数理解析研究所講究録
第270巻 1976年 39-45

変換半群によるオートマトンの特性化

東北大学電気通信研究所　渡辺 敏正
野口 正一
東北大学応用情報学研究センター　大泉 充郎

1. はじめに

有限オートマトンの代数理論においては，Σを入力記号の有限集合とするとき，入力半群をΣから生成される自由半群Σ^+（空語を含まない）とする立場とΣから生成される自由単位半群Σ^*（Σ^+に空語を付加したもの）とする立場がある。工学的観点からは後者が一般的であるが，前者は半群の表現として数学的に興味深い。

我々は(7)で$I = \Sigma^+$とする立場からオートマタの融合(7)(8)を定義導入し，これとオートマタの直和，付随する入力半群（変換半群に同形）から生成されたオートマトン及びその商オートマトンによって，付随する入力半群が左単位元をもつ有限オートマトンの状態遷移構造を半群論的に与えた．

本稿では，(7)の結果を基礎として上記の立場の違いが付随する入力半群に着目したオートマトンの分類に与える影響

を明らかにする．また，オートマタの融合と直積の関係についても言及する。

2．準備

［定義１］ オートマトンは三項系列 $A=(Q, I, M)$ である．ここに，Q は状態の空でない有限集合，$I=\Sigma^{+}$（または Σ^{*}）は入力半群，$M: Q\times I \to Q$ は状態遷移関数と呼ばれる写像で，$\forall q\in Q$, $\forall x, y\in I$ に対して，$M(q, xy)=M(M(q, x), y)$。

［定義２］ A において I 上の関係 ρ_q, ρ をそれぞれ

$$x\rho_q y \Longleftrightarrow M(q, x)=M(q, y) \quad , \quad \rho=\bigcap_{q\in Q}\rho_q \qquad (x, y\in I)$$

で定義し，I の ρ を法とする商半群 I/ρ を A に付随する入力半群（$\bar{I}(A)$ または $\bar{I}$）という．

なお，以下で特に定義されない用語，記号等は(5)～(8)を参照のこと。

［定理１］[7] $A=(Q, I, M)$ $(I=\Sigma^{+})$ は $\bar{I}(A)$ が左単位元をもつとする。このとき，$A=\bigoplus_{i=1,m}(\boxplus_{j=1,k_i} A_{ij})$ と表わされ，かつ $\bar{A}\cong\bigoplus_{i=1,m}(\boxplus_{j=1,k_i}\mathcal{A}\theta_{ij})$ である．ここで $\mathcal{A}\theta_{ij}=(\mathcal{A}V_{ij})\theta_{ij}$，$V_{ij}=\mathrm{Inf}(S, T_{ij})$，$\theta_{ij}=ex(\tau_{ij}, T_{ij})$，$k_i\geqq 1$，$i=1,\cdots,m(\geqq 1)$。

定理１及び $I=\Sigma^{*}$ の空語の性質より

［定理２］ 任意の有限オートマトン $A=(Q, I, M)$ $(I=\Sigma^{*})$ は $A=\bigoplus_{i=1,m}(\boxplus_{i=1,k_i} A_{ij})$ と表わされ，かつ $\bar{A}\cong\bigoplus_{i=1,m}(\boxplus_{j=1,k_i}\mathcal{A}\tau_{ij})$ である．ここに $\mathcal{A}\tau_{ij}=(\mathcal{A}_S)\tau_{ij}$，$S=\bar{I}(A)$，$k_i\geqq 1$，$i=1,\cdots,m(\geqq 1)$。

3．付随する入力半群によるオートマトンの分類

定理1，2を基礎にしてΣによってオートマトンを分類する。

3－1．$\mathrm{I}=\Sigma^{+}$の場合

［定義3］　付随する入力半群が，左単位元をもつ半群，単位元をもつ半群，右単純半群，右群，群であるオートマトンをそれぞれ，左単位形（A^{L}），単位形（A^{I}），右単純形（A^{RS}），右群形（A^{RG}），群形（A^{G}）オートマトンという。

オートマタ族をCで表わす。

［補題1］　Sが右単純ならば$\mathcal{A}_{V_i}$，$\mathcal{A}_{\theta_i}$，$i=1,\cdots,k(\geqq 2)$の自明でない融合は存在しない。

右群は右単純かつ左単位元をもつことから

［補題2］　$C(A^{L})\supsetneqq C(A^{RG})$かつ$C(A^{RS})\supsetneqq C(A^{RG})$．

（備考）　$C(A^{L})\not\supseteq C(A^{RS})$かつ$C(A^{RS})\not\supseteq C(A^{L})$．

次に，Trauth[4]により導入された状態独立性（$\forall q,q'\in Q$，$\rho_q=\rho_{q'}$）を検討する．

［補題3］　$A=(Q,\mathrm{I},M)$を状態独立オートマトンとする。このとき，$\Sigma(A)$は右群である。

補題3をもとに$\mathcal{A}_V$，$\mathcal{A}_\theta$（$V=Inf(S)$，$\theta=ex(\tau)$，Sは右群）の状態独立性を検討して次の補題を得る．

［補題4］　弱連結オートマトンAが状態独立である$\Longleftrightarrow$

$\bar{A} \cong \mathcal{A}_V$。ここに，$V=\mathrm{Inf}(S,T,\varphi)$ で S は右群とする。

定理1，補題4より

[定理3] $A=\oplus_{i=1}^{m} A_i$（A_iは弱連結）が状態独立オートマトンである $\Longleftrightarrow \bar{A} \cong \oplus_{i=1}^{m} \mathcal{A}_{V_i}$。ここで $V_i=\mathrm{Inf}(S,T_i,\varphi_i)$, $i=1,\cdots,m$，かつ $S=\bar{I}(A)$ は右群である。

明らかに状態独立でない右群形オートマトンが存在するから，状態独立オートマトンを A^{SI} と表わせば，

[補題5] $C(A^{RG}) \supsetneqq C(A^{SI})$.

A^P 及び A^{qP} でそれぞれ置換オートマトン及び擬完全オートマトンを表わせば，

[補題6][5][6] $C(A^G) \supsetneqq C(A^P) \supsetneqq C(A^{qP})$.

完全オートマトン及びカウンタをそれぞれ A^{PA} 及び A^C と表わすとき，$C(A^{qP}) \supsetneqq C(A^{PA}) \supsetneqq C(A^C)$ は既知である。また，明らかに $C(A^{RG}) \supsetneqq C(A^G)$ である。以上をまとめて，

[定理4] $C(A^L) \supsetneqq C(A^I), C(A^L) \supsetneqq C(A^{RG}) \supsetneqq C(A^G) \supsetneqq C(A^P) \supsetneqq C(A^{qP}) \supsetneqq C(A^{PA}) \supsetneqq C(A^C)$。$C(A^{RG}) = C(A^L) \cap C(A^{RG}) \supsetneqq C(A^{SI})$。

3－2．$I=\Sigma^*$の場合

$I=\Sigma^+$ の場合の A と区別するため λ を添えて A_λ と表わす。定理2より，有限オートマトンを A^F と表わせば，

[補題7] $C(A^F_\lambda) = C(A^I_\lambda)$.

右群が単位元をもてば実は群であることから，

［補題8］ $C(A_\lambda^{RG})=C(A_\lambda^{G})$.

補題4，8より

［補題9］ 弱連結オートマタ族に関しては $C(A_\lambda^{SI})=C(A^{qP})$.

［補題10］(5) $C(A_\lambda^{G})=C(A^{P})=C(A_\lambda^{P})$.

補題10，定理3より

［補題11］ $C(A^{P})\supsetneqq C(A_\lambda^{SI})\supsetneqq C(A^{qP})$.

以上をまとめて

［定理5］ $C(A_\lambda^{F})=C(A_\lambda^{I})\supsetneqq C(A_\lambda^{RG})=G(A_\lambda^{G})=C(A_\lambda^{P})=C(A^{P})\supsetneqq C(A_\lambda^{SI})\supsetneqq C(A^{qP})\supsetneqq C(A^{PA})\supsetneqq C(A^{c})$.

4．オートマトンの直積分解性

(7)で定義導入されたオートマタの融合とオートマトンの直積分解性の工からみた関係を述べる。

［定義4］ $A=(Q,I,M)$ が $A_i=(Q_i,I,M_i)$, $i=1,\cdots,k\ (\geq 2)$ の直積である（$A=\bigotimes_{i=1}^{k}A_i$）とは，$A$ が

(1) $Q=Q_1\times\cdots\times Q_k$ （$Q_i\cap Q_j=\phi\ (i\neq j)$），

(2) $\forall q=(q_1,\cdots,q_k)\in Q$, $\forall x\in I$ に対して，$M(q,x)=(M_1(q_1,x),\cdots,M_k(q_k,x))$，

をみたすときをいう。

［定義5］ $A^{D}=(Q^{P},I,M^{P})$ が $A=(Q,I,M)$ の直積分解であるとは，A^{P} が

(1) $A^D = \bigotimes_{i=1,\dots,k} A_i$ ($k \geqq 2$) かつ $|Q_i| \leqq Q$ ($i=1,\dots,k$),

(2) $\bar{I}(A) \cong \bar{I}(A^D)$

なるときをいう。

[補題12] $\bar{I}(\boxplus_{i=1,\dots,k} \mathcal{A}_{Q_i}) \cong \bar{I}(\bigoplus_{i=1,\dots,k} \mathcal{A}_{Q_i}) \cong \bar{I}(\bigotimes_{i=1,\dots,k} \mathcal{A}_{Q_i}) \cong S/L(\bigcap_{i=1,\dots,k} T_i)$。ここで $Q_i = ex(T_i)$, $i=1,\dots,k$, とする。

補題12，定理1より

[定理6] 左単位形オートマトン $A = \bigoplus_{i=1,\dots,m} (\boxplus_{j=1,\dots,k_i} A_{ij})$ に対して，A の直積分解 $\mathcal{A}^D = \bigotimes_{i=1,\dots,m} (\bigotimes_{j=1,\dots,k_i} \mathcal{A}_{Q_{ij}})$ が存在する。ここに，$\bar{A} \cong \bigoplus_{i=1,\dots,m} (\boxplus_{j=1,\dots,k_i} \mathcal{A}_{Q_{ij}})$, $L(\bigcap_{i=1,\dots,m} (\bigcap_{j=1,\dots,k_i} T_{ij})) = \iota_S$, $Q_{ij} = ex(T_{ij})$, $i=1,\dots,m$; $j=1,\dots,k_i$, かつ $m + \sum_{i=1,\dots,m} k_i \geqq 2$ とする。

なお，$I = \Sigma^*$ の場合も同様な定理が成り立つ。さらに，

[補題13] $\mathcal{A}_Q$ の直積分解 $\mathcal{A}_Q^D = \bigotimes_{i=1,\dots,r} \mathcal{A}_{Q_i}$ ($r \geqq 2$) が存在するための必要十分条件は，$|V_Q| \geqq |V_{Q_i}|$ なる Q_i, $i=1,\dots,r$, が存在して，$L(\bigcap_{i=1,\dots,r} T_i) = L(T)$ が成り立つことである。ここで，$Q = ex(T)$，$Q_i = ex(T_i)$, $i=1,\dots,r$，とする。

$I = \Sigma^*$ の場合にも同様な補題が成り立つ。

定理6と補題13により左単位形オートマトン（$I=\Sigma^*$ の場合にはすべての有限オートマトン）の直積分解性が明らかとなる。

5．おわりに

オートマトンの入力半群を Σ^+ とするか Σ^* とするかによって

特性化に大きな違いが生ずることを考慮に入れ，付随する入力半群に着目してオートマトンを分類した。その結果，従来明確でなかった状態独立オートマタ族が $I=\Sigma^+$ の場合には右群形オートマタ族の真部分族であること，$I=\Sigma^*$ の場合には置換オートマタ族の真部分族であること及び弱連結オートマタ族においては擬完全オートマタ族と一致することなどを明らかにした。さらに，付随する入力半群からみたオートマタの融合と直積の関係についても明らかにした。最後に，本学電気通信研究所野口研究室の皆様の熱心なる討論に深謝いたします。

文　献

(1) Clifford, A.H. and Preston, G.B.; Amer. Math. Soc. (1967).

(2) 増永，野口，大泉；信学論(C), 53-C, 3, p.149 (昭45-03).

(3) 田村；共立出版(1972).

(4) Trauth, Jr. C.A.; J.ACM, 13, 1, p.170 (1966).

(5) 渡辺，増永，野口，大泉："置換オートマトンの構造論"，信学論(D) 投稿中.

(6) 渡辺，増永，野口，大泉；信学技報 Vol.75, No.18 (1975-04)

(7) 渡辺，増永，野口，大泉："左単位形オートマトンに関する考察"，信学論(D) 投稿中.

(8) 渡辺，野口，大泉；信学会オートマトンと言語研究会(1976-02) 予定.