数理解析研究所講究録
第270巻 1976年 112-119

2次元入力テープの形状とオートマトンの能力

阪大. 基礎工　梅尾博司
森田憲一
菅田一博

I まえがき

多次元的構造を持つ情報は, 従来形式言語理論, オートマトン理論等で研究されてきた一次元系列(string)以上の情報を含んでいるものと思われる。この様な空間的構造を持ったデーター集合を処理する多次元オートマトンの研究は, 構造の持つ複雑さ, あるいは構造自体を論理的ないしオートマトン的な考え方で表現する上で, 非常に役立つものと思われる。以下では, 多次元構造を持つ情報として二次元平面上のパターン集合を考え, それらを入力とするオートマトンを考える。

二次元テープオートマトンは, Blum & Hewitt[1] 以来多くの研究者により研究されてきた。文献[2]では, 二次元有限オートマトンの二次元的な動作の持つ能力を抽出するために, Rebound Automaton と呼ばれるある種の有限状態

アクセプターが，筆者らにより導入された。正方形状の入力テープを使用するRebound Automatonは，その状態数が有限であるにもかかわらず，二次元的に動作しながらテープの境界を検出しさらに正方形という入力テープの形状を利用して，ほぼ$\log n$のテープ計算量を持つチューリング・マシーンに近いことが明らかになった。入力テープの形状を正方形に制限していることが，このオートマトンの能力増大に寄与している。

一般に入力テープの形状がオートマトンの能力に大きく影響を及ぼすと思われるが，オートマトンの入力テープの形状に関して注意が払われたことはあまりない。わずかに，Smithにより二次元セルラーオートマトンの立場から，平面上のセル空間の形とそのパターン認識能力が議論されているにすぎない。[3] Blum & Hewitt[1]，Selkow[4]，Rosenfeld[5]等におけるオートマトンの入力テープは，非常に簡単な正方形，長方形状の矩形の入力テープを仮定していた。

入力テープの形状とこの様な矩形からさらに一般化し任意の形にまで拡張した場合，これまで矩形の入力テープではそれほど問題とならなかった新たな問題が生じてくる。例えば，果してオートマトンは入力テープ全体を走査することができるか？…等である。

本稿では，二次元入力テープの形状を一般化した場合，それらを入力テープとする二次元テープオートマトンを考える上で，基本となる問題をオートマトンの能力と関連して考察を進める．まず最初に，文献[2]で導入したRebound Automatonの入力テープの形状とその能力について明らかになった結果を報告する．

2 Rebound Automatonの入力テープの形状と能力

Rebound Automatonとは，図1に示した様な長方形状の入力テープ上を二次元的に動作する二次元有限オートマトンである．入力テープの縦，横の長さをそれぞれ m，n であらわす．テープの第一行目上には，オートマトンが処理すべき一次元の系列が記入されており，第一行目以下の部分には一様にブランク記号が書かれている．この様なオートマトンの入力テープの縦と横の長さを変化させた場合，Rebound Automaton の能力がどの様に変化するかということについて明らかになった結果を表1に示す．表1の中で，L_1, L_2, L_3, L_4 とは，次の様な非常に特徴的な文脈自由言語，文脈依存言語である．

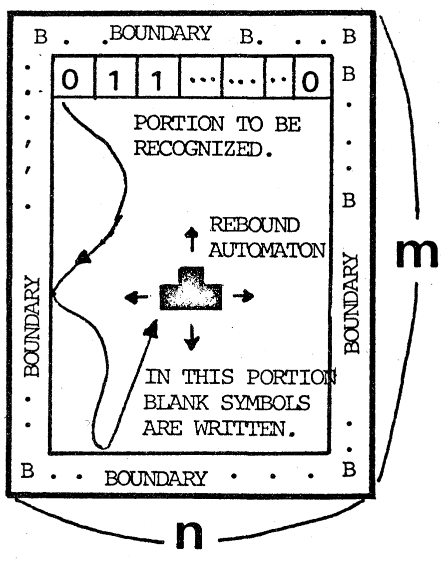

図1. Rebound Automaton の入力テープ

$\mathbb{L}_1 = \{0^n 1^n \mid n \geqq 1\}$ $\mathbb{L}_2 = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$

$\mathbb{L}_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \geqq 1\}$ $\mathbb{L}_4 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$

表1. 入力テープの形状とRebound Automatonの能力

テープ形状	Rebound Automatonの能力
$m = k$(定数)	$\mathcal{L}_{FSA(一次元)} = \mathcal{L}_{RA}$
$m \geqq n$	$\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \mathbb{L}_3 \in \mathcal{L}_{RA}$
$\frac{n}{2} \leqq m \leqq n$	$\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \mathbb{L}_3 \in \mathcal{L}_{RA}$
$\frac{n}{k+1} \leqq m \leqq \frac{n}{k}$	$\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \mathbb{L}_3 \in \mathcal{L}_{RA}$
$\frac{n}{m} = t$(定数)	$\mathbb{L}_i\ (i = 1, 2, 3, 4) \in \mathcal{L}_{RA}$

図2～図4に，Rebound Automatonによる上記の言語の受理の様子を概略的に示す。入力テープの形状が，$m \geqq n$，$\frac{n}{2} \leqq m \leqq n$，あるいは$\frac{n}{k+1} \leqq m \leqq \frac{n}{k}$ の時等，Rebound Automatonは言語$\mathbb{L}_4$を認識できないと思われる。

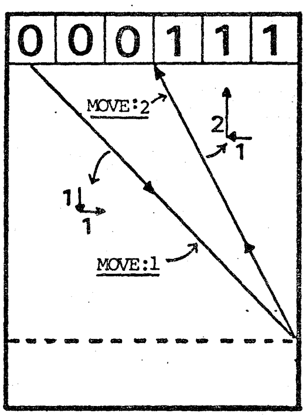

図2. $m \geqq n$のとき$\mathbb{L}_1$を受理するRebound Automatonの動作.

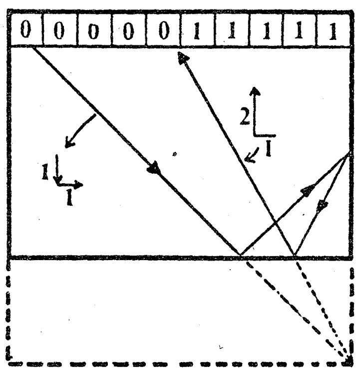

図3. $\frac{n}{2} \leqq m \leqq n$のとき，$\mathbb{L}_1$を受理するRebound Automatonの動作.

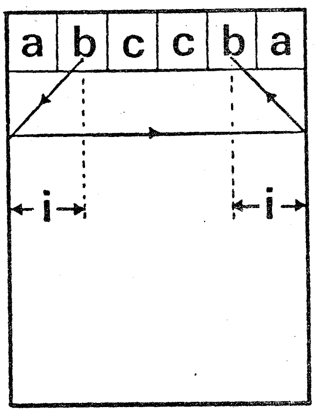

図4. $m \geqq n$のとき$\mathbb{L}_2$を受理するRebound Automatonの動作.

3 入力テープの形状とオートマトンの基本的能力

図5〜図8に示す正方形，長方形，simply-connected，pathwise-connectedの形状を持った入力テープのクラスを考える。各テープの境界上には，境界記号"B"が記入され，内部には記号"Z"が一様に記入されている。"Z"が記入されている部分は，通常オートマトンが処理するパターンが記入されるべき部分であるが，ここでは非常に基本的な問題を考えるために上記の様なテープを仮定した。二つのます目 $(i,j)(i',j')$ が $|i-i'|+|j-j'| \leq 1$ を満たす時に限り，隣接していると呼ぶ。この様な関係の推移的閉包により結ばれているます目は，お互いに連結していると考える。本稿で扱うテープは，すべて連結であることが仮定されている。図7に示すsimply-connectedテープとは，テープの内部に穴

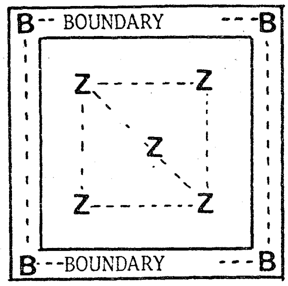

Fig.5 Square Input Tape.

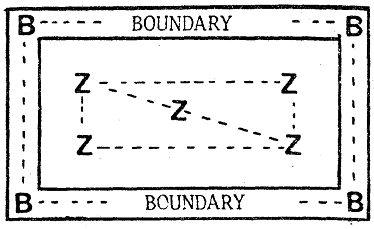

Fig.6 Rectangular Input Tape.

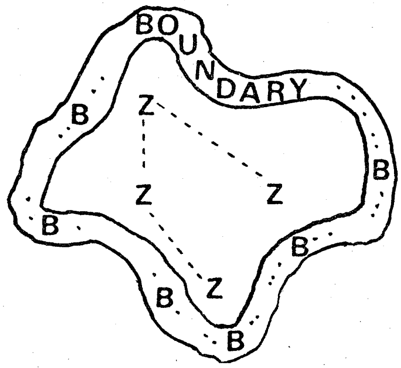

Fig.7 Simply-connected Input Tape.

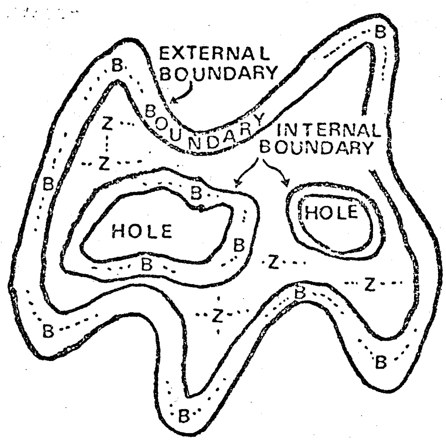

Fig.8 Pathwise-connected Input Tape.

を含まない連結テープであり，pathwise-connected テープとは，単に連結しているテープで一般に内部に複数個の穴を含む場合がある。

以上の様な入力テープを利用する二次元テープオートマトンとして，次の四種を考える。すなわち，二次元有限オートマトン（FSA），二次元マーカーオートマトン（MA），二次元プッシュダウンオートマトン（PDA），二次元線型有界オートマトン（LBA）である。

FSAとは，唯一つの読み込み専用ヘッドを持ち，内部状態数が有限のオートマトンである。

MAとは，テープ上の任意の位置に置くことが可能なマーカー（目印）をFSAに付与したものである。k個のマーカーを持ったMAをMA-kで示す。

PDAとは，FSAに一次元のPDAと全く同じ型式のプッシュダウンメモリーを付与したものである。二次元PDAの入力ヘッドは，四方向に動くことが許されている。

LBAとは，入力テープ上に自由に記号を書いたり消したりすることが可能なオートマトンである。

前述したテープ上だけを動くことを許されたオートマトンは，どの様な能力を有すれば以下に示す非常に基本的な問題を解くことができるかということについて考察する。

各問題に対する解を表2～表4に示す。なお解が不明な場合は，筆者らの推測をあわせて記入することにする。

問題1 pathwise-connectedテープを仮定する。テープ上の任意の位置から動作を開始したオートマトンは，外側の境界上のあるます目に到達して停止することができるか？ オートマトンは境界に当たる度に，その境界が内側か外側の境界であるかを区別せねばならない。解と推測を表2に示す。

FSA	不可能と思われる。
PDA	不明
MA	MA-3で可能
LBA	可能

表2

問題2 "Σ"が記入されているます目のうちで，一番高い位置にあるます目上に，オートマトンは到達できるか？オートマトンはテープ上の任意の位置から動作を開始する。

	Square	Rectangular	Simply-connected	Pathwise-connected
FSA	可能	可能	不可能と思われる	不可能と思われる
PDA	可能	可能	不明	不明
MA	可能	可能	MA-3で可能	MA-3で可能
LBA	可能	可能	可能	可能

表3

問題3 テープ上の任意の位置から動作を開始したオートマトンが，入力全体を走査することができるか？

	Square	Rectangular	Simply-connected	Pathwise-connected
FSA	可能	可能	不可能と思われる	不可能と思われる
PDA	可能	可能	不明	不明
MA	可能	可能	MA-1で可能	MA-4で可能
LBA	可能	可能	可能	可能

表．4

問題3で示す走査法は，以前に走査したます目とそうでないます目を区別している．従って，テープ上の"z"のます目の総数が奇数か否か？という奇偶判定問題も同様に解くことができる．本稿では，さまざまな形の二次元テープを導入し，形状とオートマトンの能力に関する基本的な問題を考えた．

プッシュダウンメモリーの効果的な使い方に関して不明な点が多い．PDAはMA-1を模倣できるか否か？等は非常に興味ある問題である．

参考文献

1. M.Blum & C.Hewitt: Automata on a two dimensional tape. IEEE Symp. on SWAT. 155-160 (1967)
2. 菅田，梅尾，森田；Rebound Automaton の言語受理能力について，電子通信学会，オートマトンと言語 研資，AL-75.43.
3. A.R.Smith: Two-dimensional formal language and pattern recognition by cellular automata. IEEE Symp. on SWAT. 144-152. (1971)
4. M.Selkow: One-pass complexity of digital picture properties. JACM. 19. (1972)
5. D.L.Milgram. A.Rosenfeld: Array automata and array grammars. Information processing letters (1971)