数理解析研究所講究録
第270巻 1976年 81-93

並列演算モデルについて

長崎大医　中村　剛

KarpとMiller(1)により与えられた並列演算モデルにD.E.Mullerらにより創始された非同期回路理論（Mullerの仕事を数学的に再構成し発展させたものとして文献8,9をあげておくが他にも多くの関連した研究がなされている）で開発された概念を導入し、その応用としてKarpとMillerの並列演算モデルにおいて同時に実行されうる最大演算数（最大並列演算数）を求めるアルゴリズムについて述べる。R.Reiter(12)はこのモデルに時間の概念を加えてスケジューリングの問題を解いており、又F.Commonerら(2)はこのモデルの非常に特殊な場合ではあるが現実的なモデルについて並列演算モデルに特有な問題を解いている。並列演算モデルはこれ以外にもコンピューター・システムの記述を目的とした、いわゆるPetri netと称されているものもあるが、(J.D.NoeとG.J.Nutt(5)等）ここではそれについてはふれない。

§1 Computation Graph と Change Diagram

<u>定義1</u> 有向グラフ $G=(J,E)$ の各エッジ $d_p \in E$ に非負整数の4つ組 (A_p, T_p, U_p, W_p), $T_p \geq W_p$ を与えたものを <u>Computation Graph</u> (CG) と呼ぶ。ここで J はノードの有限集合 $\{\alpha_1, \cdots\cdots \alpha_n\}$ であり、E はエッジの集合 $\{d_1, \cdots\cdots d_t\}$ である。又 A_p は d_p 上の初めの <u>token</u> の数、U_p は d_p の始点のノードが <u>fire</u> した時に d_p に加えられる token の数、W_p は d_p の終点のノードが fire した時に d_p から減る token の数、T_p は d_p の終点のノードが fire する為に必要な d_p 上の token の数を示す。即、ノード α が fire できるのは α に入っている各エッジ d_p の上に token の数が T_p 個以上存在する時であり、ノード α が fire すると α に入っている各エッジ d_p から W_p 個の token がとられ、一方 α から出ている各エッジ $d_{p'}$ へ $U_{p'}$ 個の token が加えられる。特に全てのエッジについて $T_p=U_p=W_p=1$ としたものを <u>Marked graph</u> と呼ぶ (F. Commoner 2)。

<u>定義2</u> J を有限集合とし、N を正の整数の集合 $\{1, 2, \cdots\}$ とする。J の元 i と N の元 m の対 $[i, m]$ からなる集合 Σ で次をみたすものを考える。Σ はある順序 $\geq$ のもとで下に有界な半順序集合であり、もし $[i, m]$, $[i, k]$ $(m>k)$ がともに Σ の元なら $[i, k+1], \cdots, [i, m-1]$ も又 Σ の元で $[i, k]<[i, k+1]<\cdots<[i, m]$ なるものとする。この

時$(\Sigma, \geq)$をJの元をノードとするSemi Change Diagram (SCD)といい、各$[i, m]$はΣのchangeと呼ばれる。Jの元をノードとするSCDが全てのノード$i \in J$について$[i, 1]$を含む時、Change Diagram (CD)と呼ばれる。
Jの元をノードとする2つのSCD$(\Sigma, \geq)$と$(\Sigma', \succ)$を考える。ΣからΣ'へのone-to-one写像fが次の2つを同時に満足するときhomomorphismという。

H_1: $f([i, m]) = [i, m']$ for any $[i, m] \in \Sigma$

H_2: $[i, m] \geq [j, m']$ならば$f([i, m]) \succ f([j, m'])$

更に次をみたす時cyclic homomorphismという。

H_3: 各ノードiについて定数$c(i)$が存在して

$$f([i, m]) = [i, m + c(i)] \text{ for all } [i, m] \in \Sigma$$

各$c(i)$はノードiのcycleと呼ばれる。ontoなcyclic homomorphismをcyclic isomorphismと呼び、この時$(\Sigma, \geq)$と$(\Sigma', \succ)$をcyclicly isomorphicという。
Jの元をノードとするSCD$(\Sigma, \geq)$を考える。各$[i, m] \in \Sigma$について、$\Sigma_{[i,m]}$により$\{[j, m'] \in \Sigma ; [j, m'] \geq [i, m]\}$を示す。$(\Sigma_{[i,m]}, \geq)$も又SCDである。$\Sigma_{[i,m]}$と$\Sigma_{[i,m']}$とがcyclicly isomorphicなる時$[i, m] \sim [i, m']$とかく。$\sim$は同値関係である。$\Sigma$の$\sim$による商集合$\Sigma / \sim$が有限集合の時$\Sigma$をfiniteという。(これは「各ノード$i$に

ついてある $m<m'$ が存在して〔i, m〕〜〔i, m'〕となる」という条件と同値である）〔i, m〕→〔j, m'〕又は〔i, m〕$\ll$〔j, m'〕により〔i, m〕が〔j, m'〕の *predecessor* なることを示す。又任意の m に対してある m' が存在して〔i, m〕>〔j, m'〕となり、逆に任意の m に対してある m' が存在して〔j, m'〕>〔i, m〕となる時 i と j を <u>*intertwined*</u> という。

<u>定義3</u>　CG　$G=(J, E)$ を考える。Σ により集合 $\{$〔i, m〕; ノード i が m 回 *fire* できる$\}$ を示す。G が強連結で <u>*terminate*</u> しないなら $\Sigma = J \times N$ となる。いかなる <u>*firing sequence*</u> においてもノード i の m 回目の *fire* の方がノード j の m' 回目の *fire* の方より先におこる時 <u>〔i, m〕<〔j, m'〕</u> とかく。〔i, m〕<〔j, m'〕又は〔i, m〕=〔j, m'〕（i.e., $i=j$ かつ $m=m'$）なる時 <u>〔i, m〕$\leq$〔j, m'〕</u> とかくことにすれば、Σ は $\leq$ に関して半順序集合になる。（Σ, $\geq$）は CD になるから、これを <u>CG　G の CD</u> と呼ぶ。

〈与えられた CG　$G=(J, E)$ の CD を構成する手順〉:

任意にエッジ $d_p: \alpha_i \rightarrow \alpha_j$ を *fix* し、次の様な $J \times N$ の上の二項関係 ⇀ を考える。$\nu(i, m)_j$ で $\max\{0, [(A_p - T_p + mU_p)/W_p] + 1\}$ を示す。ここで $[x]$ は x を超えない最大の整数

を示す。

(Step 1) $1 \leq v(i,m)_j < v(i,m+1)_j$ なる時
$[i, m+1] \longrightarrow [j, v(i,m)_j+1]$ とする.

(Step 2) 任意の $m \in N$ と $i \in J$ について
$[i, m] \longrightarrow [i, m+1]$ とする.

(Step 3) $[i_1, m_1] \longrightarrow [i_2, m_2] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [i_k, m_k]$ なる path が存在する時又は $[i_1, m_1] = [i_k, m_k]$ なる時
$[i_1, m_1] \leq [i_k, m_k]$ とする。

(Step 4) $[i,m] \neq [j,m']$, $[i,m] \geq [j,m']$ かつ $[j,m'] \geq [i,m]$ なる時 $[i,m]$, $[j,m']$ を<u>巡回要素</u>といい、巡回要素 $[i,m]$ に対して $[i,m] \leq [j,k]$ となる $[j,k]$ を<u>非順序要素</u>という。(巡回要素は非順序要素である). $J \times N$ から非順序要素を除いたものを Σ であらわす。すると $(\Sigma, \geq)$ は G の CD である。

<u>〈与えられたCDがあるCGで実現されるかどうかを判定し合成する手順〉</u>:

<u>定義4</u> J の元をノードとする CD $(\Sigma, \geq)$ を考える。ある m, k が存在して $[i,m] \longrightarrow [j,k]$ なる時、<u>ノード i から j に連結</u>という。i から j に連結なる i, j と自然数 m に対し

て $v(i, m)_j = max\{r; [i, m'] \to [j, r], m' \leq m\}$ と定義する。但し右辺の集合が空の時は、$v(i, m)_j = 0$ とする。

<u>定理1</u>　Jの元をノードとするCD$(\Sigma, \geq)$がCGで実現される必十条件はiからjに連結なるi, jに対して、ある有理数bと非負の有理数aとが存在して $v(i,m)_j = max\{0, [ma+b]+1\}$ が全ての$[i, m] \in \Sigma$となるmについて成立することである。

定理1の条件を確める為にまず関数$f(m) = [ma+b]$, a, bともに有理数,の性質を調べる。

<u>定義5</u>　$f(m) = [ma+b]$とする。あるm, m'について $f(m+k) - f(m) = f(m'+k) - f(m')$ が全ての$k \in N$について成立する時 $m \simeq m'$ とかく。$min\{m'-m; m \simeq m', m' > m\}$ をfのcycleと呼ぶ。cycleはuniqueであるからこれをcycle(f)で示す。

<u>補題1</u>　$f(m) = [ma+b]$ で $a = q/p$, $(p, q) = 1$ (pとqが互いに素の意)とすると、cycle$(f) = p$である。

これにより$\{m; [i, m] \in \Sigma\} = N$なる時に$v(i, m)_j = max\{0, [ma+b]+1\}$となる$a$, bが存在するかどうか決定できる。即、まず$v(i, m)_j$は周期関数であらねばならず、その周期がpならあるqについて$a = q/p$、$(p, q) = 1$であらわされる。すると$[(m+p)a+b] - [ma+b] = q$であるから、qはその周期の間に$v(i, m)_j$が増加する数に一致する。こ

うして決まる p, q について $v(i, m)_j$ と $f(m)=[mq/p]$ は周期関数として一致せねばならない。もし一致したとしたら周期が一致するように適当に b を選んで

$$v(i, m)_j = max\{0, [mq/p + b]+1\}$$ とできる。

次に $\{m; [i, m] \in \Sigma\}$ が有限集合なる時に $v(i, m)_j = max\{0, [ma+b]+1\}$ for any m s.t. $[i, m] \in \Sigma$ となる有理数 a, b が存在するかどうかを考える。

<u>定理2</u> 任意の実数 x と任意の $m \in N$ に対して $[rx]=[ry]$ for $r=1, \cdots, m$ をみたす有理数 $y=q/p$, $p \leq m$, が存在する。

これにより、$r_1 = min\{m; v(i, m)_j > 0\}$, $r_2 = max\{r; [i, r] \in \Sigma\}$ とすると、もし正の整数 p, q 及び有理数 b について、$v(i, m)_j = [mq/p + b]+1$ for $r_1 \leq m \leq r_2$ となるならば $p \leq r_2 - r_1$ としてよく、又簡単な計算により、$(c-1)\cdot\frac{1}{m-r_1} < q < (c+1)\cdot\frac{p}{m-r_1}$ となるから、これら有限個の p, q の組合わせについて調べてみればよいことがわかる。ここで $c = v(i, m)_j - v(i, r_1)_j$.

§2. 最大並列演算数

この節では強連結な CG の最大並列演算数を計算するアル

ゴリズムを与えるが、一般のCGについては強連結成分に分解することにより簡単に適用できる。

定理3　CGの最大並列演算数は、そのCDにおいて互いに比較不能なchangeの最大数に等しい。（半順序集合における部分集合でその任意の2要素が比較不能なる時その部分集合をindependent（Dilworth 6）又はantichain（Greene 7）と呼ばれ詳細な研究がなされている）。

定義6　CG　G=(J, E)の各directed circuit $g: \alpha_1 \xrightarrow{d_1} \alpha_2 \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_{m-1}} \alpha_m \xrightarrow{d_m} \alpha_1$について　$\chi(g) = U_1 \cdots U_m / W_1 \cdots W_m$とし$g$の特性数と呼ぶ。強連結なCGは$\chi(g) < 1$なるdirected circuitを含むならterminateする。又例え全てのgについて$\chi(g) \geq 1$でもA_pの与え方によってはterminateする。CGがterminateするかnon-terminateであるかの判定はKarp と Miller (1) の主要テーマであり、アルゴリズムが与えられている。

定理4　強連結でnon-terminatingなCGのCDがfiniteである必十条件は全てのdirected circuit gについて$\chi(g) = 1$となることである。

定義7　強連結なCG　G=(J, E)の各エッジdについて$\chi(d) = \min\{\chi(g);\ g$は$d$を含むdirected circuit$\}$とする。ノード$\alpha$に入っている全てのエッジ$d$について$\chi(d) > 1$

となる時、αを才一種のノードといい、そうでない時才二種という。

<u>定理5</u> 強連結なCGにおいて、もし全てのエッジeについて$\chi(e)=1$ならば、全てのgについて$\chi(g)=1$である。

<u>定理6</u> 強連結でnon-terminatingなCGにおいては、$\chi(e)>1$なる全てのエッジの上に任意に与えられた数以上のtokenをおくfiring sequenceが存在する。

<u>定理7</u> FiniteなCDの最大のantichainの長さを決定するアルゴリズムは存在する。

以上、定理4から7までをまとめると、次のようになる；強連結なCGがもしterminateするなら、明らかにそのCDはfiniteであるから定理7により決定可能。もしnon-terminatingとすると、定理5より$\chi(e)>1$なる全てのエッジの上に必要なだけ多くのtokenをおくことができる。即、それから先は充分長い間才一種のノードはfireしっぱなしであり、又$\chi(e)>1$なるエッジで才二種のノードに入っているものは充分長い間そのノードのfireに関してはないのと同じことになる。そこで$\chi(e)=1$なるエッジと才二種のノードだけからなる部分グラフを考えると定理5により全てのdirected circuit gについて$\chi(g)=1$となり、従って定理4よりそのCDはfiniteである。すると再び定理3と7に

よりその部分グラフの最大並列演算数は決定されるから、次の定理により強連結なCGの最大並列演算数を決定するアルゴリズムは存在することになる。

定理8　強連結でnon-terminatingなCGの最大並列演算数は第一種のノードの数と$x(e)=1$なるエッジだけからなる部分グラフの最大並列演算数との和に等しい。

おわりに　Computation Graphのノードがfireする順序がChange Diagramで表現されること、又Change DiagramがComputation Graphで実現される為の必十条件について述べ、又その応用としてComputation Graphの最大並列演算数を求めるアルゴリズムを与えた。非同期回路理論では、Change Diagramが非同期回路で実現できる必十条件はfiniteである。Computation GraghはChange Diagramがfiniteでも実現できないものがあるが、finiteでなくても実現できるものがある。つまり両者の実現できるクラスはくいちがっている。紙面の都合で述べなかったがChange Diagramに従った並列演算はDeterminacy（Karp&Miller 1）を持っている。又、Computation Graphの差分方程式の並列演算への応用については、R.Reiter(12)に詳しい。強連結グラフの

directed circuitをさがし出す有効なアルゴリズムは、D. B. Johnson(11)で与えられている。

末筆ながら、御指導を賜わった筑波大学宇都宮公訓先生および文献7を教えて頂いた東海大学成島弘先生に感謝致します。

REFERENCES

[1] R.M.Karp and R.E.Miller, "Properties of a Model for Parallel Computations: Determinacy, Termination, Queueing", SIAM J. Appl. Math. Vol.14, No.6, November, 1966.

[2] F.Commoner, A.W.Holt, S.Even and A.Pnueli, "Marked Directed Graphs" JCSS, 5,511-523, 1971.

[3] H.S.Stone, "Parallel Computation: An Introduction", IEEE Transactions on Computers, Vol.C-22, No.8, August, 1973.

[4] R.E.Miller, "A Comparison of Some Theoretical Models of Parallel Computation", IEEE Transactions on Computers, Vol.C-22, No.8, August, 1973.

[5] J.D.Noe and G.J.Nutt, "Macro *E*-Nets for Representation of Parallel Systems", IEEE Transactions on Computers, Vol.C-22, No.8, August, 1973.

[6] R.P.Dilworth, "A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets", Annals of Mathematics, Vol.51, No.1, January, 1950.

[7] C.Greene, "Sperner Families and Partitions of a Partially Ordered Set", Proc. Nijenrode Conference, 1974.

[8] D.E.Muller and H.Noguchi, "Mathematical Theory of Asynchronous Circuits II, The Digital Circuits", Bull.Sci.Engrg.Research Laboratory, Waseda Univ., 27, 1964.

[9] M.Hattori, D.E.Muller and H.Noguchi, "Mathematical Theory of Asynchronous Circuits III, The Charts", Bull.Sci.Engrg.Research Laboratory, Waseda Univ., 28, 1965.

[10] R.M.Keller, "Towards a Theory of Universal Speed-Independent Modules", IEEE Transactions on Computers, Vol.C-23, No.1, January, 1974.

[11] D.B.Johnson, "Finding All the Elementary Circuits of a Directed Graph", SIAM J. Comput. Vol.4, No.1, March, 1975.

[12] R.Reiter, "Scheduling Parallel Computations", JACM, Vol.15, No.4, October, 1968.