数理解析研究所講究録
第 268 巻 1976 年 75-80



# 1-conn. 4-manifold $M^4$ with $b(M)=3$ and $H_2(M)=Z$.

相模工大　　津久井 康之

connected compact n-manifold $M^4$ に embed された PL n-balls $\{B_i^n\}_{i=1}^k$ について，① $\bigcup_{i=1}^k B_i = M$，② $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$ は (n-1)-manifold，であるとき $\{B_i\}$ を M の ball covering といい，この k の最小数を b(M) と記す〔1〕〔2〕。

この見地から4次元 manifold を考える．全てを PL-category で取りあつかう。ことわらない限り *manifold* は連結とする。

$H_2(M)=0$ のときには次のような結果がある．

**Proposition 1.** $M^4$; closed 4-manifold, $b(M)=3$, $H_2(M)=0$.

$\Longleftrightarrow$ $M^4 \cong k(S^1\times S^3) \# \varepsilon(S^1\times_\tau S^3)$, $k+\varepsilon \geq 1$, $\varepsilon = 0$ or $1$,

ここで $S^1\times_\tau S^3$ は $S^1$ 上の $S^3$-bundle である．

$H_2(M^4)\neq 0$ のときのむつかしさは，後でみるように，1-3 knot のむつかしさの反映である．ここでは $H_2(M)\neq 0$ のうちの最も簡単な場合として，$b(M^4)=3$, $H_2(M)=Z$ なる 1-connected closed 4-manifold $M^4$ について考えることにする ( $b(M)=3$ のときは,「1-conn. $\Leftrightarrow H_1(M)=0$」で, $H_1(M), H_2(M)$ はつねに free abelian ). 結果として述べると次のようになる.

**Proposition 2.** $M^4$: 1-connected closed 4-manifold, $b(M)=3$, $H_2(M)=\mathbb{Z}$.

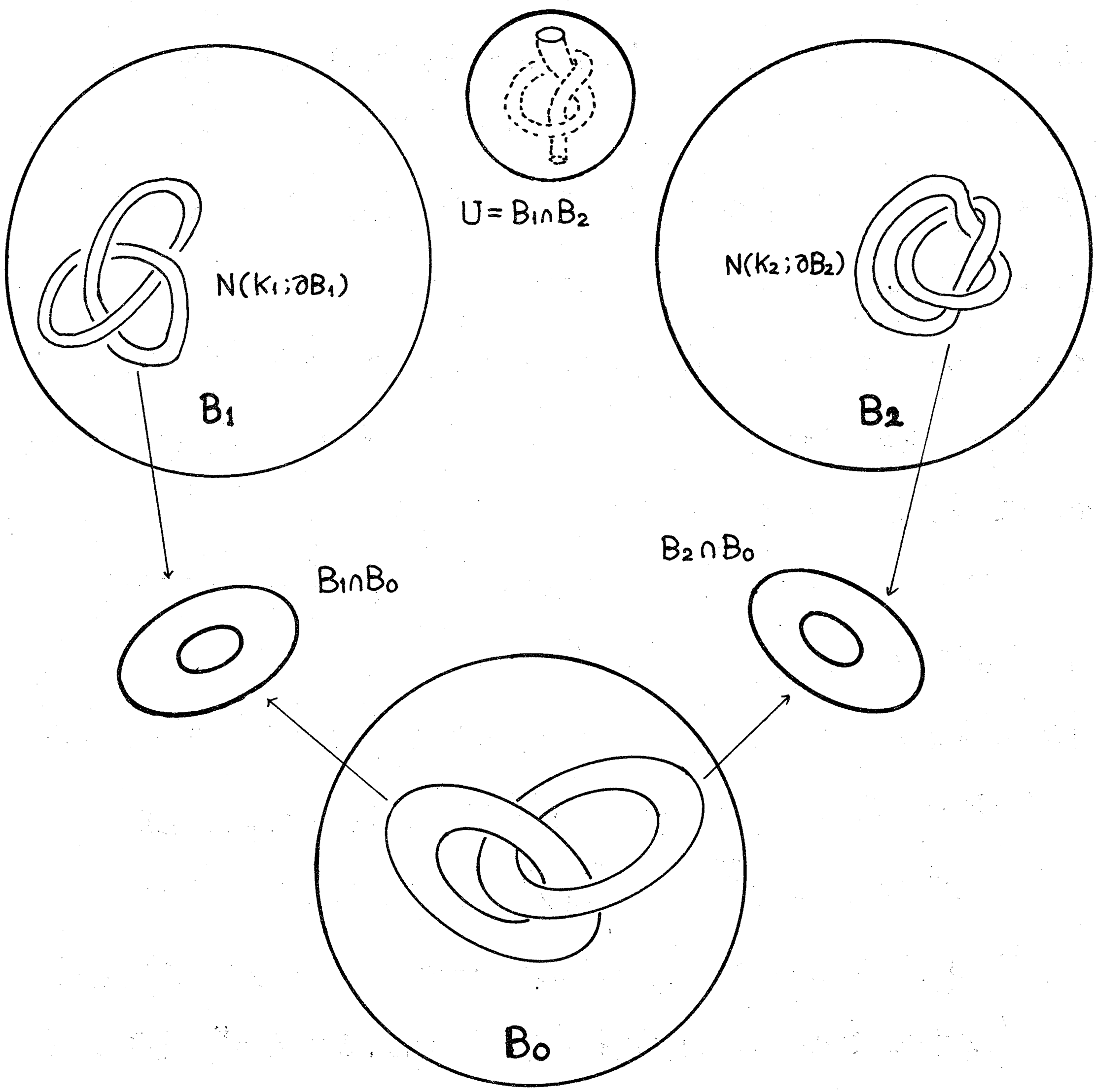
$\Longrightarrow$ $M^4-\mathring{B}^4 \searrow S^2$, この 2-sphere は高々 1 点で locally knotted.

上の $S^2$ が *locally flat* なら $M\cong CP(2)$ である.

〈Proof of Proposition 2 の outline〉

今, $b(M)=3$ だから $\exists\{B_0^4, B_1^4, B_2^4\}$: $M^4$ の *ball covering*; $M=B_0\cup B_1\cup B_3$, $B_i\cap B_j=\partial B_i\cap\partial B_j$ $(i\neq j)$. $W^4\equiv B_1\cup B_2=M-\mathring{B}_0$, $U^3\equiv B_1\cap B_2=\partial B_1\cap\partial B_2$ とおくと, $\tilde{H}_i(B_1\cap B_2)\cong H_{i+1}(B_1\cup B_2)\cong H_{i+1}(M)$, $(i\neq 4)$ だから, $H_1(U)\cong\mathbb{Z}$, $H_2(U)=0$. 従って $\partial U\cong S^1\times S^1$ だから $U^3$ は一般に knot $K$ の complement (i.e. $U\cong\overline{S^3-N(K;S^3)}$ ).

もし $U$ 自身が solid torus ( $S^1\times D^2$ ) ならば $U\searrow S^1$, そして $B_1\cup B_2\searrow\Sigma U\searrow\Sigma S^1\cong S^2$ ( $\Sigma$ は suspension を示す). $U$ の core が $\partial B_1$ でも $\partial B_2$ でも non-trivial knot ならば, $\pi_1(\partial B_i-\mathring{U})\ncong\mathbb{Z}$ $(i=1,2)$ であり, 一方 $\partial B_0\cong(\partial B_1-\mathring{U})\cup(\partial B_2-\mathring{U})\cong S^3$ であるが これでは $\partial U$ が $\partial B_0$ で incompressible となり矛盾であるから $U$ の core は $\partial B_1$ か $\partial B_2$ のすくなくも一方では trivial であり, 従って上の $S^2$ は locally flat でない点は高々 1 つ (suspension pt.)




図－1

次に $U \not\cong S^1 \times D^2$, つまりUは本当にknotのcomplement, の場合は, nontrivial knots $K_1 \subset \partial B_1$, $K_2 \subset \partial B_2$ があって,

$$\partial B_i - \mathring{U}^3 = N(K_i;\partial B_i), \quad i=1,2,$$

となっている。 ball coveringの構造から, $\partial B_0$ は2つのsolid torus $B_1 \cap B_0 \cong N(K_1; \partial B_1)$ と $B_2 \cap B_0 \cong N(K_2; \partial B_2)$ が boundary で貼り合わされて出来ているのだから，$B_i \cap B_0$ は $\partial B_0$ で standard である ($i=1,2$)。 すると $B_1 \cup B_0 \searrow \Sigma(B_1 \cap B_2) \searrow \Sigma S^1 \cong S^2$. そして $B_0 \cap B_1$ が $\partial B_0$ で standard (unknotted) 故，この $S^2$ の locally flat でない点は suspension point の $B_1$ 側 1 点だけで，その local knot type は $K_1$ (同じ理由から local knot type は $K_2$ ともできる) ▫

ここで，上の knot $K_1$ ($K_2$ でもよい) が Property P を持たないことをみておこう。

**Definition.** knot $K \subset S^3$ が property P を満たす (持つ).

$\Longleftrightarrow$ $h: S^1 \times \partial D^2 \xrightarrow{\cong} \partial N(K; S^3)$ homeomorphism.

$M^3_{(K,h)} \equiv \overline{S^3 - N(K; S^3)} \cup (S^1 \times D^2)/h$ とする.

if $M^3$ is a homotopy sphere $\longrightarrow h(*\times\partial D^2)$ は $N(K; S^3)$ で 2-ball を bound する，(すなわち $h$ は $N(K;S^3) \cong S^1 \times D^2$ の元の通りの貼り合せで，従って $M_{(K,h)} \cong S^3$)。

まず，$U^3 \cup N(K_1; \partial B_1)$ と $U^3 \cup N(K_2; \partial B_2) = U^3 \cup (B_0 \cap B_1)$ は，$\partial B_0$ を通してながめると (longitude と meridean を取替えているのだから)，異った貼り合せである．したがって $K_1$ が property P をもつとすると，$U^3 \cup N(K_2; \partial B_2) \not\cong S^3$． しかし $U^3 \cup N(K_2; \partial B_2) = \partial B_2 \cong S^3$ だから矛盾である。

このことをもうすこし詳しくみてみると;

**Proposition 3.** $^{\exists}M^4$; 1-conn. closed 4-manifold, $\overline{M^4-B_0^4} \searrow S^2$ such that $S^2$は1点 $p\in S$ のみで locally knotted でその knot type を K とする.

$\Longrightarrow$ (1) $b(M)=3$.

(2) K は Property $\underline{P}$ を満たさない.

<Proof>

$B_1 \equiv N(p; M^4)$ ; regurar neighbourhood. (4-ball).

$D_1^2 \equiv B_1 \cap S^2$ , $D_2^2 \equiv \overline{S^2-D_1}$ とすると $K \approx (\partial D_1 \subset \partial B_1)$.

$D_2 \subset \overline{M-B_1}$ は locally flat proper 2-disk 故

$B_2 \equiv N(D_2; \overline{M-B_1})$ ; 4-ball で $(\partial D_2 \subset \partial B_2)$ は trivial knot.

$\overline{M-B_0} \searrow S^2 \swarrow B_1 \cup B_2$ (in M) 故共に $S^2$の regular neighborhood.

だから $^{\exists}h: B_1\cup B_2 \rightarrow \overline{M-B_0}$ homeomorphism.

すると $h(B_1\cup B_2)\cup B_0 = M$ 故 $b(M)=3$. $H_2(M)=Z$.

そこで前の Proposition 2 の証明の最後の注意によって, K は Property $\underline{P}$ を満たさない.

**Remark 1.**「K が property P を満たさない」と言っても, もちろん Poincaré conjecture には関係なく, しかも knot の complement の問題 (i.e. Proposition 2 の $K_1$と$K_2$の knot type は異なるか?) についても反例とは言えない。ただ, ある knot K が存在して, $\overline{S^3-N(K;S^3)}$ (K の complement) の $S^3$への embedding で ($S^3$へ拡張できない) trivial でないものがある, という

ことだけである──丁度「trivial knot が Property P を持たない」というのと同じように──。

**Remark 2.** もちろん(?) Proposition 2. の方向としては，同じ条件の下に $M \cong CP(2)$ を示すことが目的である．そして，「全ての non-trivial knot が Property P を満す」という事が誰かによって示されれば上のことは正しい。しかしそんな夢をみていてもよくないので，本講演の後に Property P と無関係に $M \cong CP(2)$ を示すための program をたて，一部実行中であることを報告しておきます．

## References


[1] K. Kobayashi and Y. Tsukui, The ball coverings of manifolds, J. Math. Soc. Japan **28** (1976) 133 ~ 143.

[2] 小林一章，津久井康之，Manifold の Ball Covering について，数理解析研究所講究録 *243.* (*1975*) *77 ~ 87.*