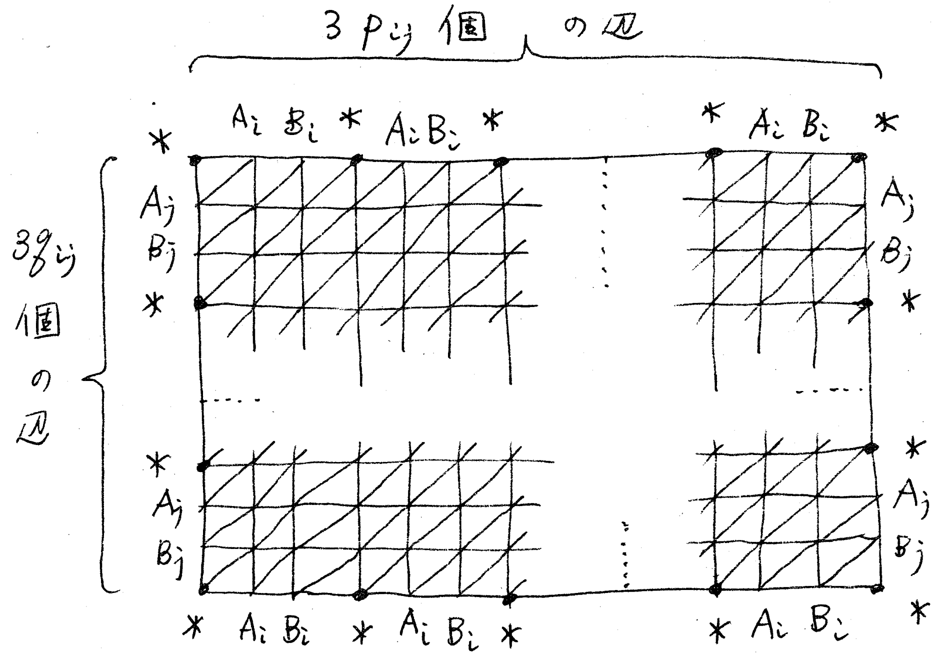
<u>証明</u>　complex K を，

$K^0 = \{*\} \cup \{A_i \mid i \in I\} \cup \{B_j \mid j \in I\}$

$K^1 = K^0 \cup \{ a_i^j \mid i \in I,\ j = 1, 2, 3 \}$

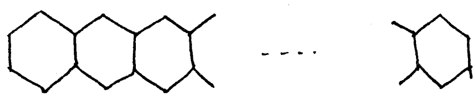
$\partial a_i^1 = A_i - *$，$\partial a_i^2 = B_i - A_i$，

$\partial a_i^3 = * - B_i$ とし，さらに 2-cells を次の如く貼りつける．



こうして出来た complex を K とする．A_i，B_j は曲率正の

coneの中心になり得ぬから，＊のlinkが3，4，5辺形を含まぬことを云えば良いが，$G''=\mathrm{link}\,*$とすると，A_iとA_j，B_iとB_j（$\in G'$）は(i,j)がG'の辺で結ばれている時のみ結ばれていて，A_iとB_jは(i,j)がG'の辺となるときのみ，一個の頂点を経由して辺で結ばれており，他にG''の辺はない．G'に関する仮定よりG''は3，4，5辺形を含まぬ．故に定理より$K=K(G,1)$となる．（証明終り）ここで，

$G' =$  （n個の亀甲）

とすれば，$H_1(K,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^{4n+2}$，$H_2(K,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^{5n+1}$，$\chi(K)=n$ となり，曲率≤ 0の2-dim complexでも，Euler数はいくらでも大きくなることが分る．