

バラツキ・裾の半順序と単調検定

日本アイ・ビー・エム

渋谷 政昭

統計数理研究所

柳本 武美

要約 \mathbb{R} 上の連続な分布関数の族 \mathcal{F} にばらつき (広がり) に関するやや強い半順序を導入し, 分布の位置母数にばよらたし, 1 標本片側検定問題にたいする単調検定 (isotonic tests) の族を与える。この議論は, \mathbb{R}_+ 上の連続な分布関数の族 \mathcal{F}_+ における裾の長短問題の議論と完全に平行している。

単調検定の性質をさらに調べるために, \mathbb{R}^n におけるばらつき \mathcal{F} の半順序を 3 種類導入して, これらの強弱関係を調べる。またこれらの半順序に関して単調な関数について調べる。この議論も, \mathbb{R}_+^n における裾の半順序の議論と大體平行して進めることができる。

裾の単調検定に関する結果は, 信頼性理論においてこれまで得られていた諸結果を統一し一般化している。また, ばらつき \mathcal{F} の半順序に関して単調な関数の議論は, Schur 凸関数の一般化である。

§1. \mathcal{F} におけるばらつき、順序と単調検定

定義 1.1 $F, G \in \mathcal{F}$ において G が F よりもばらつきが大きい (more spread) ことを、一般逆関数を用いて;

$$G \succ F (\mathcal{F}) \iff G^{-1}(u) - F^{-1}(u) \text{ が } 0 < u < 1 \text{ の非減少関数}$$

この定義より、 X, Y を分布関数 $F(\cdot), G(\cdot)$ をもつ確率変数とすると、直ちに次の定理が得られる。

定理 1.1 $G \succ F (\mathcal{F})$ の必要十分条件: $Y \sim X + h(X)$ なる非減少関数 $h(\cdot)$ が存在; $X \sim Y + k(Y)$ なる非増加関数 $k(\cdot)$ が存在。

定義より、ばらつきに関する 1 標本片側検定問題を次のように定式化することができる: F からの確率標本 X_1, \dots, X_n が与えられるとし、

$$H_0: F(x) = G(x-a), \quad G \in \mathcal{F} \text{ は既知, } -\infty < a < \infty \text{ は未知.}$$

$$H_1: G \succ F (\mathcal{F}) \quad (\text{Less Spread Problem のとき.})$$

$$H_2: F \succ G (\mathcal{F}) \quad (\text{More Spread Problem のとき.})$$

問題が位置の変換に関して不変であるから、検定統計量として最大不変統計量を用い、さらに順序統計量に制限して $V(X) = (X_{(1)} - \bar{X}, \dots, X_{(n)} - \bar{X})$ を用いることにする。 $V(\cdot)$ の値は、 $\Gamma_0^n = \{x; x_1 \leq \dots \leq x_n, \sum x_i = 0\} \subset \Gamma^n = \{x; \sum x_i = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ なる凸錐の点である。

上の検定問題にたいして不偏検定 (実は単調検定) の族

加次の定理により得られる。証明は定理1.1より容易である。

定理 1.2 検定関数 $\phi(V(X))$ が条件: $\phi(a+b) \geq \phi(a)$,
 $\forall a, b \in T_0^n$; を満たすならば "More Spread Problem" にたいして不偏である。このとき $1 - \phi(V(X))$ は "Less Spread Problem" にたいして不偏である。

もちろん検定関数の代わりに検定統計量と言ってもよい。
 検定の水準は当然 G に依存するが、統計量は依存しない。

§ 2. \mathcal{F}_+ における裾の半順序と単調検定

定義 2.1 $F, G \in \mathcal{F}_+$ において G が F よりも裾が長い (longer tail) ことを、次のように定義、標記する;

$$G \succ F (\mathcal{J}) \iff G^{-1}(u)/F^{-1}(u) \text{ が } 0 < u < 1 \text{ の非減少関数.}$$

定理 2.1 $G \succ F (\mathcal{J})$ の必要十分条件: $Y \sim X \cdot h(X)$ なる非減少関数 $h(\cdot)$ が存在; $X \sim Y \cdot k(Y)$ なる非増加関数 $k(\cdot)$ が存在。

F からの確率標本 X_1, \dots, X_n が与えられたとき,

$$H_{+0}: F(x) = G(cx), \quad G \in \mathcal{F}_+ \text{ は既知, } 0 < c < \infty \text{ は未知.}$$

$$H_{+1}: G \succ F (\mathcal{J}) \quad (\text{Longer Tail Problem のとき.})$$

$$H_{+2}: F \succ G (\mathcal{J}) \quad (\text{Shorter Tail Problem のとき.})$$

統計量 $\underline{W}(X) = (X_{(1)}/\sum X_i, \dots, X_{(n)}/\sum X_i) \in \Delta_0^n = \{x; 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n, \sum x_i = 1\} \subset \Delta^n = \{x; \sum x_i = 1\} \subset \mathbb{R}_+^n$.

定理 2.2 検定関数 $\phi(W(X))$ が条件: $\phi(a \cdot b / \|a \cdot b\|) \geq \phi(a)$, $\forall a, b \in \Delta_0^n$ (ただし $a \cdot b$ は成分ごとの積, $\|\cdot\|$ は l_1 ノルム); を満たすならば "Longer Tail Problem" にたいして不偏である. このとき $1 - \phi(W(X))$ は "Shorter Tail Problem" にたいして不偏である.

§1 と §2 の議論の平行性は次の定理により, より明らかとなる. 確率変数の順序は, 分布関数の順序と同一視する.

定理 2.3 $Y \succ X (F)$ $\iff e^Y \succ e^X (G)$.

§3. $\mathbb{R}^n, \Gamma^n, \Gamma_0^n$ におけるはらつき半順序

定義 3.1 Γ_0^n におけるはらつき半順序 3 種類 $b \succ a (f_i)$ または $a_{(i)} - \bar{a}, b_{(i)} - \bar{b}$ を次のように定義する. a_i, b_i を「順序統計量」 $a_{(i)}, b_{(i)}$ に変えれば, Γ^n, \mathbb{R}^n における擬順序である. $a = (a_1, \dots, a_n)'$.

f_3 $b_i - a_i$ が i の非減少関数.

f_2 $(n-i)^{-1} \sum_{k=i}^n b_k - b_i \geq (n-i)^{-1} \sum_{k=i}^n a_k - a_i$, $i=1, \dots, n-1$.

f_1 $\sum_{k=i}^n b_k \geq \sum_{k=i}^n a_k$, $i=2, \dots, n$.

説明. f_3 は, $a_{(i+1)} - a_i \leq b_{(i+1)} - b_i$, $i=1, \dots, n-1$ と同等である.

また $b \succ a (f_3) \iff b = a + c$, $a, b, c \in \Gamma_0^n$. したがって

定理 1.2 の条件は; $\phi(\cdot)$ が半順序 f_3 に関する非減少関数;

と同等である. f_2 は, $\sum_{k=i}^{i-1} b_k + (n-i+1)b_i \geq \sum_{k=i}^{i-1} a_k + (n-i+1)a_i$,

$i=1, \dots, n-1$ と同等である. この不等式の両辺の量は次の

より (2) 得られる。 $d_i = (n-i+1)(a_i - a_{i-1})$ とする。 a_i が順序統計量ならばこれは normalized spacing と呼ばれるもの、 $\sum_{i=1}^n d_j = \sum_{i=1}^{n-1} a_k + (n-i+1)a_i$ 、これは n の cumulative normalized spacings と呼ぶ。 $b \succ a (f_2)$ は b が a より小さい cumulative normalized spacings を持つことを示す。 f_1 は、 b が a を majorizes といふ言葉で呼ばれる。 f_1 の条件は $\sum_{i=1}^n b_k \leq \sum_{i=1}^n a_k$ と同等であり、尤も程度を示す。 次の Karamata の定理は有名である。 $b \succ a (f_1) \Leftrightarrow a = Pb$ とする 2重順序行列 P が存在する。

定理 3.1 $b \succ a (f_2)$ の諸条件は以下の $(n-1) \times n$ 行列 L_2 を用いて $L_2(b-a) \geq 0$ と表わす。 これは以下の $(n-1) \times n$ 行列 K_2 を用いて $b-a \in K_2 \mathbb{R}_+^{n-1}$ と同等である。 また Γ_0^n 上の微分可能な関数 (Γ^n 上の凸関数) $H(x)$ が f_2 に関して単調非減少である: $H(b) \geq H(a)$, $b \succ a (f_2)$; Γ 上の必要十分条件は $K_2 \text{grad} H \geq 0$ である。

$$L_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_3 = \begin{bmatrix} -(n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -(n-2) & -1 & 2 & \cdots & 2 \\ -(n-3) & -1 & -1 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} -(n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}, \quad K_2 = L_2$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_1 = L_3.$$

定理 3.2 $b \succ a (f_3) \Rightarrow b \succ a (f_2) \Rightarrow b \succ a (f_1)$ である。

逆に関数 $H(x)$ が、 f_1 に関して単調非減少 $\Rightarrow f_2$ に関して $\Rightarrow f_3$ に関して。したがって、2検定関数 $\phi(V(x))$ が、 f_1 に関しては f_2 に関して単調非減少であるならば More Spread Problem にたいして不偏であり、 $1 - \phi(V(x))$ は Less Spread Problem にたいして不偏である。

定理の条件を両検定の棄却域はどのような構造になるか。というのであるが、 $A = \{x; \phi(x) = 1\}$ は、 $a \in A$ ならば $\forall b \succ a (f_1)$ にたいして $b \in A$ 。逆に $B = \{x; \phi(x) = 0\}$ は、 $b \in B$ ならば $\forall a \prec b (f_1)$ にたいして $a \in B$ 、となる。このように集合 A, B はそれぞれ f_1 に関する遠心集合 (centrifugal set), 求心集合 (centripetal set) と呼ぶことができる。 T^n における f_1 求心集合は対称凸集合となる (対称とは座標の並び換えに関して不変) ことが証明できる。

§4. $\mathbb{R}_+^n, \Delta^n, \Delta_0^n$ における裾の半順序

定義 4.1 Δ_0^n における裾の半順序を3種類、 $b \succ a (f_i)$ と記し、次のように定義する。 a_i, b_i を昇順に並べた成分 $a_{(i)}, b_{(i)}$ に変えれば Δ^n における; さらには $a_{(i)}/\sum a_i, b_{(i)}/\sum b_i$ に変えれば \mathbb{R}_+^n における裾の擬半順序の定義となる。

\mathcal{F}_3 b_i/a_i が i の非減少関数.

\mathcal{F}_2 \mathcal{F}_2 と同じ. $\left[\begin{array}{l} a, b \in \Delta^n, \Delta_0^n \text{ でおよぼす } b-a \in \\ \Gamma^n, \Gamma_0^n \text{ であることに注意.} \end{array} \right]$

\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_1 と同じ.

注意 $b \succ a$ (\mathcal{F}_3) $\Leftrightarrow e^b \succ e^a$ ($\mathcal{F}_2, \mathbb{R}_+^n$) (ただし指数関数は成分ごとに指数関数値をとるものとする。)

説明 定義 \mathcal{F}_i をすべて注意のように \mathcal{F}_i に変換して定義することもできる。しかしこのように定義は Δ_0^n, Δ^n ではなく、積が一定という集合内での順序とする。 \mathbb{R}_+^n に關しては、成分の和ではなく、幾何平均で正規化することにする。このように定義よりも単純 Δ_0^n, Δ^n 内での順序の方が実用上便利のようである。 \mathcal{F}_3 は、 $a_{i+1}/a_i \leq b_{i+1}/b_i, i=1, \dots, n-1$ と同等、また $b \succ a$ (\mathcal{F}_3) $\Leftrightarrow b = a \cdot c / \|a \cdot c\|, a, b, c \in \Delta_0^n$ 。つまり定理 2.2 の条件は ; $\phi(\cdot)$ が \mathcal{F}_3 に關して単調非減少 ; と同等である。 \mathcal{F}_2 はともとも指数性、積定統計量として導入された概念である。

定理 4.1 $b \succ a$ (\mathcal{F}_3) は、 a に依存する $(n-1) \times n$ 行列 $L_3(a)$ を用いて $L_3(a)(b-a) \geq 0$ と表わせる。これは同様の行列 $K_3(a)$ により $b-a \in K_3(a)' \mathbb{R}_+^{n-1}$ と同等である。関数 $H(x)$ が \mathcal{F}_3 に關して単調非減少であるための必要十分条件は $K_3(x) \text{ grad } H(x) \geq 0, x \in \Delta_0^n$ である。($\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1$ に關する諸条件は $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1$ に關するものと同じである。)

$$L_3(\underline{a}) = \begin{bmatrix} -a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & -a_n & a_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$K_3(\underline{a}) = \begin{bmatrix} -a_1 & \frac{a_2 a_1}{\sum_2^n a_j} & \frac{a_3 a_1}{\sum_3^n a_j} & \dots & \frac{a_n a_1}{\sum_n^n a_j} \\ -a_1 & -a_2 & \frac{a_3(a_1+a_2)}{\sum_3^n a_j} & \dots & \frac{a_n(a_1+a_2)}{\sum_3^n a_j} \\ & \dots & & & \dots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & \frac{a_n \sum_1^{n-1} a_j}{a_n} \end{bmatrix}.$$

定理 4.2 $b \succ a (\mathcal{F}_3) \Rightarrow b \succ a (\mathcal{F}_2) \Rightarrow b \succ a (\mathcal{F}_1)$ である。関数 $H(x)$ が \mathcal{F}_1 に属して単調非減少 $\Rightarrow \mathcal{F}_2$ に属して $\Rightarrow \mathcal{F}_3$ に属して。したがって、検定関数 $\phi(W(X))$ が \mathcal{F}_1 ならば \mathcal{F}_2 に属して単調非減少である。Longer Tail Problem には、 ϕ は不偏であり、 $1 - \phi(W(X))$ が Shorter Tail Problem には、 ϕ は不偏である。

$L_3(\underline{1}) = L_3$, $\text{diag}(n-1, \dots, 1) K_3(\underline{1}) = K_3$ であり、 $\mathcal{F}_3 \Rightarrow \mathcal{F}_2$ の極限として $\mathcal{F}_3 \Rightarrow \mathcal{F}_2$ が導かれる。 $\mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_1$ と $\mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_1$ はもちろん同じことである。

以上