数理解析研究所講究録
第271巻1976年61-67

Landweber - Novikov 作用素について

九大 理　菅原 民生

MU を complex cobordism spectrum, とする. ω を整数 n の分割, $s_\omega : MU^k(X) \longrightarrow MU^{k+2n}(X)$ を ω に対する Landweber Novikov 作用素とする. ここでは次の二つの場合について考察する: (i) $X = pt$ の場合. $MU^*(pt) \cong \pi_*(MU)$ で, これは formal group law $F(X, Y) = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j$ の係数 a_{ij} で生成されている. そこで $s_\omega(a_{ij})$ を求めるのが第一の目的である. (この部分は鎌田正良氏(九大)との共同研究). (ii) 次の目的は $X = HP^n$ (n次元四元数体射影空間) について

$$MU^*(HP^n) = \pi_*(MU)[y]/(y^{n+1})$$

となるので $s_\omega(y)$ を求めることである。どちらも詳しい証明を省いたので, 末尾の二論文を参照されたい.

§1　$\omega = (k_1, k_2, \cdots, k_r)$ を整数 n の分割, r_j を $k_s = j$ となる ω の成分の数, $R = (r_1, r_2, \cdots)$ とする. $s_\omega = s^R$ をこれらに対す

る Landweber-Novikov 作用素とする。

命題 1.1 (Landweber) ξ を X 上の canoplex line bundle, $c_1(\xi)$ をその first Chern class とする. このとき

$$S_\omega(c_1(\xi)) = \begin{cases} c_1(\xi)^{k+1} & \omega=(k) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

CP^n 上の canonical line bundle を η_c とすると $MU^2(CP^n \times CP^n)$ において formal group law は

$$c_1(\eta_c \hat{\otimes} \eta_c) = F(X, Y) = \sum a_{ij} X^i Y^j$$

$$\text{ここに } X = c_1(\eta_c) \times 1, \quad Y = 1 \times c_1(\eta_c)$$

で特徴づけられる. これに命題 1.1 を適用すると

$$\sum_{R_1+R_2+R_3=R} S^{R_1}(a_{ij})\, S^{R_2}(X^i)\, S^{R_3}(Y^j) = \begin{cases} \left(\sum a_{ij} X^i Y^j\right)^{k+1}, & R=(0,\cdots 0\,1) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$R=(r_1, r_2, \cdots)$ について $|R| = \sum r_i$, $\|R\| = \sum i r_i$ とし, $Q = (q_{10}\ q_{01}\ q_{11}\ q_{21}\ q_{12} \cdots)$ について $|Q| = \sum q_{ij}$ $\|Q| = \sum i q_{ij}$, $|Q\| = \sum j q_{ij}$ とすると次の定理をうる:

定理 1.2

(i) 正の整数 p, q, k について

$$S_{(k)}(a_{pq}) + (p-k)\, a_{p-k,q} + (q-k)\, a_{p,q-k} = \sum_Q \binom{k+1}{Q} a^Q$$

ここに $\sum_Q$ は $|Q|=k+1$, $\|Q|=p$, $|Q\|=q$ を動くものとする.

(ii) 正の整数 p, q と $R \neq (0,\cdots,0\,1)$ について,

$$\sum_{R_1+R_2+R_3=R} \binom{i}{R_1}\binom{j}{R_2} S^{R_3}(a_{ij}) = 0, \qquad i=p-\|R_1\|,\ j=q-\|R_2\|.$$

これから次の系をうる:

系 1.3　(i) $S_{(k)}(a_{p,1}) = (2k+1-p)\,a_{p-k,1}$

(ii) $S_{(p+q-1)}(a_{p,q}) = \binom{p+q}{p}$

系 1.4　$$\sum_{r_1+r_2+r_3=r} \binom{i}{r_1}\binom{j}{r_2} S^{(r_3)}(a_{p,q}) = 0, \qquad i=p-r_1,\ j=q-r_2$$

系 1.5　$$\sum_{i=0}^{n} \binom{p-i}{i} S^{(n-i)}(a_{p-i,1}) = 0$$

§2　$H_{m,n}$ を $CP^m \times CP^n$ の $c_1^H(\eta_c \hat{\otimes} \eta_c) = c_1^H(\eta_c)\times 1 + 1\times c_1^H(\eta_c)$ に関する dual sub-manifold とする. この§では $S_\omega[H_{m,n}]$ の求め方を簡単に述べる. $\pi_*(MU)$ の元について, $P_m=[CP^m]$, $A_n = a_{n,1}$ と書くことにする.

命題 2.1

$$[H_{m,n}] = \sum_R \left\{ \sum_{R_1+R_2=R} (-1)^{k_1+k_2} \binom{k_1}{R_1}\binom{k_2}{R_2} a_{ij} \right\} A^R$$

ここに $A^R = A_1^{r_1} A_2^{r_2}\cdots$, $i=m-\|R_1\|$, $j=n-\|R_2\|$, $k_1=|R_1|$, $k_2=|R_2|$.

これは式 $(\sum_n P_n X^n)(\sum_i A_i X^i)=1$ と $[H_{m,n}]=\sum_{i,j} a_{ij} P_{m-i} P_{n-j}$ を組み合わせることにより得られる．命題2.1に定理1.2を適用すると $S_\omega[H_{m,n}]$ はすべて原理的には求められることになる。

§3　CP^n と HP^n の cobordism ring は次のとうり．

$$MU^*(CP^n)=\pi_*(MU)[x]/(x^{n+1})$$
$$MU^*(HP^n)=\pi_*(MU)[y]/(y^{n+1}).$$

fiber を $Sp(1)/U(1)\cong S^2$ とする fibre bundle $\xi: CP^{2n+1}\to HP^n$ について Atiyah-Hirzebruch の spectral seq. の議論から $\xi^*: MU^*(HP^n)\longrightarrow MU^*(CP^{2n+1})$ は単射である．

ところで $MU^*(CP^{2n+1})$ の元 $x=c_1(\eta_c)$ に対する S_ω の作用は命題1.1によってわかっているので $\xi^*(y)$ がわかれば $S_\omega(y)$ がわかることになる。　$\eta_c: C^{4n+3}\to CP^{2n+1}$, $\eta_H: S^{4n+3}\to HP^n$ をそれぞれ $U(1)$, $Sp(1)$ canonical line bundles とするとき，次の $U(2)$ bundle map が存在する：

$$\begin{array}{ccc} \eta_c\oplus\overline{\eta}_c & \longrightarrow & C\eta_H \\ \downarrow & & \downarrow \\ CP^{2n+1} & \xrightarrow{\xi} & HP^n \end{array}$$

$y=p_1(\eta_H)=-c_2(C\eta_H)$ とすると．$\xi^*(y)=-\xi^*(c_2(C\eta_H))$ $=-c_2(\xi^! C\eta_H)=-c_2(\eta_c\oplus\overline{\eta}_c)=-c_1(\eta_c)\,c_1(\overline{\eta}_c)$.

よって $x = c_1(\eta_c)$, $\bar{x} = c_1(\bar{\eta}_c)$ とすると

補題 3.1 上記の Notation で $\xi^*(y) = -x\bar{x}$.

そこで $\bar{x} = \sum \lambda_j x^{j+1}$ とおいて $\eta_c \hat{\otimes} \bar{\eta}_c = 1$, すなわち

$$F(x, \bar{x}) = c_1(\eta_c \hat{\otimes} \bar{\eta}_c) = 0$$

を利用すると λ_j は次の漸化式によって求まる

補題 3.2 各整数 r について

$$\sum_{i,j,R} a_{ij} \binom{j}{R} \lambda^R = 0, \quad i+j+\|R\| = r.$$

そこで $S_\omega(y) = \sum_i d_{\omega,i}\, y^i$ とおいて $d_{\omega,i} \in \pi_*(MU)$ を求めると次の定理をうる.

定理 3.3

(i) $\omega = (k_1, k_2, \cdots, k_r)$, $r \geqq 3$ ならば各 i について $d_{\omega,i} = 0$

(ii)
$$d_{(k_1,k_2),i} = \begin{cases} (-1)^{k_1} d_{(k_2-k_1),\, i-k_1} & i > k_1 \\ 0 & i \leqq k_1 \end{cases}$$

(iii)
$$d_{(k,k),i+1} = \begin{cases} (-1)^k & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

(iv) $d_{(k),i}$ は次の漸化式を満す:

$$\sum_i (-1)^i d_{(k),i+1} \sum_{\|R\|=r-2i} \binom{i}{R} \lambda^R = \begin{cases} 0 & r < k \\ 1 + (-1)^k & r = k \\ \sum_{\|R_1\|=r-k} \binom{k}{R_1} \lambda^{R_1} & r > k \end{cases}$$

以上で S_ω の $MU^*(HP^n)$ における作用は原理的に計算可能となった。

§4　$\pi_7(S^4) \ni \{f\}$, $X = S^4 \cup_f e^8$ を考える。cofibration $S^4 \to X \to S^8$ から exact sequence

$$0 \to MU^*(S^8) \to MU^*(X) \to MU^*(S^4) \to 0$$

が得られる。$MU^*(X)$ の二つの生成元を e_4, e_8 とし, $A = 2S_{(2)} + 3S_{(1,1)}$ を考える。$A(e_4) = \lambda e_8$ $(\lambda \in \pi_0(MU) \cong \mathbb{Z})$ とすると $\lambda \bmod 12$ は生成元 e_4 のとり方に依らない。実際 e_4 を $e_4' = e_4 + (Ma_{21} + Na_{11}^2)e_8$ ととりかえると定理1.2より

$$S_{(2)}(a_{21}) = 3 \qquad S_{(1,1)}(a_{21}) = -2$$
$$S_{(2)}(a_{11}^2) = 0 \qquad S_{(1,1)}(a_{11}^2) = 4$$

だから $A(e_4') = (\lambda + 12N)e_8$ をうる。

そこで $\alpha : \pi_7(S^4) \to \mathbb{Z}_{12}$ を $\alpha\{f\} = \lambda \bmod 12$ と定義すれば α は homomorphism になる。$X = CP^2$ の場合, 定理3.3によって $S_{(2)}(y) = 2y^2$, $S_{(1,1)}(y) = -y^2$ だから $A(y) = y^2$, すなわち $\alpha\{f\} = 1 \bmod 12$ となる。

文　献

M. Kamata - T. Sugawara ; A note on Landweber-Novikov operations on the complex cobordism ring U^*, Mem. of Fac. Sci. Kyushu univ. 28 (1974)　(予定)

T. Sugawara ; Landweber-Novikov operations on the cobordism ring of HP^n, ibid. (予定)