数理解析研究所講究録
第 271 巻 1976 年 28-33

空間 $Map(CP^m, CP^n)$ のホモトピー

東工大　理学部　笹尾靖也

$map(CP^m, CP^n)$, $0 \leq m \leq n$, を m 次元複素射影空間から n 次元複素射影空間への連続写像の集合とし、コンパクト一開位相を与えた空間としよう。$map(CP^m, CP^n)$ は $0<m$ のときに無数の path 一連結成分をもつが、$Map(CP^m, CP^n)$ で包含写像：$CP^m \to CP^n$ の path 一連結成分をあらわそう。他方、$U(n+1)$ を次数 $n+1$ のユニタリー群とし、Δ_{m+1} を $z \cdot I_{m+1}$, $|z|=1$ の形のユニタリー群の部分群とする。ここで I_{m+1} は $U(m+1)$ の単位行列とする。

$U(n+1)$ の通常の CP^n への作用を考えれば次の写像が自然に得られる：

$$S_m : U(n+1)/\Delta_{m+1} \times U(n-m) \longrightarrow Map(CP^m, CP^n).$$

たとえば $m=n$ ならば左辺は射影群である。我々の目標は S_m の誘導準同型

$$S_{m*} : \pi_i(U(n+1)/\Delta_{m+1} \times U(n-m)) \to \pi_i(Map(CP^m, CP^n))$$

を調べることである。 このとき次の定理を得る。

定理　Qを有理数体とする。

a) $\rho'_{m*} \otimes 1 : \pi_i(U(n+1)/\Delta_{m+1} \times U(n-m)) \otimes Q$
$$\longrightarrow \pi_i(Map(CP^m, CP^n)) \otimes Q$$
はすべてのiで同型写像である。

b) ρ_{m*}は$i < 4n-4m+1$で同型写像であり、$i = 4n-4m+1$で上への準同型写像である。

c) $\rho_{n*} : \pi_i(U(n+1)/\Delta_{n+1}) \longrightarrow \pi_i(Map(CP^n, CP^n))$
は$i < 2n+2$で単射準同型写像である。

d) $\pi_1(Map(CP^n, CP^n)) \cong Z_{(n+1)}$
$\pi_2(Map(CP^n, CP^n)) \cong Z_{(2)}$　　$(n \geqq 1)$
ここで$Z_{(k)}$は位数kの巡回群とする。

証明はnを固定して、mについての帰納法で行なわれる。
$m=0$ ならば$\rho_m = \rho_0$はhomeomorphismだからa)、b)は明らかである。
次にフィブレイション

$$F_m \longrightarrow Map(CP^m, CP^n) \xrightarrow{j_m} Map(CP^{m-1}, CP^n)$$

を考えよう。このとき次の可換図式は明らかであろう。

$$\begin{tikzcd}
S^{2n-2m+1} = \dfrac{\Delta_m \times U(n-m+1)}{\Delta_{m+1} \times U(n-m)} \arrow[r, "S'_m"'] \arrow[d] & F_m \arrow[d] \\
U(m+1)/\Delta_{m+1} \times U(n-m) \arrow[r, "S_m"'] \arrow[d] & Map(CP^m, CP^n) \arrow[d, "j_m"] \\
U(m+1)/\Delta_m \times U(n-m+1) \arrow[r, "S_{m-1}"'] & Map(CP^{m-1}, CP^n)
\end{tikzcd} \qquad (A)$$

更に F_m は

$$F_m = \{ f : CP^m \to CP^n,\ f|CP^{m-1} = \text{包含写像} \}$$

と考えられるから，$CP^m = CP^{m-1} \cup e^{2m}$ より

$$\Omega^{2m}(CP^n) \simeq F_m \quad (\text{up to homotopy})$$

となり，

(☆) $\pi_i(F_m) \simeq \pi_i(\Omega^{2m}(CP^n)) \simeq \pi_i(\Omega^{2m} S^{2n+1})$

が得られる。更に基本的事項として次の(☆☆)が得られる。

(☆☆) $S'_{m*} ; \pi_i(S^{2n-2m+1}) \to \pi_i(F_m)$ は $i = 2n-2m+1$ で同型写像である。

(☆☆)を認めれば次のようにして帰納法が完成する。

$\pi_i(F_m)$ は $i = 2n-2m+1$ を除いて torsion だから $S'_{m*} \otimes 1$ は同型写像となり，図式(A)の five lemma から a)が

得られる。 $s'_m : S^{2n-2m+1} \to F_m$ は

$s' : S^{2n-2m+1} \to \Omega^{2m} S^{2n+1}$ と考えれば懸垂同型定理により，

$$s'_* : \pi_i(S^{2n-2m+1}) \to \pi_i(\Omega^{2m} S^{2n+1})$$

は $i < 4n-4m+1$ で同型，$i = 4n-4m+1$ で全射になることがわかる。つまり

$$s'_{m*} : \pi_i(S^{2n-2m+1}) \to \pi_i(F_m)$$

は $i < 4n-4m+1$ で同型，$i = 4n-4m+1$ で全射となるから，再び five lemma で b) が得られる。 a) で $m = n$ として，

$$\pi_i(U(n+1)/\Delta_{n+1}) = 0 \qquad i = \text{偶数},\ 1 < i < 2n+2$$
$$= Z \qquad i = \text{奇数},\ 1 < i < 2n+2$$

を考えれば c) が得られる。 d) については ホモトピー群の完全系列を使って計算すればよい。

結局，我々にとっては，(☆☆) を示せばよいことになる。さて，ここで2つの写像

$$s, t : S^{2n-2m+1} \times CP^m \to CP^n$$

を次のように定める。

$\underline{Z} = (z_0, \cdots, z_{n-m}) \in S^{2n-2m+1}$

$\underline{W} = [w_0, \cdots, w_m] \in CP^m$

として，

$$s(\underline{z}, \underline{w}) = [w_0, w_1, \dots, w_{m-1}, w_m z_0, \dots, w_m z_{n-m}]$$
$$t(\underline{z}, \underline{w}) = [w_0, w_1, \dots, w_m, 0, \dots, 0]$$

s と t は $S^{2n-2m+1} \times CP^{m-1} \cup s_0 \times CP^m$ の上で一致するから，元 $d(t, s) \in \pi_{2n+1}(CP^n)$ を定める。定義から $d(t, s)$ が生成元になることを示せばよいことがわかる。このためには次のリフトが可能であればよい。

(B)
$$\begin{tikzcd} & S^{2n+1} \arrow[d] \\ S^{2n+1} \arrow[ur, dashed, "\deg 1"] \arrow[r, "d(t,s)"'] & CP^n \end{tikzcd}$$

さて，
$$\overline{w} = (w_0, \dots, w_{m-1}) \in S^{2m-1}$$
$$\overline{z} = (z_0, \dots, z_{n-m}) \in S^{2n-2m+1}$$
とすれば $S^{2n+1} = S^{2m-1} * S^{2n-2m+1}$
$$= \{((\cos\theta)\overline{z}, (\sin\theta)\overline{w})\}$$
として，$S^{2n-2m+1} \times E^{2m} = \{((\cos\theta)\overline{z}, (\sin\theta)\overline{w}),\ 0 \leqq \theta \leqq \pi/4\}$ が S^{2n+1} に埋めこまれているとしてよい。

$$\alpha ; (E^{2m}, S^{2m-1}) \longrightarrow (CP^m, CP^{m-1})$$
を $\alpha(\sin\theta \cdot \overline{w}) = (\sin 2\theta \cdot \overline{w}, \cos 2\theta)$, $0 \leqq \theta \leqq \pi/4$, で定めれば
$$d(t, s) = d(t \circ 1 \times \alpha, s \circ 1 \times \alpha)$$

が得られる。

ここで再び2つの写像

$$\tau, \sigma : S^{2n+1} \longrightarrow CP^n$$

を次のように定める。

$$\tau(\cos\theta\cdot\overline{Z}, \sin\theta\cdot\overline{W}) = [\sin 2\theta\cdot\overline{W}, \cos 2\theta(1,0,\cdots 0)]$$

$$\sigma(\cos\theta\cdot\overline{Z}, \sin\theta\cdot\overline{W}) = [\sin 2\theta\cdot\overline{W} \quad \cos 2\theta\cdot\overline{Z}]$$

$$(0 \leqq \theta \leqq \pi/4)$$

$$\tau(\cos\theta\cdot\overline{Z}, \sin\theta\cdot\overline{W}) = \sigma(\cos\theta\cdot\overline{Z}, \sin\theta\cdot\overline{W})$$

$$= [\overline{W}, 0] \qquad (\pi/4 \leqq \theta \leqq \pi/2)\ 。$$

このとき次の推測が証明される。

(1) $d(\tau, \sigma) = \tau - \sigma$

(2) $\tau = 0$,

(3) $d(t\circ 1\times x, s\circ 1\times x) = d(\tau, \sigma)$

したがって結局

$$d(\sigma, \tau) = \sigma = d(t, s)$$

が得られる。

ところで $\sigma' : S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$ を

$$\sigma'(\cos\theta\cdot\overline{Z}, \sin\theta\cdot\overline{W}) = (\sin\varphi\cdot\overline{W}, \cos\varphi\cdot\overline{Z})$$

ただし $\varphi = 2\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi/4)$

$$= \pi/2 \quad (\pi/4 \leqq \theta \leqq \pi/2)$$

と定めれば σ' が (B) のリフトを与えることがわかる。