数理解析研究所講究録
第 270 巻 1976 年 94-101

プログラムの自動合成と定義可能性について

京産大 理　謝 章文

1. Theory における Definition の考察

ここでは object language を function symbols と equality symbol を含む first-order language とし、対象とする formal system のクラスは first-order theory (first-order calculus, 単に theory とよぶ) とする。すなわち、theory はその conservative subtheory として applied predicate calculus with equality を含む。

theory の rules は主として formal deduction の手順、すなわち proofs や derivations の構成を決める。theory は definitions を含む。definition の目的は primitive symbols と既に定義済みの symbols のもとで、新しい symbol を導入することである。

definition は (I) defining formulas とよばれる formula の形か、(II) 単に definition とよばれる defining rule の形をとる。theory T の defining formula は T の additional axiom とみなされ、T に対する defining rule は T の additional rule of inference とみなされる。

defining formulaは $\mathfrak{A}_1 \leftrightarrow \mathfrak{A}_2$ または $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$ の形をとり，defining ruleは '$\mathfrak{A}_1$' for '$\mathfrak{A}_2$' または $\mathfrak{A}_1 =_{\mathrm{df}} \mathfrak{A}_2$ の形をとる。$\mathfrak{A}_1$はdefiniendumとよばれ，定義されるsymbolを含む。$\mathfrak{A}_2$はdefinienとよばれ，primitive symbols，既に定義済みのsymbolsおよびここで定義されるsymbolだけを含みうる。

definitionはつぎの3つの性質すなわちdirect C-interchangeabilityを保証するために適当な制約をみたさなければならない。(1) 新しいsymbolのintroducingとeliminatingに対する両方向へのtranslatability．(2) original theoryがC-consistentならば，そのdefinitionを含むtheoryのC-consistency．(3) primitive symbolsがinterpreteされたならば，defined symbolのunique interpretation。

2．Function Symbol の Definability

theory Tのn-place function symbolをfとする($n \geq 0$)。f以外のTのnonlogical symbolsの集合をQ，fおよびQに属さない残りのnonlogical symbolsの集合をRとする。また，Tのaxiomsのclosuresのあるfinite conjunctionを$E[f, Q, R]$と表わす。bracketsの内はそのformulaに出現するnonlogical symbolsを示す。

$E[f, Q, R]$に対して

$$E[f, Q, R],\ E[f', Q, R'] \vdash fx_1 \cdots x_n = f'x_1 \cdots x_n .$$

ならば，fはTにおいて(Rをauxiliary symbolsとして)Qか

ら implicitly definable であるという。

E[f, Q, R] とある formula A[Q] に対して,

$$E[f, Q, R] \vdash y = fx_1 \cdots x_n \leftrightarrow A(x_1, \cdots, x_n, y)$$

ならば、f は T において Q から explicitly definable であるという。また、E[f, Q, R] は Q から f を explicitly に A[Q] として定義するという。

f が T において Q から explicitly definable であるならば、implicitly definable であることは明らかである（Padoa's method の正当性）。さらに Beth の定理より、f が T において Q から implicitly definable であるならば、f はまた T において Q から explicitly definable である。

3. Extensions by Definitions

theory T、相異なる変数 $x_1, \cdots, x_n, y, y'$、そして $x_1, \cdots, x_n, y$ 以外のいかなる変数も free でない T の formula を D とする。

$$\vdash_T \exists y D(x_1, \cdots, x_n, y) \qquad (1)$$

$$\vdash_T D(x_1, \cdots, x_n, y) \wedge D(x_1, \cdots, x_n, y') \supset y = y' \qquad (2)$$

であるとき、T に新しい n-place function symbol f とつぎの新しい nonlogical axiom：

$$y = fx_1 \cdots x_n \leftrightarrow D(x_1, \cdots, x_n, y)$$

または　$D(x_1, \cdots, x_n, fx_1 \cdots x_n)$　(3)

をつけ加えて theory T' を作る。(1) 式を f に対する existence condition, (2) 式を f に対する uniqueness condition, (3) 式を f の defining axiom とよぶ。

ここで導入された f とその axiom は eliminable である。明らかに、T の nonlogical symbols の集合 Q が存在して、f は T' において Q から implicitly definable である。 T' が T からこの型の有限回の extensions によって得られるならば、T' を T の1つの extension by definitions という。T' は T の conservative extension であり、T が consistent であるとき、およびそのときのみ T' は consistent である。

4. Program Synthesis と Definability

m 個の相異なる function symbols の並び $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ を program という $(m \geq 1)$。各 function symbol f_i を n_i-place, $n = \max\{n_i \mid i=1,\cdots,m\}$ とするとき、program は n 入力 m 出力であるという。

formulas の集合 Γ, 相異なる変数 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m$, そしてこれら以外のいかなる変数も free でない formula を D, Γ および D の nonlogical symbols のある集合を Q とするとき、つぎの条件がみたされるならば、$(\Gamma, \exists y_1 \cdots \exists y_m D, Q)$ を program $(f_1, \cdots, f_m)$ の specification であるという。

(1) Γ を nonlogical axioms とする theory T は consistent である。

(2) D および Q は $f_1, \cdots, f_m$ を含まない。

(3) $\vdash_T \exists x_1 \cdots \exists x_n \exists y_1 \cdots \exists y_m D$

(4) $y_1 = f_1 x_1 \cdots x_{n_1} \wedge \cdots \wedge y_m = f_m x_1 \cdots x_{n_m} \supset D(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ または

$$D(x_1, \cdots, x_n, f_1 x_1 \cdots x_{n_1}, \cdots, f_m x_1 \cdots x_{n_m}) \qquad (4)$$

を新しい axiom として T につけ加えて consistent な theory T' が構成できる。

(4) 式を program $(f_1, \cdots, f_m)$ の specifying axiom とよぶ。

theory T' のある formula $A[Q]$ に対して

$$\vdash_{T'} y_1 = f_1 x_1 \cdots x_{n_1} \wedge \cdots \wedge y_m = f_m x_1 \cdots x_{n_m} \leftrightarrow A(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \qquad (5)$$

ならば、defining formula (5) 式 またはこれと等価な defining rule による definition：$(f_1 x_1 \cdots x_{n_1}, \cdots, f_m x_1 \cdots x_{n_m}) =_{Df} \mathfrak{A}$ を $(f_1, \cdots, f_m)$ の T' における description とよぶ。

program の defining formula を $F[f_1, \cdots, f_m, Q]$ とするとき、F を新しい axiom として T につけ加えて consistent な theory が構成でき、かつ

$$F[f_1, \cdots, f_m, Q] \vdash_T D(x_1, \cdots, x_n, f_1 x_1 \cdots x_{n_1}, \cdots, f_m x_1 \cdots x_{n_m})$$

ならば、program は $(\Gamma, \exists y_1 \cdots \exists y_m D, Q)$ に対して正当であるという。

program synthesis とは specification からそれに対して正当である program の defining formula または defining rule による definition を構成することである。

specification がつぎの total existence condition および uniqueness conditionをみたすとき，

$$\vdash_T \exists y_1 \cdots \exists y_m D(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$$

$$\vdash_T D(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m) \wedge D(x_1,\cdots,x_n,y_1',\cdots,y_m') \supset y_1 = y_1' \wedge \cdots \wedge y_m = y_m'$$

$(f_1, \cdots, f_m)$ は T' において T の nonlogical symbols のある集合 S から implicitly definable である。$S \subseteq Q$ なる S が存在するとき，T' は S から $(f_1, \cdots, f_m)$ を explicitly に T' における description として定義する。そうでないときは T' における description は存在しない。

total existence condition が成立しない場合は，T' は S のもとで $(f_1, \cdots, f_m)$ の partial implicit definition を与える。したがって，T' をみたす $(f_1, \cdots, f_m)$ の解すなわち正当な program は存在すれば T' において限定されない部分では任意となる。このとき T' における description は，存在すれば，T' から derivable であることおよび A が $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m$ 以外の変数を free に含まないことから，T' で限定されない部分を含まない partial explicit definition となり正当である。

uniqueness condition が成立しない場合は，T' は $(f_1, \cdots, f_m)$ として許される範囲を implicit に define している。したがって，正当な program は implicit definition で許される範囲から任意に選び unique にすることができる。T' における description は，存在すれば，specifying axiom が defining axiom と異なること（existence condition および uniqueness condition がともに成立するときのみ，2つの

defining axiomは等価である）から異なるdescriptionが複数個存在し，そのいづれもが正当である。

〔定理〕 与えられたspecificationに対して，T′におけるdescriptionが存在するとき，それによってexplicitlyにdefineされるprogramは正当である。 （証明略）

〔1, 2〕において著者が提案したresolution-refutation methodに基づくMechanical Program Synthesisの方法は，ここで定義したspecificationからT′におけるdescriptionが存在するときはそれを与える能力を有する。さらに $S \subseteq Q$ なるSが存在しないときは，$Q \subset S$ なる適当なSを求め，$(\Gamma, \exists y_1 \cdots \exists y_m D, S)$ のもとで正当であるT′におけるdescriptionを与える。またtotal existence condition が成立しないときは，T′が限定する部分だけのdescriptionを求め，uniqueness conditionが成立しないときはその定義されている範囲を多価関数の形で与えることができる。

また〔2〕において合成プログラムの正当性に関する定理のプログラムの不動点理論に基づく証明を与えている。

参考文献

〔1〕 謝 (1975)：Resolution-Refutation法によるM.P.S., 信学会AL 74-40

〔2〕 謝 (1975)：プログラム・シンセシスのための情報抽出系, 信学会AL 75-13

〔3〕 謝 (1975)：Mechanical Flowchart Synthesisについて, 信学会AL 75-2

〔4〕 Shoenfield, J.R.(1967)：Mathematical Logic., Addison-Wesley

〔5〕 Kleene, S.C.(1967)：Introduction to Metamathematics, N.H.

〔6〕 Kleene, S.C.(1967)：Mathematical Logic, JOHN WILEY & SONS

〔7〕 Tarski, A. (1969)：Logic, Semantics, Meta-Mathematics, Oxford

〔8〕 Carnap, R.(1942)：Introduction to semantics, Cambridge, Mass.,

〔9〕 Carnap, R. (1943)：Formalization of logic, Cambridge, Mass.,

〔10〕 Manna, Z. (1974)：Mathematical Theory of Computation, McGraw-Hill

〔11〕 伊藤貴康.(1975)：プログラム理論, コロナ社