数理解析研究所講究録
第 270 巻 1976 年 134-141

拡張された2-充足可能性判定問題について

広島大学　工学部　菊野　亨
中村　昭

1. まえがき

決定性（あるいは非決定性）チューリング機械 DTM（NDTM）によって，入力テープの長さのある巾乗のステップで受理される言語のクラスを $\underline{\mathcal{P}}$（$\underline{\mathcal{NP}}$）と書く．言語 L_0 が次の条件 (a)，(b) を満たすとき $\underline{\mathcal{NP}\text{-complete}}$ であるという．(a) $L_0 \in \mathcal{NP}$　(b) $\mathcal{NP}$ に属する任意の言語 L を L_0 に巾乗のステップで変換する DTM $\mathcal{M}$ が存在する．（巾乗のステップで変換するとは，$\mathcal{M}$ が系列 $w \in L$ を系列 $\overline{w} \in L_0$（$w \notin L$ なら $\overline{w} \notin L_0$）に変換し，しかもその変換を w の長さのある巾乗に比例するステップ内で行なうことである．）

真理値として $\Omega_2 = \{0, 1\}$ のいずれかをとる t 個の変数とその否定からなる集合を $\Sigma = \{x_i\} \cup \{\overline{x}_i\}$ $(1 \leq i \leq t)$ とし，論理和を $+$，論理積を $\cdot$ で表わす．和-積形をした論理式（$\underline{CNF}$ と略す）$\underline{C} = C_1 \cdot C_2 \cdot \cdots \cdot C_n$ で各節(clause)

$C_i = y_{i_1} + y_{i_2} + \cdots + y_{i_k}$ （各 $y_{ij} \in \Sigma$）が高々 k 個の文字（literal）しか含まないとき $\mathcal{C}$ を <u>k－CNF</u> と呼ぶ．k－CNF $\mathcal{C}$ が充足可能（すなわち，各節 C_i を同時に1にする t 個の変数 $\{x_i\}$ への真理値の割当が存在する）かどうかの判定問題を <u>k－充足可能性判定問題</u>という．

k－充足可能性判定問題の一つの問題の記述 w（ある一つの k－CNF $\mathcal{C}$）の中で，それを入力テープ上に与えたときチューリング機械が受理して停止するような w の集合が上述の言語 L，L_0 に対応している．言語 L_0 が NP－complete のとき元の問題も NP－complete であるといい，言語 L がクラス $\mathcal{P}$（$\mathcal{NP}$）に属すとき元の問題も $\mathcal{P}$（$\mathcal{NP}$）に属すという．

これまでに（i）3－充足可能性判定問題が NP－complete であること，（ii）2－充足可能性判定問題がクラス $\mathcal{P}$ に属すこと等が既に示されている[(1)]．本稿では 2. でクラス $\mathcal{P}$ の範囲内で 2－CNF $\mathcal{C}$ の拡張を試み，「d をある固定された定数とするとき，d 個の節 $\tilde{C}_i$ については任意個数の文字を含むことを許した CNF $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cdot \tilde{C}_{n+1} \cdot \tilde{C}_{n+2} \cdot \cdots \cdot \tilde{C}_{n+d}$ の充足可能性判定問題はやはりクラス $\mathcal{P}$ に属す」ことを示す．3. では各変数が真理値として $\Omega_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ のいずれかをとる，いわゆる3値論理上の 2－充足可能性判定問題が NP－complete であることを示す．

2. 2-CNF の拡張

Cook (2) によって 2-充足可能性判定問題がクラス $\mathcal{P}$ に属すことは既に言われている。ここではクラス $\mathcal{P}$ の範囲内でこの問題の一つの拡張を試みる。

[P1][2] 2-CNF $\mathcal{C} = C_1 \cdot C_2 \cdot \cdots \cdot C_n$ に対する充足可能性判定問題はクラス $\mathcal{P}$ に属す。（判定アルゴリズムとして Davis-Putnam の方法[3] が知られている。）

今，d をある固定された定数とするとき，CNF $\tilde{C}_1 \cdot \tilde{C}_2 \cdot \cdots \cdot \tilde{C}_d$ を考える。ここで各節 $\tilde{C}_i$ は高々 t 個の文字しか含まない（$\tilde{C}_i$ が任意個数の文字を含むとしても，容易に，高々 t 個の文字しか含まない場合に帰着できる）。

[P2] CNF $\tilde{C}_1 \cdot \tilde{C}_2 \cdot \cdots \cdot \tilde{C}_d$ に対する充足可能性判定問題はクラス $\mathcal{P}$ に属す。

（略証）判定アルゴリズムを示す。$\tilde{C}_i = y_{i_1} + y_{i_2} + \cdots + y_{i_{t_i}}$ ($t_i \le t$) とする。各 $\tilde{C}_i$ ごとに一つの文字 $y_{i_{j_i}}$ ($1 \le j_i \le t_i$) を選び，それら $\{y_{i_{j_i}}\}$ ($1 \le i \le d$) に値 "1" を割当てる。このとき同じ変数に "1" と "0" を同時に割当てること（例えば $y_{l_{j_l}} = x_3 = 1$, $y_{m_{j_m}} = \overline{x_3} = 1$, $l \ne m$）がなければ，$\tilde{C}_1 \cdot \tilde{C}_2 \cdot \cdots \cdot \tilde{C}_d$ は充足可能である。この判定は入力テープ長に比例するステップで可能，しかも $\{y_{i_{j_i}}\}$ の選び方の総数は $t_1 \times t_2 \times \cdots \times t_d \le t^d$ で抑えられているの

で，この問題はクラス$\mathcal{P}$に属す．　　　　（証明終）

[P3]　CNF $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}\cdot\tilde{C}_{n+1}\cdot\tilde{C}_{n+2}\cdot\cdots\cdot\tilde{C}_{n+\alpha}$ に対する充足可能性判定問題はクラス$\mathcal{P}$に属す．

（略証）先ず，P2 の方法で $\tilde{C}_{n+1}\cdot\tilde{C}_{n+2}\cdot\cdots\cdot\tilde{C}_{n+\alpha}=1$ となる $\{y_{ij_i}\}$（$n+1\le i\le n+\alpha$）を選び各 $\{y_{ij_i}\}$ ごとに以下の操作を行なう．$\mathcal{C}$に現われる変数のうち真理値の割当が決まったものを対応する値で置きかえた CNF を $\mathcal{T}_r(\tilde{\mathcal{C}})=\bar{\mathcal{C}}=\bar{C}_1\cdot\bar{C}_2\cdot\cdots\cdot\bar{C}_n$ とする．このとき$\tilde{\mathcal{C}}$が充足可能となるための必要十分条件は$\mathcal{T}_r(\tilde{\mathcal{C}})$が充足可能となることである．従って，この $\mathcal{T}_r(\tilde{\mathcal{C}})$ に対し Davis-Putnam の方法を適用すればよい．上述の全体のステップは入力テープ長のある巾乗で抑えられる．　　　　（証明終）

3.　3値論理の2-充足可能性判定問題

真理値として $\Omega_3=\{0,\frac{1}{2},1\}$ のいずれかをとる，いわゆる3値論理[5]を考える．ここでは論理演算として＋，・の他に，否定 ∇_α（$\alpha\in\Omega_3$）を導入する．変数 z_i に対する真理値の割当を $v(z_i)$ で表わし，論理式 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ に対し，$v(\mathcal{A}+\mathcal{B})=\max(v(\mathcal{A}),v(\mathcal{B}))$，$v(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})=\min(v(\mathcal{A}),v(\mathcal{B}))$，$v(\nabla_\alpha\mathcal{A})=1$（$\alpha\neq v(\mathcal{A})$ のとき），$v(\nabla_\alpha\mathcal{A})=0$（$\alpha=v(\mathcal{A})$ のとき）と拡張する．

$\hat{\Sigma} = \{z_i\} \cup \{\nabla_\alpha z_i\}$ $(1 \le i \le t)$ とするとき，2値論理の場合と同様，$F = F_1 \cdot F_2 \cdot \cdots \cdot F_n$ で各節 $F_i = y_{i_1} + y_{i_2}$（各 $y_{ij} \in \hat{\Sigma}$）が高々2個の文字しか含まないとき，F を 2-CNF と呼び，各 F_i を同時に1にする t 個の変数 $\{z_i\}$ への真理値 Ω_3 の割当が存在する（充足可能）かどうかの判定問題を 2-充足可能性判定問題という．

［P4］　3値論理の 2-充足可能性判定問題は NP-complete である．

ある言語 L_0 が NP-complete であることを証明するには，次の (i) と (ii) を示せばよいことがわかっている[1]．(i) $L_0 \in \mathcal{NP}$．(ii) 既に NP-complete であることが知られている問題に対応する言語を L_0 に巾乗のステップで変換する DTM が存在する．

（証明）(i) について．充足可能な 2-CNF F のすべての集合を L_0 とするとき，L_0 を受理する NDTM $\mathcal{M}$ は次のように動作する．$\mathcal{M}$ は先ず，与えられた 2-CNF F に対し，もし充足可能なら F = 1 となるように t 個の変数 $\{z_i\}$ に真理値を（非決定的に）うまく割当てる．続いて，F に現われる変数を対応する値で置きかえ，更にその変換された CNF の解析および計算を（決定的に）行なって，最終的に F = 1 であることを確認する．以上の動作は入力テープ長の巾乗のス

テップでできる[4]．

(ii) について．2値論理の3-充足可能性判定問題が3値論理の2-充足可能性判定問題に巾乗のステップで変換できることを示す．<u>変換</u>：与えられたΣ上の3-CNF $\mathcal{C} = C_1 \cdot C_2 \cdot \cdots \cdot C_n$ から次のように2-CNF $F = F_1 \cdot F_2 \cdot \cdots \cdot F_n \cdot D_3$ を作る．$C_i = y_1 + y_2 + y_3$ とすると，真理値として Ω_3 をとりうる変数 u_i を新しく導入し，$F_i = (\nabla_{\alpha_1} y_1 + \nabla_0 u_i)(\nabla_{\alpha_2} y_2 + \nabla_{\frac{1}{2}} u_i)(\nabla_{\alpha_3} y_3 + \nabla_1 u_i)$ とする．ここで $y_i = x_j$ なら $\nabla_{\alpha_i} y_i = \nabla_0 x_j$，$y_i = \bar{x}_j$ なら $\nabla_{\alpha_i} y_i = \nabla_1 x_j$ と決める．$C_i = y_1$（あるいは $C_i = y_1 + y_2$）のときは $F_i = \nabla_{\alpha_1} y_1$（$\nabla_{\alpha_1} y_1 + \nabla_{\alpha_2} y_2$）とする．$D_3 = \nabla_{\frac{1}{2}} x_1 \cdot \nabla_{\frac{1}{2}} x_2 \cdot \cdots \cdot \nabla_{\frac{1}{2}} x_t$．以上の変換は入力テープ長の巾乗のステップで，しかも決定的に行なえる．<u>充足可能性</u>：Fが充足可能性に関し，$\mathcal{C}$と等価であることを示す．先ず$\mathcal{C}$が充足可能とすると，すべての $C_i = 1$ となる変数 $\{x_i\}$ への真理値 Ω_2 の割当がある．各 $1 \le i \le n$ について，C_i が2個以内の文字しか含まないなら，直ちに $F_i = 1$ がわかる．$C_i = y_1 + y_2 + y_3$ とすると少なくとも一つの文字は値"1"をもつので，今それを y_2 とする．このとき $u_i = \frac{1}{2}$ と割当てれば $F_i = 1$ となる（$y_1 = 1$ なら $u_i = 0$，$y_3 = 1$ なら $u_i = 1$）．更に，x_i は値"$\frac{1}{2}$"をとらないので $D_3 = 1$ となり，$\mathcal{C} = 1$ なら確かに $F = 1$ とできる．逆に，Fが充足

可能とすると，$F=1$ となる変数 $\{x_i\}$ と $\{u_i\}$ への真理値 Ω_3 の割当がある．$D_3=1$ より，このとき各 x_i は値"$\frac{1}{2}$"をとらない．F_i が u_i を含まなければ直ちに $C_i=1$ がわかる．F_i が u_i を含むとき，$F_i=1$ とする u_i への真理値の割当があるので，$u_i=\frac{1}{2}$ なら $y_2=1$（$u_i=0$ なら $y_1=1$，$u_i=1$ なら $y_3=1$）となっている筈で，そのとき確かに $C_i=1$ となる．従って $F=1$ となる $\{x_i\}$ への真理値の割当で，$C=1$ となる．

（証明終）

4. あとがき

クラス $\mathcal{NP}$ がクラス $\mathcal{P}$ を含むことは定義より明らかだが，真に含むかどうかは未解決の大問題である．もし $\mathcal{NP}$ -complete であることがわかっている言語がクラス $\mathcal{P}$ に属することが証明されるならば，$\mathcal{NP}=\mathcal{P}$ となってしまう(1)．一方，文献（2）等では，$\mathcal{NP}\neq\mathcal{P}$ の方向で種々の試みがなされている．本稿の 3. で示した3値論理の充足可能性判定問題もそうした意味で，今後検討すべき問題の一つであると思われる．

また，本稿では触れなかったが，論理演算として，否定 $\nabla\alpha$ の代わりに successor function $'$ を導入した論理(5)，3以上の m に対し，真理値として $\Omega_m=\{0, \frac{1}{m-1}, \cdots, \frac{m-2}{m-1}, 1\}$ のいずれかをとる m 値論理(5) 等については紙面の関係

で別の機会に譲る. なお, 2-充足可能性判定問題の述語論理への若干の拡張についても検討中である.

文 献

(1) A.V. Aho, J.E. Hopcroft and J.D. Ullman : " The Design and Analysis of Computer Algorithms ", Addison-Wesley, Reading, MA (1974).

(2) S.A. Cook : " The Complexity of Theorem-Proving Procedures ", Proc. 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pp. 151-158 (1971).

(3) M. Davis and H. Putnam : " A Computing Procedure for Quantification Theory ", JACM., 7, pp. 201-215 (1960).

(4) A.V. Aho and J.D. Ullman : " The Theory of Parsing, Translation and Compiling, Volume I : Parsing ", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1972).

(5) 栗原, 中村 : " 論理数学 I ", 共立出版 (1975).