数理解析研究所講究録
第272巻 1976年 114-123



# 非線形計画法の最適層別問題への適用

千葉大学　理学部　　田栗　正章
日本ユニバック総研　榊原　修身

## 1. 序

最適層別問題を数理計画法を用いて解こうとする試みは、これまでにも多少検討されてきた。例えばNordbotten[7], Jaganathan[5], Bracken & McCormick[1]は、最適割当の問題に数理計画法を適用している。しかし最適層化点の決定問題に関してはこの手法を用いた結果はあまり報告されておらず、Sethi[9]が、iterativeな方法により幾つかの分布についてこれを求めているだけである。そこでここでは最適層化点(OSP)の決定問題を非線形計画法(NLP)の問題として定式化することを考えた。この定式化には多少の工夫が必要であるが、同種の考え方を用いることにより、統計学の問題をNLPによって解決できることも多いのではないかと考える。本報告はその1例である。さらに最も簡単な形の費用関数を導入し、費用一定という条件の下で推定量の分散が最小となるように標本数$n$と層の数$\ell$

を決定する問題についても検討した。ただし目的変数(1変数)自身による層別を考え、推定されるべき母集団パラメータは母集団平均値とする。また層別方法は区間層別のみに限定し、標本の各層への割当方法はネイマン割当(NA)，等割当(EA)，比例割当(PA)とする。

ここで得られた結果は次のようにまとめることができる。

(1) 具体的な6つの分布について、上記3つの割当方法の下で、$l=2\sim10$ に対するOSPおよび最小分散の値を与えた。

(2) 上記の条件の下で、層の数および割当方法の違いによる効率を与えた。

(3) NAとEAとはほとんど差がないことが実証された。

(4) 一定費用の下での最適な $n$ と $l$ との関係を与えた。

## 2. 平均値推定の場合のOSP決定問題

母集団の確率密度関数 $f(x)$，$(a<x<b)$ は与えられているとし、これを層化点 $x_h$ により $l$ 個の層に区間層別することを考える($x_h \leqq x_{h+1}$ ; $h=1,2,\cdots,l-1$)。このとき第 $h$ 層の重み $W_h$，平均 $\mu_h$，分散 $\sigma_h^2$ は、それぞれ次式によって与えられる。

$$W_h = \int_{x_{h-1}}^{x_h} f(t)dt \,, \tag{2.1}$$

$$\mu_h = \int_{x_{h-1}}^{x_h} t f(t)\, dt \Big/ W_h \,, \tag{2.2}$$

$$\sigma_h^2 = \int_{x_{h-1}}^{x_h} t^2 f(t)\, dt \Big/ W_h - \mu_h^2 \,. \tag{2.3}$$

いま$h$番目の層から$n_h$個の標本$(X_{h1},\cdots,X_{hi},\cdots,X_{hn_h})$を等確率で抽出するとすれば、母集団平均値の1つの不偏推定量$\bar{X}$およびその分散$V(\bar{X})$は次式によって与えられる。

$$\bar{X}=\sum_{h=1}^{l}W_h\sum_{i=1}^{n_h}X_{hi}/n_h, \tag{2.4}$$

$$V(\bar{X})=\sum_{h=1}^{l}W_h^2\sigma_h^2/n_h. \tag{2.5}$$

さらに各種の標本割当方法の下での分散は次のようになる。

NAの場合 $$V_{NA}(\bar{X})=\left(\sum_{h=1}^{l}W_h\sigma_h\right)^2/n, \tag{2.6}$$

EAの場合 $$V_{EA}(\bar{X})=l\sum_{h=1}^{l}W_h^2\sigma_h^2/n, \tag{2.7}$$

PAの場合 $$V_{PA}(\bar{X})=\sum_{h=1}^{l}W_h\sigma_h^2/n. \tag{2.8}$$

このとき、各割当方法の下でのOSPは次式を満足しなければならない。

NAの場合 $$\{\sigma_h^2+(x_h-\mu_h)^2\}/\sigma_h=\{\sigma_{h+1}^2+(x_h-\mu_{h+1})^2\}/\sigma_{h+1}, \tag{2.9}$$

EAの場合 $$W_h\{\sigma_h^2+(x_h-\mu_h)^2\}=W_{h+1}\{\sigma_{h+1}^2+(x_h-\mu_{h+1})^2\}, \tag{2.10}$$

PAの場合 $$x_h=(\mu_h+\mu_{h+1})/2. \tag{2.11}$$

## 3. OSP決定問題の非線形計画問題としての定式化

OSP決定問題は、次のような$l$個の制約条件をもつ非線形計画問題として定式化できる。

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{l-1})\longrightarrow \min, \tag{3.1}$$

$$\text{subject to}\quad \left.\begin{array}{ll} x_0\equiv a<x_1, & \\ x_h\leqq x_{h+1}, & \text{for } h=1,2,\cdots,l-2, \\ x_{l-1}<b\equiv x_l. & \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

ここで目的関数$\varphi$は各割当方法により次の形をとる。

NAの場合　$\varphi_{NA} = \left(\sum_{k=1}^{\ell} W_k \sigma_k\right)^2,$ (3.3)

EAの場合　$\varphi_{EA} = \ell \sum_{k=1}^{\ell} W_k^2 \sigma_k^2,$ (3.4)

PAの場合　$\varphi_{PA} = \sum_{k=1}^{\ell} W_k \sigma_k^2.$ (3.5)

(3.2)の制約条件のもとに、目的関数(3.3)～(3.5)の最小値を求めるという非線形計画問題に対し、NLPを適用し解を求めた。ここでNLPは、Penalty function法を使って一般の非線形計画問題を解くためのプログラム・パッケージである。この際、$W_k, \mu_k, \sigma_k^2$は次式を利用して、(2.1)～(2.3)によって計算する。

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} t^r f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x_k} t^r f(t)\,dt - \int_{-\infty}^{x_{k-1}} t^r f(t)\,dt, \quad (r=0,1,2). \tag{3.6}$$

Truncateされた分布についての計算方法は次のとおりである。一般に分布$f(x)$を$-\alpha<x<\beta$ $(\alpha,\beta>0)$でTruncateした分布を$f^*(x)$とすれば、

$$f^*(x) = p\cdot f(x), \quad p = 1\Big/\int_{-\alpha}^{\beta} f(t)\,dt \tag{3.7}$$

となるから、次の関係を用いれば(2.1)～(2.3)および(3.6)により$W_k, \mu_k, \sigma_k^2$が計算できる。

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} t^r f^*(t)\,dt = p\int_{x_{k-1}}^{x_k} t^r f(t)\,dt, \quad (r=0,1,2). \tag{3.8}$$

## 4. OSPと最小分散の決定

ここで取扱う分布は次の6つとする。

(1) 規準正規分布　: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$　; $-\infty<t<\infty$. (4.1)

(2) Truncateされた正規分布 : $f(t)=\frac{c_\alpha}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}},\ c_\alpha=1\Big/\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\alpha}^{\alpha}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\ ;\ -\alpha<t<\alpha.$ (4.2)

ただし、$\alpha=2.5,\ 3.0,\ 3.5,\ 4.0$ の各値に対して計算を行った。

(3) 指数分布 : $f(t)=e^{-t}$ ; $0<t<\infty.$ (4.3)

(4) Truncateされた指数分布 : $f(t)=c_\alpha e^{-t},\ c_\alpha=1\Big/\int_0^{\alpha}e^{-t}dt$ ; $0<t<\alpha.$ (4.4)

ただし、$\alpha=3,\ 4,\ 5,\ 6$ の各値に対して計算を行った。

(5) 両側三角分布 : $f(t)=1-|t|$ ; $-1<t<1.$ (4.5)

(6) 片側三角分布 : $f(t)=1-\frac{1}{2}t$ ; $0<t<2.$ (4.6)

次に層の数の増加による利得を次式で定義する。

(1) NAの場合 $e_{NA}=(\varphi_0-\varphi_{NA}^*)/\varphi_0,$ (4.7)

(2) EAの場合 $e_{EA}=(\varphi_0-\varphi_{EA}^*)/\varphi_0,$ (4.8)

(3) PAの場合 $e_{PA}=(\varphi_0-\varphi_{PA}^*)/\varphi_0.$ (4.9)

ただし$\varphi_0$は、$l=1$すなわちSimple random samplingの場合の目的関数の値を、また$\varphi^*$は各割当方法の下での最適値を表わす。

さらに、EA, PAのNAに対する効率を次式で定義する。

(1) EAの場合 $c_{EA}=(\varphi_{EA}^*-\varphi_{NA}^*)/\varphi_{NA}^*,$ (4.10)

(2) PAの場合 $c_{PA}=(\varphi_{PA}^*-\varphi_{NA}^*)/\varphi_{NA}^*.$ (4.11)

## 4.1. $W_h,\mu_h,\sigma_h^2$ の計算方法

正規分布以外の分布については、解析的に$W_h,\mu_h,\sigma_h^2$の値を求めることができるので、ここでは正規分布の場合についてこれらの値を求める方法を示す。

(i) $W_h$の求め方

Hastings[2]によって与えられた次の近似式を用いる。

$$W_k=\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt = F(x_k)-F(x_{k-1}),$$

ただし　$F(x_k)=f(x_k)\cdot\sum_{i=1}^{5} c_i y^i$,　　$y=1/(1+p\cdot|x_k|)$,

$p=0.23164\ 19$,　　$c_1=0.31938\ 1530$,

$c_2=-0.35656\ 3782$,　　$c_3=1.78147\ 937$,

$c_4=-1.82125\ 5978$,　　$c_5=1.33027\ 4429$.

[註1] これらの係数は、戸田・清水・竹内[11]によって計算された。

このとき、次式が成立する。

$$\left|\int_{-\infty}^{x_k} f(t)\,dt - F(x_k)\right| < 7.5\times 10^{-8}, \qquad \text{for } -\infty < x_k \leqq 0.$$

(ii) $\mu_k$ の求め方

この値は解析的に求めることができる。

$$\mu_k=\frac{1}{W_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k} t f(t)\,dt=\frac{1}{W_k\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{1}{2}x_{k-1}^2}-e^{-\frac{1}{2}x_k^2}\right).$$

(iii) $\sigma_k^2$ の求め方

$$\sigma_k^2=\frac{1}{W_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k} t^2 f(t)\,dt-\mu_k^2=\frac{1}{W_k\sqrt{\pi}}\left\{\Gamma\left(\frac{3}{2},\frac{|x_{k-1}|}{2}\right)-\Gamma\left(\frac{3}{2},\frac{|x_k|}{2}\right)\right\}-\mu_k^2.$$

ここで $\Gamma(\nu,x)$ は $\int_{-\infty}^{x} e^{-t}t^{\nu-1}dt$ で定義される不完全ガンマ関数である。この値は次の級数展開を用いて計算する。

$$\Gamma\left(\frac{3}{2},x\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\sqrt{x}\,(1-e^{-x})+\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!\,(n+\frac{3}{2})}.$$

[註2] この級数展開法は、Hitotsumatsu[4]または山内・森口・一松[12]によって与えられた。

[註3] $\sigma_k^2$ の求め方として、数値積分による方法や spline function を

用いる方法なども検討した。数値積分を用いる方法は計算時間が大となる。$\Gamma(\nu, x)$ を級数展開する方法では、精度は十分であるが多少時間がかかる。これに対して spline function を用いる方法によれば、精度は多少落ちるが計算時間が短縮される。

## 4.2. 結果の検討

前項までで述べた手法を求いて OSP を求めることができるが、得られた解の精度は次式を用いて評価することができる。

$$D_{NA} = \{\sigma_h^2 + (x_h - \mu_h)^2\}/\sigma_h - \{\sigma_{h+1}^2 + (x_h - \mu_{h+1})^2\}/\sigma_{h+1}, \tag{4.12}$$

$$D_{EA} = W_h\{\sigma_h^2 + (x_h - \mu_h)^2\} - W_{h+1}\{\sigma_{h+1}^2 + (x_h - \mu_{h+1})^2\}, \tag{4.13}$$

$$D_{PA} = x_h - (\mu_h + \mu_{h+1})/2. \tag{4.14}$$

そこで解の精度を向上させるため (2.9)〜(2.11) を制約条件に加え、上で得られた OSP を出発値として改めて最適化を行ったところ、D について $10^{-2}$ 程度精度が向上した。(4.12)〜(4.14) の絶対値の最大は十分小さく、$10^{-5}$〜$10^{-7}$ 程度であった。

また層の数の増加に併なう層別の効果を図示し e の値を考慮したところ、層別の効果は $\ell$ の増加とともに減少していくことが判った。

次に標本の割当方法の違いによる効率を計算すると、$C_{EA}$ の値は小さく NA と EA とはほとんど差がないと考えられる。また NA と PA とは、層の数が増加するにつれてその割合の差は

$C_{EA}$と比べて大きくなっていく傾向にある。したがって現実的な観点からは EA を用いるのが良いと考える。

## 5. 最適な標本数と層の数との関係

本節では最も簡単な形の費用関数を導入し、費用一定という条件の下で推定量$\bar{X}$の分散が最小となるように、標本数$n$と層の数$l$を決定する問題について考える。

まず費用関数は次の形をとると仮定する。

$$C = c_0 + c_1 n + c_2 l, \qquad (c_0, c_1, c_2 > 0). \tag{5.1}$$

ここで$C$は全費用、$c_0$は$n$および$l$によらない固定費用を表わす。4.2 で述べたように現実的観点からは EA を考えればよいであろうから、この場合について検討する。このとき、(2.7) および (3.4) より

$$V_{EA}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\varphi(x), \qquad x = (x_1, x_2, \cdots, x_{l-1}) \tag{5.2}$$

なる関係がある。いま全費用に関して次の条件が成立しなければならないとする。

$$c_0 + c_1 n + c_2 l \leqq C^*. \tag{5.3}$$

このとき問題は次のようになる。ただし$C^{**}$は適当な$n$, $l$に対する費用関数の値である。

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad V_{EA}(\bar{X}), \quad \text{for } n, l, x; \\ &\quad \text{subject to} \quad c_0 + c_1 n + c_2 l = C^{**}, \\ &\qquad\qquad\qquad n, l : \text{positive integer}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

(5.2) および (5.4) より $n$ を消去すれば

$$V_{EA}(\bar{X}) = \frac{c_1/c_2}{(C^{**}-c_0)/c_2 - \ell}\,\varphi_{EA}(x) \tag{5.5}$$

となる。$V_{EA}(\bar{X}) \longrightarrow min$ なるためには $\frac{c_2}{c_1}V_{EA}(\bar{X}) \longrightarrow min$ となればよいから、

$$\frac{c_2}{c_1}V_{EA}(\bar{X}) = \frac{1}{k-\ell}\,\varphi_{EA}(x) \longrightarrow min\,, \quad \text{for } k,\ \ell,\ x; \tag{5.6}$$
$$k = (C^{**} - c_0)/c_2$$

とすればよい。ここで $k$ は現実的な観点から決定すべきである。前節で得た $\ell$ と $\varphi^*_{EA}$ の値を基に、いろいろな $k$ の値に対して (5.6) の値を計算した結果、$k$ が小さくない限り $\ell$ を大きくした方が $V_{EA}(\bar{X})$ の値は小さくなることが判った。すなわち1個の層を作る費用が極端に大きくない限り、層の数を増やした方が良いことになる。

上述の議論は (5.1) のモデルの下で成立するが、現実にあわせてモデルを変更し、最適な $n$ と $\ell$ とを決定すべきであろう。

## 参考文献


[1] Bracken, J. and McCormick, G.P. (1968). *Selected Applications of Nonlinear Programming*, John Wiley & Sons, Inc..

[2] Hastings, C. Jr. (1955). *Approximations for Digital Computers*, Princeton University Press.

[3] Hess, I., Sethi, V.K. and Balakrishnan, T.R. (1966). "Stratification : A practical investigation," *Jour. Amer. Statist. Ass.*, 61, 74-90.

[4] Hitotsumatsu, S. (1967). "On the numerical computation of incomplete gamma function," *Comm. Math. Univ. St. Pauli*, 15, 91-108.

[5] Jagannathan, R. (1965). "Notes and comments : The programming approach in multiple character studies," *Econometrica*, 33, 236-237.

[6] Kpedekpo, G.M.K. (1973). "Recent advances on some aspects of stratified sample design. A review of the literature," *Metrika*, 20, 54-64.

[7] Nordbotten, S. (1956). "Allocation in stratified sampling by means of linear programming," *Skand. Aktuar.*, 39, 1-6.

[8] Sakakibara, O. (1973). NLP— *User's Manual*, Nippon Univac Sogo Kenkyusho, Inc..

[9] Sethi, V.K. (1963). "A note on optimum stratification of populations for estimating the population mean," *Aust. Jour. Statist.*, 5, 20-33.

[10] Taguri, M. (1975). "Some modified Monte Carlo method to solve non-linear optimization problems," *Jour. Jap. Statist. Soc.*, 5, 65-76.

[11] 戸田・清水・竹内 (1968). 統計分布と電子計算機 (1) ~ (3), 標準化と品質管理.

[12] 山内・森口・一松 (1968). 「電子計算機のための数値計算法 (II)」, 培風館.