数理解析研究所講究録
第 270 巻 1976 年 142-152

単調関数によるブール関数の分解と MOS論理回路合成への応用

東海大学工学部　小高 明夫，野島 晋
東海大学理学部　成島 弘

1．まえがき

ICあるいはLSIにおいて低消費電力であり，かつ高集積化が可能であるMOS論理回路（以下単にMOSゲートという）が広く用いられている．MOSゲートでは負荷抵抗としてゲートとドレインを短絡したMOSFETを利用している．負荷のMOSFETが電源からしゃ断されているとき，電力損失はほとんどなく，導通状態のとき，電源から電流が流れて消費電力を生ずる．したがって，ある論理機能を実現する際，負荷のMOSFETの数を減少させることによって低電力化を図ることができ高い集積化が可能となる．一方MOSゲートはNand, Nor論理機能のみならずAnd-Orで構成できる関数の否定（Not）が実現できるので,[1] この特徴を生かし論理回路を構成することによって，負荷のMOSFETの数を著しく減少させることができる．この様な論理回路合成法としては，従来のAnd, Or, Not, Nand

Norを基本とした方法では十分でなく，新しい実用的な合成方法の実現が望まれている．

茨木，室賀は真理値表にもとづき，任意のブール関数を最小のMOSゲート2段接続回路で実現する手順を考察した[2]．T.K.LIUはSTARATIFED STRUCTUREの概念の導入によって同じ問題に対する合成のアルゴリズムを発表した[3]．多段接続回路での構成法については，中村，都倉，嵩がMarkovのアイデアを拡張した反転数の概念を用いた合成方法を考察した[4][5]．

本研究においても同種の問題を取扱っているが，合成のアルゴリズムが非常に簡単で，試行錯誤的な面をもって居らず計算機を用いた合成などに有効である．ここでのべる方法はすでに発表した標準形にもとづいている[6],[7]．この標準形によって任意のブール関数は単調な関数に分解できる．さらに，各単調な関数について展開すると，全順序でかつ単調な関数に分解できる．この結果より，2段接続MOS論理回路を構成する．

2、全順序でかつ単調増大な関数によるブール関数の分解

n変数のブール関数において，否定の伴わない相異なるs個$(1 \leq s \leq n)$の変数の論理積の論理和で構成されるブール関数をf_sと表わし，s次の第一積和項と名付ける．f_sの一般

形は次のようになる。

$$f_s = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_s\le m} d_{i_1 i_2\cdots i_s}\, x_{i_1} x_{i_2}\cdots x_{i_s} \qquad (1.)$$

ただし、Σは論理和の意味での総和である。また、$d_{i_1 i_2\cdots i_s}$は2進定数0または1である。0次の第1積和項f_0を$f_0 = d_0$とする。d_0は0または1をとる2進定数である。

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$と表わす。すべての$i$ $(1\le i\le m)$に対し$x_i \le y_i$が成立するとき、$\mathbf{x}\le\mathbf{y}$とかく。$\mathbf{x}\le\mathbf{y}$なる$\mathbf{x}, \mathbf{y}$に対してブール関数fが$f(\mathbf{x})\le f(\mathbf{y})$を満すとき、$f$は単調増大な関数であるという。また、$\mathbf{x}\le\mathbf{y}$に対して$f(\mathbf{x})\ge f(\mathbf{y})$である場合、$f$は単調減少な関数であるという。$f$が単調増大あるいは単調減少な関数であるとき、$f$を単調であるという。前述した$s$次の第1積和項は単調増大な関数である。0次から$m$次までの第1積和項をExclusive-Orで結合した関数を$F(f_0, f_1, \cdots, f_m)$と表わす。すなわち$F(f_0, f_1, \cdots, f_m) = f_0 \oplus f_1 \oplus \cdots \oplus f_m$である。この関数に対し次の定理が成立する。*

(定理1) m変数の任意のブール関数$f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$は標準形$F(f_0, f_1, \cdots, f_m)$に一意的に展開することができる

(証明) 略

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l$を任意のブール関数とするとき、次の系が成立

* 文献(7)で発表した8種の標準形の[IV]に相当する。以下の議論は他の標準形に対してもそのまゝ適用できる。

する。

(系 1) $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \cdots \oplus \alpha_\ell = \sum_{j=1}^{n}{}_{\oplus} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_j \le \ell} \alpha_{k_1} \alpha_{k_2} \cdots \alpha_{k_j}$

(証明) $\alpha_1 \leftrightarrow x_1$, $\alpha_2 \leftrightarrow x_2$, $\cdots$, $\alpha_\ell \leftrightarrow x_\ell$ に対応ずけ，定理 1 を適用することによって得られる。

n 変数ブール関数には $n+1$ 組の第 1 積和項が存在する。$n+1$ 組の第 1 積和項より r 組 $(1 \le r \le n+1)$ をとりその論理積を構成する。この組合せの総数は ${}_{n+1}C_r$ となる。そのすべてについて論理和をとった関数を r 次の第 2 積和項といい g_r で表わす。すなわち g_r は

$$g_r = \sum_{0 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_r \le n} f_{k_1} f_{k_2} \cdots f_{k_r} \qquad (2)$$

となる。r 次の第 2 積和項は単調増大な関数である。このことは第 1 積和項 f_s が単調増大な関数で，かつ第 2 積和項が第 1 積和項の論理積と論理和によって表わされることから明らかである。

関数 g の値が 1 であれば必ず関数 g' の値も 1 になるとき，g' は g より大きいといい，この関係を $g' \supseteq g$ で表わす。このとき，各第 2 積和項 g_r に対し次の補題が成立する。

(補題 1). $\{g_r \mid 1 \le r \le n+1\}$ は $\subseteq$ に関し鎖(全順序集合)となる。

(証明) j 次 $(1 \le j \le n+1)$ の第 2 積和項 g_j を $g_j = \sum_{0 \le k_1 < \cdots < k_j \le n} f_{k_1} \cdots f_{k_j}$ と表わす。$g_j = 1$ のとき，ある $k_1, k_2, \cdots, k_j$ が存在し，$f_{k_1} \cdots f_{k_j} = 1$ となる。$i < j$ なる i 次の第 2 積和項 g_i の論理積の項には，定

義より明らかなように $f_{k_1}f_{k_2}\cdots f_{k_i}$ が存在しその値は1である。したがって，$i<j$ に対する第2積和項 g_i, g_j は $g_i \supseteq g_j$ となり補題1が成立する。

補題1より，第2積和項 g_r $(1\leq r\leq m+1)$ は全順序関係を有しかつ単調増大な関数であることが明らかになった。1次から $m+1$ 次までの第2積和項をExclusive-Orで結合した関数を $G(g_1, g_2, \cdots, g_{m+1})$ で表わす。すなわち，$G(g_1, g_2, \cdots, g_{m+1}) = \sum_{r=1}^{m+1} \oplus\, g_r$ とするとき次の定理が成立する。

（定理2）m 変数の任意のブール関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ は $G(g_1, g_2, \cdots, g_{m+1})$ に1意的に展開することができる。

（証　明）$f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ は定理1より $F(f_0, f_1, \cdots, f_m)$ に1意的に展開できる。さらに，$F(f_0, f_1, \cdots, f_m)$ に系1を適用することによって，$f_0 \oplus f_1 \oplus \cdots \oplus f_m = \sum_{r=1}^{m+1} \oplus \sum_{0\leq k_1<k_2<\cdots<k_r\leq m} f_{k_1}f_{k_2}\cdots f_{k_r}$ となる。(2)式より，$g_r = \sum_{0\leq k_1<k_2<\cdots<k_r\leq m} f_{k_1}f_{k_2}\cdots f_{k_r}$ であるので，$f_0 \oplus f_1 \oplus \cdots \oplus f_m = g_1 \oplus g_2 \oplus \cdots \oplus g_{m+1} = G(g_1, g_2, \cdots, g_{m+1})$ となる。

定理2は，m 変数の任意のブール関数が，全順序でかつ単調増大な関数（第2積和項）の線形関数に展開できることを示している。第2積和項は $p+q$ なる論理和または $p\cdot q$ なる論理積で表わされている。この p, q に対して，$p \supset q$ なる関係があるとき，$p+q=p$，$p\cdot q=q$ と簡単化できる。r 次の第2積和項 g_r $(1\leq r\leq m+1)$ に上の吸収律を適用し簡単化した

第2積和項を$\hat{g}_r$で表わす。$i \neq j$なる第2積和項 $\hat{g}_i$, $\hat{g}_j$ が $\hat{g}_i = \hat{g}_j$であるとき、$\hat{g}_i \oplus \hat{g}_j = 0$であるので、$G(\hat{g}_1, \hat{g}_2, \cdots, \hat{g}_{m+1})$から$\hat{g}_i$, $\hat{g}_j$を消却することができる。等しい第2積和項を消却した$G(\hat{g}_1, \cdots, \hat{g}_{m+1})$の各項を既約な第2積和項といい$h_1, h_2, \cdots, h_k$で表わし、その既約な第2積和項の線形結合した関数を$G(h_1, h_2, \cdots, h_k)$ $(1 \leq k \leq m+1)$で表わす。

(系2) 第1積和項が全順序関係にあるとき、第2積和項と一致する。

(証明) 自明であるので省略する。

3. MOS論理回路の合成

全順序でかつ単調増大な関数を$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l$とするとき、次の補題が成立する。

(補題2)
$$\beta_1 \oplus \beta_2 \oplus \cdots \oplus \beta_l = \beta_1\overline{\beta_2} + \beta_3\overline{\beta_4} + \cdots + \beta_{l-1}\overline{\beta_l} \quad (l\text{;偶数})$$
$$= \beta_1\overline{\beta_2} + \beta_3\overline{\beta_4} + \cdots + \beta_l \quad (l\text{;奇数}).$$

(証明) $l = 2$ のとき、$\beta_1 \oplus \beta_2 = (\beta_1 + \beta_2)\overline{\beta_1\beta_2}$ である。しかるに、$\beta_1 \supset \beta_2$ であるので $\beta_1 + \beta_2 = \beta_1$, $\beta_1 \cdot \beta_2 = \beta_2$ となる。したがって、$\beta_1 \oplus \beta_2 = \beta_1\overline{\beta_2}$ となる。$l = j$ (j;偶数とする)まで上の補題が成立すると仮定し、$j+1$ の場合について考える。

$$(\beta_1 \oplus \beta_2 \oplus \cdots \oplus \beta_j) \oplus \beta_{j+1} = (\beta_1\overline{\beta_2} + \cdots + \beta_{j-1}\overline{\beta_j}) \oplus \beta_{j+1}$$
$$= (\beta_1\overline{\beta_2} + \cdots + \beta_{j-1}\overline{\beta_j} + \beta_{j+1})\overline{(\beta_1\overline{\beta_2} + \cdots + \beta_{j-1}\overline{\beta_j})\beta_{j+1}}$$

しかるに，$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_j \geq \beta_{j+1}$ であるので，$\overline{\beta_2}\beta_{j+1} = \cdots = \overline{\beta_j}\beta_{j+1} = 0$ となる．したがって，$\beta_1 \oplus \cdots \oplus \beta_j \oplus \beta_{j+1} = \beta_1\overline{\beta_2} + \cdots + \beta_{j-1}\overline{\beta_j} + \beta_{j+1}$ となる．$j+1$ は奇数であることから，l が奇数のとき補題2が成立する．

さらに，$j+2$ に対しては

$$
\begin{aligned}
(\beta_1 \oplus \cdots \oplus \beta_j \oplus \beta_{j+1}) \oplus \beta_{j+2} &= (\beta_1\overline{\beta_2} + \cdots + \beta_{j-1}\overline{\beta_j} + \beta_{j+1}) \oplus \beta_{j+2} \\
&= (\beta_1\overline{\beta_2} + \cdots + \beta_{j+1} + \beta_{j+2})\overline{(\beta_1\overline{\beta_2} + \cdots + \beta_{j+1})\beta_{j+2}}
\end{aligned}
$$

$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_{j+1} \geq \beta_{j+2}$ であるので，$\beta_{j+1} + \beta_{j+2} = \beta_{j+1}$，$\beta_{j+1} \cdot \beta_{j+2} = \beta_{j+2}$，$\overline{\beta_2}\beta_{j+2} = \cdots = \overline{\beta_j}\beta_{j+2} = 0$ となる．したがって，$\beta_1 \oplus \cdots \oplus \beta_{j+1} \oplus \beta_{j+2} = (\beta_1\overline{\beta_2} + \quad + \beta_{j+1})\overline{\beta_{j+2}} = \beta_1\overline{\beta_2} + \cdots + \beta_{j+1}\overline{\beta_{j+2}}$ となる．$j+2$ は偶数であるので，補題2は l が偶数のときも成立する．

既約な第2積和項を次数の低い順に $h_1, h_2, \cdots, h_k$ $(1 \leq k \leq m+1)$ と表わすとき，次の定理が成立する．

<u>（定理3）</u> m 変数の任意のブール関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ は第2積和項 $h_1, h_2, \cdots, h_k$ によって次の様に展開できる．

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_k) &= h_1\overline{h_2} + \cdots + h_{k-1}\overline{h_k} \qquad (k;\text{偶数}) \\
&= h_1\overline{h_2} + \cdots + h_{k-2}\overline{h_{k-1}} + h_k \quad (k;\text{奇数})
\end{aligned}
$$

（証明） 定理2より $f(x_1, x_2, \cdots, x_m) = h_1 \oplus \cdots \oplus h_k$ と表わすことができる．$h_1, h_2, \cdots, h_k$ は全順序でかつ単調増大な関数であるので補題2より定理3が得られる．

<u>（定理4）</u> m 変数の任意のブール関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ は第2積和項 $h_1, h_2, \cdots, h_k$ によって次の様に展開できる．

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \overline{(\overline{h_1} + h_2)(\overline{h_3} + h_4) \cdots (\overline{h_{k-1}} + h_k)} \qquad (k;\text{偶数})$$

$$= \overline{(\overline{h_1} + h_2)(\overline{h_3} + h_4) \cdots (\overline{h_{k-2}} + h_{k-1})\overline{h_k}} \qquad (k;\text{奇数})$$

（証明）定理3にde Morganの定理を適用することによって得られる。

MOSゲートのFan in, Fan outの制限を無視すると、単調減少な関数は1個のMOSゲートで実現できる。(1)(2)(3)(4)(5) したがって、定理4より明らかなように、任意のブール関数は、$\left[\frac{n+1}{2}\right]$** 個以下の2段接続MOSゲートで合成できる。さらに、定理3の展開を適当にアレンジすることによって多段接続MOSゲートで任意の論理回路の構成が可能である。

以下に2段接続MOS論理回路構成のアルゴリズムを示す。

1° 定理1より、与えられたブール関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対する標準形 $F(f_0, f_1, \cdots, f_n)$ を求める。

2° 1°で求めた第1積和項 f_s $(0 \leq s \leq n)$ から、第2積和項 g_r $(1 \leq r \leq n+1)$ を求める。

3° 既約な第2積和項 $h_1, h_2, \cdots, h_k$ を求める。

4° 3°で得られた $h_1, h_2, \cdots, h_k$ を用い次の2段接続MOS論理回路を実現する。

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \overline{\left\{ \prod_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (\overline{h_{2j-1}} + h_{2j}) \right\}}$$

** [ ] はガウス記号

例 次のブール関数 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ を2段接続MOS論理回路で構成する. $f(0,0,0,0)=f(0,0,1,0)=f(0,1,0,0)=f(0,0,1,1)=f(1,0,1,1)=f(1,1,0,1)=f(1,1,0,0)=f(1,1,1,1)=1$ それ以外では値0をとる.

1° 定理1より次の標準形が得られる.

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 1 \oplus (x_1+x_4) \oplus (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4)$$
$$\oplus (x_1x_2x_3+x_2x_3x_4) \oplus x_1x_2x_3x_4$$

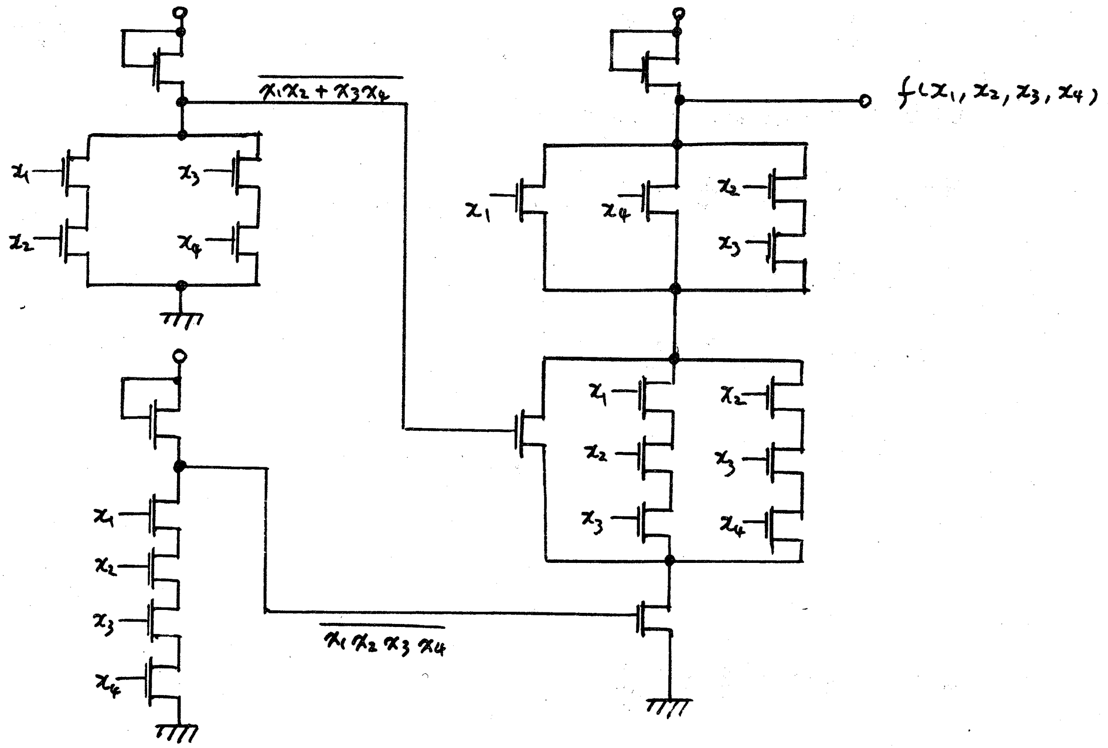
2° 省略

3° $h_1=1$, $h_2 = x_1+x_4+x_2x_3$, $h_3 = x_1x_2+x_3x_4$,

$h_4 = x_1x_2x_3+x_2x_3x_4$, $h_5 = x_1x_2x_3x_4$

4° $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{\{\overline{1}+(x_1+x_4+x_2x_3)\}\{\overline{x_1x_2+x_3x_4}+x_1x_2x_3+x_2x_3x_4\}\{\overline{x_1x_2x_3x_4}\}}$

したがって,次の様なMOS論理回路が得られる.



4. むすび

ブール関数を全順序でかつ単調増大な関数に分解する方法を用い，2段接続Mos論理回路を実現するアルゴリズムを示した。このアルゴリズムは試行錯誤的な面がなく非常に単純である。多変数の場合にも容易に適用でき，多段への拡張も容易である。しかし本方法ではMosゲート数が必ずしも最小ではない。また，実際にMos論理回路を構成する際，直列，並列に接続できるMosFETの数には制限がある。本方法ではそれらも考慮していない。

文献

(1) R.F.Spencer, Jr.: "Mos complex gates in digital system design", IEEE Computer Group News, 2, 11, P.47 (Sep. 1969).

(2) T. Ibaraki and S. Muroga: "Synthesis of a network with minimum number of negative gates", IEEE Trans. C-20, 1, p.48 (Jan. 1971)

(3) T. Liu: "Sythesis algorithms for 2-level Mos networks", IEEE Trans. C-24, 1, P.72 (Jan. 1975).

(4) 中村，都倉，嵩："単調関数による論理関数の分解" 信学誌(C), 54-C, 1, p.18, (昭46-01)

(5) K. Nakamura, N. Tokura and T. Kasami: "Minimal negative gate networks", IEEE. Trans. C-21, 1, p.5, (Jan. 1972)

(6) A. Odaka, H. Fujita, S. Nojima and H. Narushima : "A New Normal Form of Boolean Functions", To appear in DISCRETE MATHEMATICS.

(7) 小高, 藤田, 野島, 成島 : "ブール関数の新標準形", 信学誌(D) J59-D, 1, p.49. (昭 51, 1)