数理解析研究所講究録
第 271 巻 1976 年 7-15

一般四元数群のボルディズム群

阪大 理学部 柴田 勝征

§1. 一般的な準備

一般に、コンパクト・リー群 G に対して、$\Omega_*^U(G)$ という記号によって、弱概複素構造を保つような自由な G 作用全体の作るユニタリー・ボルディズム加群を表わす事にする。

命題 1.1. (well-known)

G が有限群か可換群のとき、Ω_*^U-加群の同型

$$\Omega_*^U(G) \cong \Omega_*^U(BG)$$

が、G-作用のクラス $[M, G]$ に対して、G-主バンドルの分類写像 $M/G \longrightarrow BG$ のクラスを対応させる事により得られる。

命題 1.2. (Atiyah-Hirzebruch, Conner-Floyd)

X を CW complex とするとき、spectral sequence $\{E^r_{p,q}, d_r\}$ で、$E^2_{p,q} \cong H_p(X; \Omega_q^U) \Rightarrow E^\infty_{p,q} = J_{p,q} / J_{p-1,q+1}$

8

$$0 \subset J_{0,n} \subset \cdots\cdots \subset J_{n,0} = \Omega_n^U(X)$$

$$J_{p,q} = \mathrm{Image}\,(\Omega_{p+q}^U(X^p) \longrightarrow \Omega_{p+q}^U(X))$$

となるものが存在する。(但し X^p は X の p-skelton)

以下の話においては、G は有限群とし、命題1.1の同型によって $\Omega_*^U(G)$ と $\Omega_*^U(BG)$ を自由に同一視する。

命題1.3.

G を有限群とする時、次の諸条件は同値である。

(1) $H_*(G\,;\,Z)$ は周期をもつ。

(2) $\tilde{H}_{2i}(G;Z)=0 \quad (\forall i)$。

(3) G の可換部分群はすべて cyclic。

(4) G の p-sylow 群は $\begin{cases} \text{cyclic} & (p:\text{奇素数の場合}) \\ \text{cyclic または一般四元数群} & (p=2\text{の場合}) \end{cases}$

(5) $\Omega_*^U(BG)$ に対する命題1.2のスペクトル列は collapse する。

(6) Thom 準同型 $\mu : \Omega_*^U(BG) \longrightarrow H_*(BG\,;\,Z)$ は全射。

(注) (1)$\Leftrightarrow$(2) : Swan

(1)$\Leftrightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(4) : Artin-Tate

(1)$\Leftrightarrow$(5) : Landweber

(5)$\Leftrightarrow$(6) : Conner-Smith

上の条件を満足する有限群は完全に決定されている。

命題 1.4. (Landweber)

Gのp-sylow群をHとする時、下のsplit exact列がある。

$$0 \to \tilde{\Omega}_*^U(BG)_{(p)} \xrightarrow{t} \tilde{\Omega}_*^U(BH) \xrightarrow{i^*} \tilde{\Omega}_*^U(BG)_{(p)} \to 0 \text{ 。}$$

但し t は transfer 準同型、$(\ \ )_{(p)}$ は p－成分を表わす。

<u>**定義 1.5.**</u>　有限群Gの複素表現 ρ が、単位元以外の g に対しては $\rho(g)$ が 1 を固有値として持たないとき、ρ を<u>自由な表現</u>という。Gが自由な表現 $\rho : G \longrightarrow U(d, \mathbb{C})$ を持てば、Gは S^{2d-1} に自由（かつ線型）に作用するから、命題1.3の条件を満足するが、さらに次が成り立つ事が容易にわかる。

命題 1.6.

次の exact triangle が存在する。　$(m \geq 1)$

$$\begin{tikzcd}
\Omega_*^U(S^{2d-1}, \rho) \arrow[rr, "i_*"] & & \Omega_*^U(S^{2(m+1)-1}, (m+1)\rho) \arrow[dl, "j_*"'] \arrow[d, "\Delta : \text{Smith homo}"] \\
& \Omega_*^U(S^{2(m+1)d-1}, S^{2d-1}; (m+1)\rho) \arrow[ul, "\partial"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \Omega_*^U(S^{2md-1}, m\rho) \text{。}
\end{tikzcd}$$

但し、$\Omega_*^U(S^{2(m+1)-1}, (m+1)\rho)$ により、G空間 $(S^{2(m+1)-1}, (m+1)\rho)$ の equivariant ユニタリー・ボルディズム加群を表わす。

<u>**注意 1.7.**</u> 実は、命題1.3, 1.4と後出の3.3により、次の exact 列が存在する事がわかる。

$$0 \longrightarrow \Omega_*^U\{(\#G)\cdot[S^{2d-1}, \rho, id] + \text{higher filtration terms}\} \xrightarrow{\text{incl.}} \tilde{\Omega}_*^U(S^{2d-1}, \rho) \xrightarrow{i_*} \tilde{\Omega}_*^U(S^{2(m+1)d-1}, \rho) \xrightarrow{\Delta} \tilde{\Omega}_*^U(S^{2md-1}, \rho) \longrightarrow 0 。$$

但し $\#G$ は G の元の個数を表わす。

§2. 一般四元数群のボルディズム加群の生成元

命題1.3 の(4)で出て来た一般四元数群とは、次の様にして定義される有限群である。

定義2.1. 一般四元数群 Q_j とは、

$$Q_j = \{x, y;\ x^j = y^2,\ xyx = y\}\ ;\ j \geqq 1$$

で定義される有限群である。以下、簡単のため、$j = 2k$(偶数の場合のみ取りあつかうことにする。Q_{2k} の自由な2次元複素表現

$$x \longmapsto \begin{bmatrix} \exp(2\pi i/4k), & 0 \\ 0 & \exp(-2\pi i/4k) \end{bmatrix}, \quad y \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を χ と書き、$n\chi$ によって定義される S^{4n-1} 上の自由な Q_{2k}-作用を (S^{4n-1}, χ) と書くことにする。すると、

$$BQ_{2k} = \lim_{n\to\infty} S^{4n-1}/\chi$$

としてよい。

補題2.2.

$$\tilde{H}_{2i}(BQ_{2k}; Z) = 0, \qquad H_{4i+3}(BQ_{2k}; Z) = Z_{8k}([S^{4i+3}/\chi]),$$

$$H_{4i+1}(BQ_{2k};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2(i_*^{(1)}[S^{4i+1}/\mathbb{Z}_{4k}]) \oplus \mathbb{Z}_2(i_*^{(2)}[S^{4i+1}/\mathbb{Z}_4])$$

但し， $i^{(1)}: B\mathbb{Z}_{4k} \longrightarrow BQ_{2k}$， $i^{(2)}: B\mathbb{Z}_4 \longrightarrow BQ_{2k}$ は、 inclusions $\mathbb{Z}_{4k}(x) \subset Q_{2k}$， $\mathbb{Z}_4(y) \subset Q_{2k}$ から induce される写像を表わす。

系 2.3.

$\Omega_*^U(Q_{2k})$ は Ω_*^U－加群として、$\{[S^{4i+3}, \chi], i_*^{(1)}[S^{4i+1}, T_{(4k,1)}], i_*^{(2)}[S^{4i+1}, T_{(4,1)}] ; i \geq 0\}$ によって生成される。但し、$(S^{4i+1}, T_{(m,1)})$ は、$S^{4i+1} \subset \mathbb{C}^{2i+1}$ 上の標準的な $\mathbb{Z}_m$ の線型作用を表わす。

命題 2.4. (Kasparov)

$r_1, r_2, \cdots, r_{n+1}$ を m と素な整数とするとき、ボルディズムのクラス

$$[L^n(m; r_1, r_2, \cdots, r_{n+1}), f] \in \Omega_{2n+1}^U(B\mathbb{Z}_m)$$

は、

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} [L^i(m,1,1,\cdots,1), \iota] X^i\right)\left(\prod_{j=1}^{n+1} \frac{X}{[r_j]_F(X)}\right)$$

の X^n の係数に等しい。但し、f は $\mathbb{Z}_m$－主バンドルの分類写像で、ι は自然な包含写像、また $[r_j]_F$ はコボルディズム形式群 $F(X,Y)$ による形式的 r_j 倍を表わす。

補題2.5.

$$t^{(1)}: \Omega_*^U(Q_{2k}) \longrightarrow \Omega_*^U(Z_{4k})$$

$$t^{(2)}: \Omega_*^U(Q_{2k}) \longrightarrow \Omega_*^U(Z_4)$$

を transfer 準同型とすると、以下が成り立つ。

(1) $t^{(1)} \circ i_*^{(1)} [S^{2n-1}, T_{(4k,1)}] = [S^{2k-1}, T_{(4k,1)}] + [S^{2n-1}, T_{(4k,-1)}]$

但し $(S^{2n-1}, T_{(4k,-1)})$ は $(S^{2n-1}, T_{(4k,1)})$ と共役な線型作用を表わす。

(2) $t^{(2)} \circ i_*^{(2)} [S^{2n-1}, T_{(4,1)}] = [S^{2n-1}, T_{(4,1)}] + [S^{2n-1}, T_{(4,1)}]$

$$+ (k-1)\, i_*^{2,4} [S^{2n-1}, T_{(2,1)}]$$

但し、$i_*^{2,4}: \Omega_*^U(Z_2) \longrightarrow \Omega_*^U(Z_4)$ は、$Z_2 \subset Z_4$ から引きおこされる自然な準同型。

(3) $t^{(2)} \circ i_*^{(1)} [S^{2n-1}, T_{(4k,1)}] = i_*^{2,4} [S^{2n-1}, T_{(2,1)}]$

(4) $t^{(1)} \circ i_*^{(2)} [S^{2n-1}, T_{(4,1)}] = i_*^{2,4k} [S^{2n-1}, T_{(2,1)}]$

(5) $t^{(1)} [S^{4i+3}, \chi] = [S^{4i+3}, (T \oplus \bar{T})_{(4k)}]$

但し、$[S^{4i+3}, (T \oplus \bar{T})_{(4k)}]$ は、命題1.1の同型で、$[L^{2i+1}(4k; 1, -1, 1, -1, \cdots, 1, -1), f]$ に対応するクラスを表わす。

(6) $t^{(2)} [S^{4i+3}, \chi] = [S^{4i+3}, (T \oplus \bar{T})_{(4)}]$

補題2.6.

$$i_*^{2,2^m} [S^{2n-1}, T_{(2,1)}] = 2^{m-1} [S^{2n-1}, T_{(2^m,1)}] + 2^{m-1} [CP_1][S^{2n-3}, T_{(2^m,1)}]$$

$+2^{m-1}[CP_1]^2[S^{2n-5}, T(2^m,1)] + 2^{m-1}(\delta_1[X_3]+\delta_2[CP_2][CP_1]+\delta_3[CP_1]^3)\cdot$
$[S^{2n-7}, T(2^m,1)] + \cdots\cdots$

但し、$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ はそれぞれ 0 または 1 であり、$[X_3] = -[H_{2,2}]-[CP_3]$ は Ω_*^U の 6 次元の polynomial generator を表わす。

命題1.3(4)より、$2k = 2^{m-1}$ $(m \geqq 2)$ の場合が重要なので、以下は簡単のために $Q_{2^{m-1}}$ について話を進める。$\Omega_*^U(Z_j)$ について知られている結果と、補題2.4, 2.5, 2.6 を合わせると、系2.3 の生成元に対して次の結果を得る。

命題2.7

$\Omega_*^U(Q_{2^{m-1}})$ $(m \geqq 2)$ において、

(1) $\operatorname{order} i_*^{(1)}[S^{2n-1}, T(2^m,1)] = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ 2^{n-2+m} & (n \geqq 2) \end{cases}$

(2) $\operatorname{order} i_*^{(2)}[S^{2n-1}, T(4,1)] = 2^n$ $(n \geqq 1)$

(3) $\operatorname{order}[S^{4n-1}, \chi] = 2^{2n+m-1}$ $(n \geqq 1)$

(注) 広大(理)の勝部豊氏も同様の結果を出している。

系2.8.

可換群として、$\widetilde{\Omega}_{2n}^U(Q_{2^{m-1}}) \cong 0$,

$\widetilde{\Omega}_{4n-1}^U(Q_{2^{m-1}}) \cong Z_{2^{2n+m-1}} \oplus (\oplus_i Z_{2^{\mu_i}})$

$(\mu_i \leq 2n+m-2)$

$$\widetilde{\Omega}^U_{4n-3}(Q_{2^{m-1}}) \cong (1+\delta_{m,2})\mathbb{Z}_{2^{2n+m-3}} \oplus \left(\bigoplus_j \mathbb{Z}_{2^{\nu_j}}\right)$$

$(\nu_j \leq 2n+m-4)$

§3. $\Omega^U_*(Q_{2^{m-1}})$ の Ω^U_*−加群としての構造

定義 3.1. ρ : $\mathbb{Z}_k$ の標準的複素1次表現
$\bar{\rho}$: ρ の共役表現とするとき

$$(S^{2n-1}, (T\oplus\bar{T})_{(k)}) \overset{def}{\equiv} \begin{cases} (n=2n' \text{のとき}) & n'(\rho\oplus\bar{\rho}) \text{から定義される } S^{2n-1} \text{上の } \mathbb{Z}_k\text{−作用} \\ (n=2n'+1) & \bar{\rho}\oplus n'(\rho\oplus\bar{\rho}) \text{から定義される } S^{2n-1} \text{上の } \mathbb{Z}_k\text{−作用} \end{cases}$$

補題 3.2.

$$\Delta \circ i^{(1)}_*[S^{2n-1}, (T\oplus\bar{T})_{(2^m)}] = i^{(1)}_*[S^{2n-5}, (T\oplus\bar{T})_{(2^m)}]$$
$$\Delta \circ i^{(2)}_*[S^{2n-1}, (T\oplus\bar{T})_{(4)}] = i^{(2)}_*[S^{2n-5}, (T\oplus\bar{T})_{(4)}]$$

ここで、命題2.4を用いれば、系2.3の生成元 $i^{(1)}_*[S^{4i+1}, T_{(2^m,1)}]$, $i^{(2)}_*[S^{4i+1}, T_{(4,1)}]$ を $i^{(1)}_*[S^{4i+1}, (T\oplus\bar{T})_{(2^m)}]$, $i^{(2)}_*[S^{4i+1}, (T\oplus\bar{T})_{(4)}]$ で置き換えてよく、この新しい生成元に対して補題2.5と類似の transfer に関する補題を用いて計算すると、次の様な結果が得られる。

命題 3.3.

$1\leqq n\leqq\infty$ とするとき、equivariant 自由ボルディズム加群 $\tilde{\Omega}^U_*(S^{4n-1},\chi)\cong\tilde{\Omega}^U_*(S^{4n-1}/\chi)$ は Ω^U_*-加群として、$\{[S^{4i-1},\chi],$ $i^{(1)}_*[S^{4i-3},(T\oplus\bar{T})_{(2^m)}],\ i^{(2)}_*[S^{4i-3},(T\oplus\bar{T})_{(4)}]\ ;\ n\geqq i\geqq 1\}$ で生成される自由 Ω^U_*-加群を、下に定義する $\{\Phi_i\ ;\ n-1\geqq i\geqq 1,$ $\psi^{(1)}_i,\ \psi^{(2)}_i\ ;\ n\geqq i\geqq 1\}$ で生成される Ω^U_*—部分加群で割った商加群である。但し、

$$\Phi_i=2^{m+1}[S^{4i-1},\chi]+2^{m-1}[CP_1]^2[S^{4i-5},\chi]+(2^{m-2}[CP_3][CP_1]+2^m[N])[S^{4i-9},\chi]+\cdots\qquad([N]\in\Omega^U_8)$$

$$\psi^{(1)}_i=2i^{(1)}_*[S^{4i-3},(T\oplus\bar{T})_{(2^m)}]-2[CP_1][S^{4i-5},\chi]+[CP_1]^2 i^{(1)}_*[S^{4i-7},(T\oplus\bar{T})_{(2^m)}]+([CP_3]-2[CP_2][CP_1])[S^{4i-9},\chi]+\cdots$$

$$\psi^{(2)}_i=2i^{(2)}_*[S^{4i-3},(T\oplus\bar{T})_{(4)}]+(2^{m-1}+2^m)[CP_1][S^{4i-5},\chi]+[CP_1]^2 i^{(2)}_*[S^{4i-7},(T\oplus\bar{T})_{(4)}]+(2^{m-2}[CP_3]-(2^{m+1}-2^{m-1})[CP_2][CP_1]+2^{m-1}[CP_1]^3)\cdot[S^{4i-9},\chi]+\cdots\cdots$$

そして、Φ_i の右辺には $i^{(1)}_*[S^{4j-3},(T\oplus\bar{T})_{(2^m)}]$ の type の生成元に関する項は現れない。また $\psi^{(1)}_i$ の右辺には $i^{(2)}_*[S^{4j-3},(T\oplus\bar{T})_{(4)}]$ の type の生成元に関する項は現れず、他の type に関する項の係数は m に無関係。さらに $\psi^{(2)}_i$ の右辺には $i^{(1)}_*[S^{4j-3},(T\oplus\bar{T})_{(2^m)}]$ の type の生成元は現れない。

各 i について $\Omega^U_i(Q_{2^{m+1}})$ の群構造を完全に決定するには、Φ_i、$\psi^{(1)}_i$、$\psi^{(2)}_i$ の右辺の係数についてもっと調べる事が必要。