数理解析研究所講究録
第 270 巻 1976 年 46-52

オートマトンの自己準同形写像を求めるアルゴリズム

東北大学電気通信研究所　渡辺 敏正
野口 正一
東北大学応用情報学研究センター　大泉 充郎

1. はじめに

自己(準)同形写像は有限オートマトンの重要な代数的特徴の一つであるが，その構成アルゴリズムに関してはあまり知られていない。自己同形写像は分解論ともつながりをもち[3]，その構成アルゴリズムを与えることはオートマトンの特性化を分解論に反映させるという意味においても意義のあることと思われる。

我々は (6) において入力半群 $I=\Sigma^+$（入力記号の有限集合 Σ から生成される free semigroup）の場合に付随する入力半群 $\bar{I}$（定義2）が左単位元をもつオートマタ族の状態遷移構造をオートマタの融合を定義導入することにより半群論的に与えた。本稿では，$I=\Sigma^*$（Σ^+ に空語を加えた free monoid）であるから $\bar{I}$ はすべて単位元をもち (6) の結果が適用できる。単位元をもつ半群から生成されたオートマタ及びその商オート

マタ間の（準）同形写像をもとにして融合に対応して自己（準）同形写像を構成してゆき，最終的に与えられた弱連結オートマトンの自己（準）同形写像が構成できることを示し，その構成アルゴリズムを与える。

なお，本稿は(7)の要約であり，特に定義されない用語，記号等は(7)を参照のこと。

2．準備

［定義1］　オートマトンは$A=(Q, I, M)$である．ここに，Qは状態の空でない有限集合，$I=\Sigma^*$（入力記号の有限集合Σから生成された自由単位半群(free monoid)）は入力半群，$M: Q\times I \rightarrow Q$は状態遷移関数と呼ばれる写像で、$\forall q\in Q, \forall x, y\in I$に対して，$M(q, xy)=M(M(q, x), y)$。

［定義2］　$A=(Q, I, M)$においてI上の関係ρ_q，ρを

$$x\rho_q y \iff M(q, x)=M(q, y)\ , \quad \rho=\bigcap_{q\in Q}\rho_q \quad (x, y\in I)$$

で定義する。Iのρを法とする商半群I/ρをAに付随する入力半群（$\bar{I}(A)$または$\bar{I}$）という。

$\bar{I}(A)$は空語を含むρ－同値類を単位元としてもつことに注意されたい。

［定義3］　オートマタ$A=(Q_A, I, M_A)$及び$B=(Q_B, I, M_B)$において，上へ（中へ）の写像$f: Q_A\rightarrow Q_B$が存在して，$\forall q\in Q_A, \forall x\in I$に対して，$f(M_A(q, x))=M_B(f(q),$

x)が成り立つとき，fをAからBの上へ（中へ）の準同形写像である（$f: A \supsetneqq B$）という。さらに，fが全単射ならばAからBへの同形写像（$f: A \cong B$）という。

［定義4］ オートマトンAからA自身の中への準同形写像及びAからAへの同形写像をそれぞれAの自己準同形写像及び自己同形写像という。

(6)の結果及び空語の性質から次の定理を得る。

［定理1］ $A = (Q, I, M)$を弱連結オートマトン，$I(A) = S$とする。このとき，Aに依存してある自然数rが定まり$A = {}_i\text{累}_r A_i$かつ$\overline{A} \cong \mathcal{A} = {}_i\text{累}_r \mathcal{A}_i$が成り立つ。ここで$\overline{A_i} \cong \mathcal{A}_i \equiv \mathcal{A}_{\tau_i} = (S_{\tau_i}, S, M_{\tau_i})$（$\tau_i$はS上の右合同，$S_{\tau_i} = S/\tau_i$），$i=1, \cdots, r$，とする。ただし，$|Q| \geqq 1$，$|S| \geqq 1$。

3．商オートマタと準同形写像

半群S上の右合同τに対して，τの正規化半群[1]（normalizer）は，$N(\tau) = \{a \in S \mid s \tau t \ (s, t \in S)$ ならば $as \tau at\}$と定義される。Sが左単位元をもつときには$E(\mathcal{A}_\tau)$は(1)で規定されている。本稿では単位元をもつ半群を対象とすることを考慮に入れれば

$E(\mathcal{A}_\tau) = \{\delta_a \mid a \in N(\tau)$かつ$\forall s_\tau \in S_\tau$に対して$\delta_a(s_\tau) = as_\tau\}$

となる。

以下，AからA'へのすべての写像，準同形写像，同形写像

の集合をそれぞれ MAP(A,A'), HOM(A,A'), ISO(A,A') と表わす。先に定義された正規化半群の概念を次のように拡張する：

$N(\tau_i,\tau_j)=\{a\in S \mid s\tau_i t\ (s,t\in S)$ ならば $as\tau_j at\}$。

（備考）$N(\tau_i,\tau_j)$ は必ずしも半群にはならない。

［定理２］ $\mathcal{A}_{\tau_i}$ から $\mathcal{A}_{\tau_j}$ への写像 $\hat{\eta}_a : S_{\tau_i}\to S_{\tau_j}$ を次のように定める（τ_i, τ_j は S 上の右合同とする）：

(1) 任意に $a\in N(\tau_i,\tau_j)$ を選び，$\hat{\eta}_a(e\tau_i)=a\tau_j$ とし，

(2) $\forall s_k\tau_i\in S_{\tau_i}$ に対しては $\hat{\eta}_a(s_k\tau_i)=as_k\tau_j$ とする。

このとき，$\hat{\eta}_a\in$ HOM$(\mathcal{A}_{\tau_i},\mathcal{A}_{\tau_j})$。さらに，HOM$(\mathcal{A}_{\tau_i},\mathcal{A}_{\tau_j})$ のすべての元はこのようにして構成される。

4．融合と自己準同形写像

$A=\boxplus_r A_i\cong\mathcal{A}=\boxplus_r\mathcal{A}_{\tau_i}$ を弱連結オートマトンとする。ここで，$A_i\cong\mathcal{A}_{\tau_i}$, $i=1,\dots,r(\geqq 1)$, とする。このとき，$\mathcal{A}^S=\boxplus_r\mathcal{A}_{\tau_i}$ を $\mathcal{A}$（または A）の分離といい，$\mathcal{A}^S=$ SEP$(\mathcal{A})$（または SEP(A)）と表わす。A から $\mathcal{A}^S=$ SEP(A) を構成することに対応して $\eta\in E(A)$ から $\hat{\varphi}\in$ MAP$(\mathcal{A}^S,\mathcal{A}^S)$ を構成する。すなわち，$\hat{\varphi}$ はすべての Q_i, $\hat{Q}_i$ に関して，

$\eta(Q_i)\subseteqq Q_k\ (1\leqq k\leqq r)$ ならば $\forall q_{ij}\in Q_i$ に対して，

$$\hat{\varphi}((\hat{q}_{ij})_i)=(\widehat{\eta(q_{ij})})_k$$

と定義される。このとき，$\hat{\varphi}$ を η（または $\hat{\eta}$）の分離といい，$\hat{\varphi}=$ SEP(η)（または SEP$(\hat{\eta})$）と表わす。

［補題1］　$\eta_1 \neq \eta_2$ ならば $\hat{\varphi}_1 \neq \hat{\varphi}_2$．ただし，$\hat{\varphi}_i = SEP(\eta_i)$，$\eta_i \in E(A)$，$i=1,2$，とする．

［補題2］　$\forall \eta \in E(A)$ に対して，$\hat{\varphi} = SEP(\eta) \in E(\mathcal{A}^S)$．

なお，$i=1,\cdots,r$ に対して $\eta(Q_i) \subseteq Q_{k(i)}$，$1 \leq k(i) \leq r$，である．さらに，$\hat{\varphi} = SEP(\eta)$ は次の性質をもつ．

（性質1）$\hat{A} = \boxplus_{i=1,r} \hat{A}_i$ において，$\hat{A}^{(j)} = \boxplus_{i=1,j} \hat{A}_i$ 及び $\hat{Q}^{(j)} = \widehat{\bigcup_{i=1,j} Q_i}$ とおくとき，$\forall q \in Q^{(j)} \cap Q_{j+1}$ に対して，

$\hat{\varphi}((\hat{q})_j) = \hat{q}_1$ かつ $\hat{\varphi}((\hat{q})_{j+1}) = \hat{q}_2$ ならば $q_1 = q_2$

が成り立つ。ここで，$(\hat{q})_j \in \hat{Q}^{(j)}$，$(\hat{q})_{j+1} \in \hat{Q}_{j+1}$．

$\hat{\varphi}^{(j)} = \boxplus_{i=1,j} \hat{\varphi}_i$ とおくとき，$j=1,\cdots,r-1$ に対して，$\hat{\varphi}^{(j)} \boxplus \hat{\varphi}_{j+1}$ が $A^{(j)} \boxplus A_{j+1}$（または $\hat{A}^{(j)} \boxplus \hat{A}_{j+1}$）と両立する（すなわち性質1をもつ）ときに $\hat{\varphi} = \boxplus_{i=1,r} \hat{\varphi}_i$ は $A = \boxplus_{i=1,r} A_i$（または $\boxplus_{i=1,r} \hat{A}_i$）と両立するという。

$X = \{ \hat{\chi} \in E(\mathcal{A}^S) \mid \hat{\chi}$ は $A = \boxplus_{i=1,r} A_i$ と両立する $\} \subseteq E(\mathcal{A}^S)$

とおくとき，

［補題3］　$SEP(E(A)) = \{ \hat{\varphi} \mid \hat{\varphi} = SEP(\eta),\ \eta \in E(A) \} \subseteq X$．

次に，$\mathcal{A}^S$ から融合によって $\hat{A} = \boxplus_{i=1,r} \hat{A}_i$ さらには $A \cong \hat{A}$ を構成することに対応して，$\hat{\chi} \in X$ から $\psi \in MAP(A, A)$ を構成する。すなわち，ψ は

（1）$\hat{\chi}$ から χ を構成する（χ は $\hat{\chi}$ においてすべての $\hat{Q}_i$（$i=1,\cdots,r$）の元を対応する Q_i の元で置きかえれば得られる．た

だし χ は写像ではない)，

(2) $\psi = \chi | Q$ (Q は A の状態集合)，

と定義することにより得られる。

ψ を $\hat{\chi}$ の融合といい，$\psi = AML(\hat{\chi})$ と表わす。

[補題4] $\forall \hat{\chi} \in X$ に対して，$\psi = AML(\hat{\chi}) \in E(A)$.

$AML(X) = \{AML(\hat{\chi}) \mid \hat{\chi} \in X\}$ とおくと，補題3，4より。

[補題5] $SEP(E(A)) \subseteq X$ かつ $AML(X) \subseteq E(A)$.

さらに，

[補題6] $\forall \eta \in E(A)$ に対して，$\eta = AML(SEP(\eta))$。

したがって，補題1，5，6より次の定理を得る.

[定理3] $E(A) = AML(X)$.

5. アルゴリズム

3. 及び4. の結果から，任意に与えられた弱連結オートマトン A に関して，$E(A)$ 及び $G(A)$ を求めるアルゴリズムを与えることができるが紙面の都合上省略する。詳細は(7)を参照のこと.

6. おわりに.

高オートマタ間の準同形写像及びオートマタの融合と自己(準)同形写像の関係を半群論的に明らかにし，弱連結オートマトンの自己(準)同形写像の構成アルゴリズムを与えた。なお，任意の有限オートマトン($I = \Sigma^*$ の場合)に関して

も(6)の結果を用いて本稿の手法の形式的拡張によって，その構成アルゴリズムを与えることができる。

付随する入力半群の効率のよい構成アルゴリズムを求めること，G(A)（E(A)）とオートマトンの関係の特性化，さらにはE(A)の分解論への応用等を検討することは今後の課題となろう。最後に，日頃から熱心に討論していただきました本学電気通信研究所野口研究室の皆様に感謝いたします。

文　献

(1) Clifford, A.H. and Preston, G.B.: "The algebraic theory of semigroups", Vol. 2, Amer. Math. Soc. (1967).

(2) Harary, F.: "Graph thery", Addison-Wesley (1969).

(3) Jump, J.R.: "A note on the iterative decomposition of finite automata", Inf. and Cont. Vol.15, No.5, p.424 (1969).

(4) 増永，野口，大泉："オートマトンの構造の半群論的考察"，信学論(C)，53-C，3，p.149（昭45-03）.

(5) 田村："半群論"，共立出版(1972).

(6) 渡辺，増永，野口，大泉："左単位形オートマトンに関する考察"，信学論(D)投稿中.

(7) 渡辺，野口，大泉："オートマトンの自己準同形写像を求めるアルゴリズム"，オートマトンと言語研究会(1976-02)予定.