数理解析研究所講究録
第268巻 1976年 109-127

Singular bordism theoryからみた(コ)ホモロジー論について。

神戸大学（教養）
高橋典大

ordinary homology theory は chain complex の理論を媒介にして構成されており，その chain complex は singular complex の理論をへて構成されるのが普通である。一方，多様体の境界の関係に基づく(co) bordism theories は ordinary homology theories には属さないが，その拡張である generalized homology theories の一部として位置づけられている。感覚的には，両者は共に同じ bordism theories の範疇に包括され，後者は前者の拡張であると理解されていると思うが，今までのところ，その関係を系統的にはっきりさせる作業は何故かあまりされていない。

先づ，ここでは，R. E. Stong [4] の cobordism category の定義をやや拡大し，chain complex の概念の categorical な見地からの一つの generalization と

して <bordism category> なる概念を定義する。
そうすれば，従来の chain complex はその中で特に discrete な bordism category として位置づけられる。
しかし，同じ bordism category の中でも，この（特異複体論としての）discrete bordism category を基に展開される従来の ordinary homology theory と P. E. Conner and E. E. Floyd [1] の中で展開されている同境理論による generalized homology theory の間には，theory としての一貫性がかけている。
それで，ここでは，後者を更に一般化し <singular bordism theory> なる概念（[4] の定義とは少し異なってくる）を定義し，その観点から ordinary homology theory の再構成を試みた。主に，典型的なモデルとして ordinary Z_2-homology theory を考える。

homogeneous な finite simplicial complexes（これらはいわゆる mod 2 の境界をもつ）と，それらの間の境界を境界にうつす様な pl-imbeddings からなる category $\mathcal{U}$ を考えると，これは bordism category で，それから singular bordism theory，更に ordinary Z_2-homology theory が導かれることを示す。

次に，chain complex の dual として cochain

complex が考えられた様に，吾々の bordism category，singular bordism theory の dual な概念が定義され，generalized cohomology theory が論ぜられることが望ましいが，今のところまだ満足のいく様な定式化はされていない。 しかし，その一つの手掛かりとして，C.P. Rourke and B.J. Sanderson [2] による mock bundle theory の simplicial な類似を考え，吾々の category $\mathcal{U}$ に基づいた形で，とにかく ordinary Z_2-cohomology theory を与えることが可能なことを示す。

最後に，Z_2-係数の ordinary (co) homology theory についての吾々の構成は，従来の構成にくらべ，代数的には〈一歩後退〉になっているが，その反面，より〈幾何的〉且つ，generalized homology theories とにらんだ上で，より〈普遍的〉な側面をもっていることを注意しておく。

以下，できるだけ簡単に，その概要をのべる。

§1. Bordism categories and singular bordism theories.

(1.1) $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}, +, \Phi \rangle$ が category with sum とは，category $\mathcal{C}$ と，bifunctor $+ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$，

及び一つの object Φ と次の natural isomorphisms からなるものである。

1) $A+B \simeq B+A$

2) $(A+B)+C \simeq A+(B+C)$

3) $\Phi+A \simeq A$.

ここで，$\simeq$ は category $\mathcal{C}$ での equivalence を示し，A, B, C は $\mathcal{C}$ の任意の object を表わす。

(1.2) $\mathcal{C}=\langle \mathcal{C}, \partial, +, \Phi \rangle$ が <u>bordism category</u> とは，$\langle \mathcal{C}, +, \Phi \rangle$ が category with sum で，$\partial: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ が functor で，次の natural isomorphisms が成立つものである。

1) $\partial \circ \partial A \simeq \Phi$,

2) $\partial(A+B) \simeq \partial A+\partial B$,

3) $\partial \Phi \simeq \Phi$.

(1.3). $\mathcal{C}=\langle \mathcal{C}, \partial, +, \Phi \rangle$ を bordism category とする。

A と B が <u>bordant</u>: $A \equiv B$ とは，

$$\exists U, V \mid A+\partial U \simeq B+\partial V$$

なることとする。このとき，$\equiv$ は $\mathcal{C}$ の objects についての equivalence relation となることが容易にわかる。

$\partial A \simeq \Phi$ なる A を $\mathcal{C}$ の <u>closed object</u> と呼ぶこと

にするとき，

$$\Omega(\mathcal{C}) = \{\text{closed objects of } \mathcal{C}\}/\equiv$$

が well-defined で，これを $\mathcal{C}$ の <u>*bordism semi-group*</u> という。実際 $\Omega(\mathcal{C})$ は unit をもつ可換な semi-group となる。

(1.4) 各 integer $n \in Z$ に対する，category with sum $\mathcal{C}_n = \langle \mathcal{C}_n, +_n, \phi_n \rangle$ の sequence

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_n\}_{n \in Z}$$

を考えることにより，<u>*graded bordism category*</u> を考えることができる。$\mathcal{C}_n$ の objects を $\mathcal{C}$ の <u>*n-objects*</u>，$\mathcal{C}_n$ の morphisms を $\mathcal{C}$ の <u>*n-morphisms*</u> という。そして，(1.3) と同様にして，bordism semi-group

$$\Omega(\mathcal{C}) = \{\Omega_n(\mathcal{C})\}_{n \in Z}$$

が定義される。

(1.5) category C が <u>*discrete*</u> とは，各 morphism が identity であるものである。

この定義から，任意のアーベル群 $\langle C, +, 0 \rangle$ は discrete な category with sum であり，任意の (graded) chain complex $\langle C, \partial, +, 0 \rangle$ は discrete な (graded) bordism category と考えられる。そして，各々の定義から容易に次をえる。

<u>[定理1] 任意の (graded) chain complex は discrete な (graded) bordism category で，その bordism groups は homology groups と一致する。</u>

(1.6) category with sum $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}, +, \Phi \rangle$ が <u>regular</u> であるとは，+ が finite sums で，Φ が initial object からなるものである。

そして，bordism category $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}, \partial, +, \Phi \rangle$ が <u>regular</u> とは category with sum $\langle \mathcal{C}, +, \Phi \rangle$ が regular なこととする。

従来の chain complex $\langle C, \partial, +, 0 \rangle$ は regular でない，従って次の (1.7) の singular bordism theory の範疇からも除外される。

$\mathfrak{X}$ で topological spaces と continuous maps からなる category を表わし，+ で $\mathfrak{X}$ における disjoint union で定義される finite sum，Φ で $\mathfrak{X}$ の empty set で与えられる initial object を表わすと $\mathfrak{X} = \langle \mathfrak{X}, +, \Phi \rangle$ は regular category with sum である。

(1.7) <u>$\mathfrak{X}$ 上の singular bordism theory</u>

$$\langle \mathcal{C}, F, \iota \rangle$$

は，次の3つからなる。

1) $\mathscr{C} = \langle \mathscr{C}, \partial, +, \Phi \rangle$ は regular な bordism category.

2) $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathfrak{X}$ は functor で

i) $F(A+B) = F(A) + F(B)$

ii) $F(\Phi) = \Phi$.

3) $\iota : F \circ \partial \longrightarrow F$ は natural transformation.

(1.8) $\langle \mathscr{C}, F, \iota \rangle$ を $\mathfrak{X}$ 上の singular bordism theory とする。$\mathfrak{X}$ の任意の object X に対し, $\mathscr{C}/X$ により, objects が $\mathscr{C}$ の object A と, $\mathfrak{X}$ の morphism $f : F(A) \longrightarrow X$ の pairs (A, f) からなり, morphisms が $\mathscr{C}$ の morphisms $\varphi : A \to B$ で,

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[rr, "F(\varphi)"] \arrow[dr, "f"'] & & F(B) \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

が commute する様なものからなる category を表わす。

更に,
$$(A, f) \,\tilde{+}\, (B, g) = (A+B,\ f+g)$$
$$\tilde{\Phi} = (\Phi, \emptyset)$$
$$\tilde{\partial}(A, f) = (\partial A,\ f \circ \iota_A)$$
$$\tilde{F}(A, f) = F(A)$$
と定義する。ここで, $f+g$ は finite sums の性質から, well-defined であり, $\emptyset : \Phi \longrightarrow X$ は Φ が

initial object なることより unique にきまる。
このとき，

$$\mathscr{C}/X = \langle \mathscr{C}/X, \tilde{\partial}, \tilde{F}, \tilde{\Phi} \rangle$$

は又 regular bordism category となる。

更に，$\tilde{\iota} : \tilde{F}\circ\tilde{\partial} \longrightarrow \tilde{F}$ を $\mathscr{C}/X$ の任意の object (A, f) に対し，$\tilde{\iota}_{(A,f)} = \iota_A : F(\partial A) \longrightarrow F(A)$ で定義すれば，次をえる。

[定理 2] $\langle \mathscr{C}, F, \iota \rangle$ が $\mathfrak{X}$ 上の singular bordism theory のとき，$\mathfrak{X}$ の任意の object X に対し，$\langle \mathscr{C}/X, \tilde{F}, \tilde{\iota} \rangle$ はまた $\mathfrak{X}$ 上の singular bordism theory である。

§2. The ordinary Z_2-homology theory.

(2.1) K をある Euclid 空間の中の有限な n 次元 simplicial complex で，homogeneous なものとする。かかる complex を簡単のため，n次元 Z_2-complex と呼ぶことにする。空集合 ϕ は任意次元の Z_2-complex と考え，これを empty complex ということにする。

n 次元 Z_2-complex K の丁度奇数ヶの n 次元 simplexes の辺になっている様な $(n-1)$ 次元の simplexes 及び，その辺からなる K の部分複体はまた

$(n-1)$ 次元の Z_2-complex である。これを ∂K で表わし，Kの境界という。

$\mathcal{U}$ を n-objects が n次元 Z_2-complexes で，n-morphisms がそれらの間の境界を境界にうつす pl-imbeddings からなる graded category とする。
$\partial : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ は $\partial \circ \partial K \simeq \Phi$ をみたす functor で，
$+$ を $\mathcal{U}$ における disjoint union，Φ を $\mathcal{U}$ の empty complex とするとき，

$$\langle \mathcal{U}, \partial, +, \Phi \rangle$$

は regular な graded bordism category となる。
更に，$F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{X}$ を forgetful functor とし，
$\iota : F \circ \partial \longrightarrow F$ を各 Z_2-complex K に対し，$\mathcal{X}$ の inclusion $\iota_K : F(\partial K) \longrightarrow F(K)$ で定義すれば

$$\langle \mathcal{U}, F, \iota \rangle$$

は $\mathcal{X}$ 上の singular bordism theory となる。
この場合，closed な K に対しては，$K + K \simeq \partial(K \times I)$ なことより，$K + K \equiv \Phi$ となり $\Omega_n(\mathcal{U})$ は group となる。また，$\mathcal{U}$ の closed n-objects の間の relations として，K, L に対し，ある U, V があって $K + \partial U \simeq L + \partial V$ となることと，ある W があって，$K + L \simeq \partial W$ なることは同値であることを注意しておく。

(2.2) $\mathfrak{X}^2$ で topological spaces の pairs と，それらの間の continuous maps からなる category を表わす。今の場合，特に，各 Z_2-complex K に対しては，
$\iota_K : F(\partial K) \to F(K)$ が $\mathfrak{X}$ での inclusion であるから，$F(\partial K)$ は $F(K)$ の subspace と考えられることに注意すれば，次の定義が可能となる。

任意の pair (X, A) に対し，K を Z_2-complex とし，f を continuous map $f : F(K) \longrightarrow X$ で，$F(\partial K)$ を A にうつすものとするとき，pair (K, f) を <u>(X, A) の singular Z_2-complex</u> と呼ぶことにする。

2つの singular Z_2-complexes (K, f), (L, g) に対し，$\mathcal{U}/X$ のある object (W, h) があって，

1) $F(K+L) \subset F(\partial W)$
2) $h \mid F(K+L) = f + g$
3) $h(F(\partial W) \setminus F(K+L)) \subset A$

をみたすとき，(K, f) と (L, g) は <u>bordant</u> であるといい，$(K, f) \sim (L, g)$ で表わす。

このとき，$\sim$ は pair (X, A) の singular Z_2-complexes の間の equivalence relation となる。

$$\mathcal{U}_n(X, A) = \{(X, A) \text{の} n \text{次元 singular } Z_2\text{-complexes}\}/\sim$$

と定義し，これを pair (X, A) の n次元 bordism group と呼ぶ。P.E. Conner and E.E. Floyd [1] の証明を類似的に進めることにより，次の命題をうる。

<u>[命題1]</u> $\{\mathbb{N}_n(\ ,\ ), \partial_n\}_{n\in Z}$ は $\mathcal{X}^2$ 上の generalized homology theory である。

更に，容易に check されるように，

$$\mathbb{N}_n(pt., \phi) \approx \Omega_n(\mathbb{K}) \approx \begin{cases} Z_2 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

なることより，次の定理にまとめられる。

<u>[定理4] $\{\mathbb{N}_n(\ ,\ ), \partial_n\}_{n\in Z}$ は $\mathcal{X}^2$ 上の ordinary Z_2-homology theory を与える。</u>

これは，以前に報告したことがあるのでここではあまり深入りしないことにする。ただ，Eilenberg-Steenrod の諸公理を丹念に check して行けば良い。（[3] を参照）

(2.3) <u>Remark 1)</u> Z_2-complexes の中にも，⟨orientation⟩ の概念をもちこむことが可能である。そのとき，一つの ⟨orientable Z_2-complex⟩ に対して，一般に2つ以上の orientations が存在する様になるが，unoriented な場合である $\mathbb{K}$ の場合と平行に話を進めるのに障害はない筈である。

<u>Remark 2)</u> $\mathcal{X}$ 上の2つの singular bordism

theories が与えられたとき，それらの categorical な product を考えて，bordism semi-groups が両者の direct sum になる様な $\mathfrak{X}$ 上の (product) singular bordism theory が存在する。

<u>Remark 3)</u> $\mathcal{D}_0$ を n-objects が，compact な n 次元有向微分多様体とし，n-morphisms が orientation preserving な，且つ境界を境界にうつす differential imbeddings である graded category とする。$+$ で，disjoint union，ϕ で empty manifold を表わす。$F : \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathfrak{X}$ を forgetful functor とすると，natural transformation $\iota : F\circ\partial \longrightarrow F$ が存在し，$\langle \mathcal{D}_0, F, \iota \rangle$ が $\mathfrak{X}$ 上の singular bordism theory になり，良く知られた $\mathfrak{X}^2$ 上の generalized homology theory を与える。unoriented の場合も同様である。

R.E. Stong [4] の定式化では，unoriented の場合はともかく，category $\mathcal{D}_0$ の場合は都合が悪い。その為，吾々の場合は，n-morphisms と natural transformation ι の規定の仕方がそれと異なることを注意しておく。

ただ，一般論として，bordism category $\mathcal{C}$ を考える

場合，small category の条件を考慮すべきであるかも知れないが，ここでは意識的に無視して話を進めた。

§3. Ordinary Z_2-cohomology theory.

(3.1) Kをある Euclid 空間の pl-balls の finite collectionとし，$|K| = \bigcup\{\sigma \mid \sigma \in K\}$ とかく。

K が <u>ball complex</u> とは，

1) $|K|$ は $\sigma \in K$ の interiors $\mathring{\sigma}$ の disjoint union,

2) $\sigma \in K \Rightarrow$ boundary $\dot{\sigma}$ は K の balls の union。

これから，次がでる。

3) $\sigma, \tau \in K \Rightarrow \sigma \cap \tau$ は K の balls の union.

(3.2). ball complex K が <u>n次元 Z_2-ball complex</u> とは，Kが有限ケの n-balls 及び，その辺よりなることである。n次元 Z_2-ball complex K に対し，<u>境界</u> ∂K をKの丁度奇数ケの n-balls の辺になっているところの $(n-1)$ 次元 balls 及びその辺からなっている K の sub-complexとする。

(3.3). <u>simplicial q-mock bundle</u> ξ^q/K は triple $(\xi(K), K, p_\xi)$ である。ここに，

1) $\xi(K)$ は simplicial complex,

2) K は ball complex,

3) $p_\xi : |\xi(K)| \longrightarrow |K|$ は pl-map で,
$\forall$ k-ball $\sigma \in K$ に対し, 次の如き $(q+k)$ 次元 Z_2-complex $\xi(\sigma)$ が存在するものである。

i) $\xi(\sigma)$ は $\xi(K)$ の subcomplex,

ii) $|\xi(\sigma)| = p_\xi^{-1}(|\sigma|)$,

iii) $\partial\xi(\sigma) = \xi(\partial\sigma)$, 但し, $\xi(\partial\sigma) = \bigcup_{\tau \in \partial\sigma} \xi(\tau)$.

empty set Φ は任意次元の Z_2-complex であるから, K の各 ball に Φ を対応させたものは simplicial mock bundle である。これを <u>empty bundle</u> といい, Φ/K で表わす。

(3.4). <u>[定理5] K を n 次元 Z_2-ball complex, ξ^q/K を simplicial q-mock bundle とするとき,</u>

1) <u>$\xi(K)$ は $(n+q)$ 次元 Z_2-complex で,</u>

2) <u>$\partial\xi(K) = \xi(\partial K)$</u>

<u>が成立つ。</u>

1) は, ほとんど自明, 2) は Z_2-complex と, simplicial mock bundle の定義から, 逐次 check をして行けば導かれる。

(3.5) simplicial mock bundles ξ/K, η/K が <u>isomorphic</u> : $\xi \cong \eta$ とは, pl-homeomorphism $h : \xi(K) \longrightarrow \eta(K)$ で,

$$h(\xi(\sigma)) = \eta(\sigma) \quad \text{for } \forall\, \sigma \in K$$

なるものが存在することである。

<u>[命題 2]</u>　$\cong$ は simplicial mock bundles の間の equivalence relation である。

これは，推移律の証明にのみ注意を要する。

(3.6)　$Z^q(K)$ を K 上の simplicial q-mock bundles の isomorphism classes の set で，empty bundle を base point としてもつものとする。

$$Z^q(K, L) = \mathrm{Ker}\,(Z^q(K) \to Z^q(L))$$

即ち，L 上で empty な bundles の isomorphism classes の set とする

(3.7).　simplicial mock bundles ξ_0/K，ξ_1/K が <u>cobordant</u>：$\xi_0 \sim \xi_1$ とは，$L \times I$ 上で empty な simplicial mock bundle $\eta/K \times I$ で，

$$\eta|_{K \times \{i\}} \cong \xi_i \quad , \quad i = 0, 1 .$$

なものが存在することである。

<u>[命題 3]</u>　$\sim$ は $Z^q(K, L)$ 上の equivalence relation である。

証明は長くなるので省略するが，[2] における証明と比較して，本質的な障害はない。対象としては，この場合の方がより elementary なので "simplicial" の特性を full に

活用すればよい。

(3.8) $T^q(K,L)$ で L 上で empty な simplicial q-mock bundles の $\sim$ による cobordism classes の set を表わす。

(3.9) Bi で objects が ball complexes の pairs (K,L), morphisms が inclusions と isomorphisms で generate される category を, $\overline{Bi}$ で (K,ϕ) からなる Bi の subcategory を表わす。S_* を base point をもった sets の category とする。このとき,

$$Z^q(\ ) : \overline{Bi} \longrightarrow S_*$$
$$Z^q(\ ,\ ) : Bi \longrightarrow S_*$$

は contravariant functors である。

以上から, "simplicial" の特性をもとに, 次の命題を逐次 check できる。

[命題4] 各 $q \in Z$ に対し, Z^q は次の Axioms をみたす。

Axiom E. (extension) $e : (K_0, L_0) \to (K, L)$ が expansion なら, $Z^q(e) : Z^q(K,L) \to Z^q(K_0, L_0)$ は surjective.

Axiom G (glue) $(K,L) = (K_1, L_1) \cup (K_2, L_2)$ とし, ξ_1/K_1, ξ_2/K_2 が夫々 $Z^q(K_1, L_1)$, $Z^q(K_2, L_2)$ に

属し，$\xi_1|K_1\cap K_2 \cong \xi_2|K_1\cap K_2 \in Z^q(K_1\cap K_2, (L_1\cup L_2)\cap(K_1\cap K_2))$ のとき，$\exists\ \xi/K_1\cup K_2 \in Z^q(K,L)\ |\ \xi|K_i \cong \xi_i/K,\ i=1,2.$

<u>Axiom S (suspension)</u>　natural isomorphisms

$$s^q: Z^q(K,L) \to Z^{q-1}(K\times I, K\times \dot{I} \cup L\times I)$$

が存在する。

s^q は ξ^q/K の $\xi(K)$ を $K\times I$ の half-way level におく map である。

Axiom S を用いて，

$$\partial^q: T^q(L) \longrightarrow T^{q-1}(K,L)$$

を次の composition で定義する。

$$\begin{tikzcd} T^q(L) \arrow[r, "s^q"] \arrow[drr, "\partial^q"'] & T^{q-1}(L\times I, L\times \dot{I}) & T^{q-1}(W, K\cup L\times\{0\}) \arrow[l, "T(i)"'] \arrow[d, "T(j)"] \\ & & T^{q-1}(K,L) \end{tikzcd}$$

ここに，$W = K \underset{L\times\{1\}}{\cup} L\times I$，$i$ は excision で，$T(i)$ は isomorphism，j は identification $L\to L\times\{0\}$ の拡張で，map $K\to W$ として inclusion に homotopic。

これらの Axioms から，T^q についての excision, half-exact sequence が成立つことがわかる。以上の準備は [2] における次の定理を用いるためのものである。

(3.10)　<u>[定理：Rourke-Sanderson の定理]</u>

一般に，contravariant functor $Z^q : \overline{\mathcal{B}}_i \longrightarrow S_*$，$q \in Z$，の sequence が Axioms E, G, S をみたすとき，これは compact polyhedra pairs の category 上の generalized cohomology theory を定義する。

(3.11) [命題5] $q \in Z$ に対して，

$$T^q(pt.) \approx \begin{cases} Z_2 & q = 0 \\ 0 & q \neq 0. \end{cases}$$

これは，$\xi^q/pt.$ が q 次元 Z_2-complex $\xi^q(pt.)$ と identify され，この場合 bordism と cobordism が一致することからわかる。

以上の諸命題，及び Rourke-Sanderson の定理 (3.10) から，吾々は，次の定理をえる。

[定理5] $\{T^q(\ ,\ ), \partial^q\}_{q \in Z}$ は compact polyhedra pairs の category 上の ordinary Z_2-cohomology theory である。

Remark $T^{-q}(X, A) \approx H^q(X, A; Z_2)$, $q \in Z$，と dimension の符号が逆になっていることを注意しておく。

(3.12) 以上で，Z_2-homology の基になったところの bordism category $\mathcal{U}$ と関係づけて，とにかく，ordinary Z_2-cohomology theory を構成したが，

homology に対し, cohomology の方は categorical な見地からみると同じ level の定式化とは云えない。しかし cohomology が, ある bordism category から, basic なある bordism category への contra-variant functors と密接にかかわっていることだけははっきりしていると思う。 (1976, 3/18).

References.

[1]. Conner, P.E., Floyd, E.E.: Differentiable periodic maps. Springer (1964).

[2] Rourke, C.P., Sanderson B.J.: a geometric approch to homology theory, Warwick university (1972)

[3]. M. Takahashi: The ordinary Z_2-homology theory and singular bordism theories (未発表).

[4] Stong, R.E.: Notes on cobordism theory. Princeton University Press (1968)

[5] MacLane, S.: Categories for the Working Mathematician, Springer (1971).