数理解析研究所講究録
第273巻 1976年 9-19

特異K3曲面に対する同種の概念について

東大 理　　猪瀬博司

§ 序

1971年 Pjateckiĭ-Šapiro-Šafarevič [1] は、偏極複素代数的K3曲面のTorelli型定理の単射性の部分を証明した。この論文を予告したNiceの国際会議で、Šafarevičはperiodの言葉を使って、K3曲面に、アーベル多様体と同様に、同種(isogeny)の概念を導入する事を提案している。しかし残念ながら本論文[1]には、この事が全くふれられなかった。同種の概念を実質的なものにするためには、何らかの形の存在定理が必要であった。以下、我々は、Picard数の一番大きいK3曲面(特異K3曲面という。i.e. $\rho(X)=20$)について、同種の概念を自然な仕方で導入するが、その本質的な点は、特異K3曲面の間の有理写像が、アーベル曲面を通じて、ある程度構成できる所にある。

（定義） 特異K3曲面 X, Y が同種とは、有限次数の有理写像 $f: X \to Y$ が、すくなくとも1つ存在することを言う。（以下 有理写像は、みな有限次数とする）

これについて、次の自明ではない定理が成り立つ。

（定理1） 同種の性質は、X と Y について対称である。すなわち "$\exists f: X \to Y$" $\Longleftrightarrow$ "$\exists g: Y \to X$" が成り立つ。

また、この定理の系として 同種の類を 次の形に特徴付ける事ができる。

（定理2） 特異K3曲面 X, Y について、次の3つは同値。

i) X と Y は同種

ii) 楕円曲線として $H^2(X, \mathcal{O})/j^* H^2(X, \mathbb{Z})$ と $H^2(Y, \mathcal{O})/j^* H^2(Y, \mathbb{Z})$ は同種

iii) 虚2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-\det T_X})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt{-\det T_Y})$ が一致する。
但し、T_X は $H_2(X, \mathbb{Z})$ に於ける、代数的サイクルのつくる部分群の、交叉数に関する、直交補空間で $\det$ は、その交叉行列の行列式とする。

§1 特異K3曲面とKummer曲面の基本的な関係.

定理1を証明するために、次の基本的な命題を用いる。

(命題☆) 任意の特異K3曲面 X に対して、Kummer曲面 Y_1, Y_2 と、それらの間の有理写像 $Y_1 \xrightarrow{f_1} X \xrightarrow{f_2} Y_2$ が存在する。

f_2 の存在証明は、今の所"T_X の計算"によるものと"純幾何的"によるものとの2通りがある。前者は、T. Shioda and H. Inose [2] に後者は H. Inose [3] にある。(そこで得られる f_2 は実質的に同じものだが、証明の方向が逆になっている。) ここでは我々は、f_1 の方のつくり方のみ述べよう。

(補題1) 任意の特異K3曲面は、次のような楕円曲面として表現される。

i) base curve は、非特異有理曲線 $\mathbb{P}^1$。

ii) global section をもつ。

iii) すくなくとも2つ、II^* 型 (K. Kodaira [6] 参照) の特異ファイバーをもつ。

（証明の概略） K3 曲面の 2nd ホモロジー群は、交叉数に関して、$E_2 \oplus E_2 \oplus E_2 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_8$ のラティスに同型になる。（但し E_2 は index (1,1) のユニモジュラーラティス、Γ_8 は index (0,8) のユニモジュラーラティスである。）[1] で使われたように、任意の階数2のラティスは、(up to isometry で) 一意的に、上のラティスの中に埋め込まれる。特に、X が特異 K3 曲面の時、T_X の階数は2だから、これが適用でき　　T_X は、上の表示の最初の $E_2 \oplus E_2$ の中に埋め込まれていると考えて良い。よって　T_X の直交補空間 i.e. 代数的サイクルのつくるラティスは、$E_2 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_8$ を含んでいる。$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と行列で書けば、この第1元は、適当な reflections (isometry で T_X を不変にする…詳しくは [1] を見よ) の後 elliptic fibering の general fiber として表現される。あとは、2つの Γ_8 が、この pencil の2つの II^* －特異ファイバーを与える事、及び E_2 の形から、global section のある事が簡単に示される。

（補題2） K3 曲面 X が、補題1に述べた形の楕円曲面として表現される時、その函数不変量は、base curve の座標を適当にとる時、次の形に表わされる。

$$J(\tau) = \frac{-c^2\tau^2}{(\tau-\alpha)(\tau-\alpha^{-1})(\tau-\beta)(\tau-\beta^{-1})},$$

但し、α, β は0と異なる複素数で、$c = \frac{\alpha+\alpha^{-1}}{2} - \frac{\beta+\beta^{-1}}{2}$ である。$\alpha=\beta$ には $J(\tau)\equiv 0$ が対応していると考える。αとβの値によって実際の特異ファイバーの形が、次のいずれかになる。

i) $\mathrm{I}_1 \times 4$　ii) $\mathrm{II} \times 2$　iii) I_2, $\mathrm{I}_1 \times 2$　iv) $\mathrm{I}_2 \times 2$　v) IV.

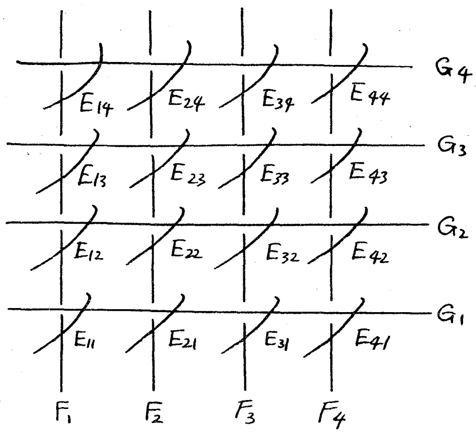
（これらに2つのII^*が加わる）。

（証明）　2つのII^* は函数不変量Jの2位以上の零点に対応するから、$J\equiv 0$ か 次数4以上、ところが前者は、Euler 数の計算から ii) と v) しかあり得ない事がすぐにわかる。また後者も同様にして、II^*以外の特異ファイバーが I_{b_j} ($\Sigma b_j = 4$) となる事がわかる。III, III^*型のものが出て来ない事から、$J(\tau)-1$ の零点がすべて偶数位の零点でないといけない。この事から簡単な計算で 補題の主張する形がでる。

（補題3）　$A = E_1 \times E_2$ を直積型のアーベル曲面、$Km\,A$ を、Aの inversion $\iota_A : x \longmapsto -x$ による商空間の非特異極小モデルとする。この時、$Km\,A$ 上に involution ι があって、このιによる商空間の非特異極小モデルは、補題1に述べた形の楕円曲面として表わされる$K3$ 曲面になる。

（証明）　定義から $Km\,A$ には、次の図のような、非特異

有理曲線たちをもつ事がわかる。　各E_{jk}は　Aの２分点の



像，F_j, G_k　は　$\{2分点\} \times E_2$，$E_1 \times \{2分点\}$の像である。ここで，因子　$3F_4 + 2E_{41} + 2E_{42} + 2E_{43} + G_1 + G_2 + G_3$ 及び　$3G_4 + 2E_{14} + 2E_{24} + 2E_{34} + F_1 + F_2 + F_3$ を考える。[1] §3 Theorem 1　によれば，この２つの因子を特異ファイバーにもつ $Km\,A$ 上の elliptic pencil が存在する。この pencil は global section をもつ（e.g. E_{11}）から，base curve の函数体上の elliptic curve と考える事ができ，この意味での inversion automorphism を ι_1 とおく。一方，A 上の involution $(u, v) \mapsto (-u, v)$ が $Km(A)$ 上に induce する involution を ι_2 とおく。　$\iota = \iota_1 \circ \iota_2$　と定義すれば，ι　が上の elliptic pencil の２つの IV* fiber を固定し，商空間に移った時，これが２つの II* を与える事、K3 曲面になる事等，容易に check できる。

（補題４）　補題１に述べた形の楕円曲面は，補題３のやり方ですべて得られる。

（証明）　補題２に述べた函数不変量，ホモロジカル不

変量（これは特異ファイバーの形で決まる）をもつ楕円曲面を、補題3のやり方でつくってやれば良い。そのために、補題3の状況をすこし精密にみる必要がある。楕円曲線 E_1, E_2 を次の式で定義されているものとする。

$$E_j \ : \quad v_j^2 = u_j(u_j-1)(u_j-\lambda_j) \quad (j=1,2).$$

この時、$\mathrm{Km}\,A$ は次の式で定義される4次曲面の極小非特異モデルである事が、計算によってわかる。

$$Y : \quad z^2xy-(x-w)(x-\lambda_1 w)(y-w)(y-\lambda_2 w)=0$$

$\mathrm{Km}\,A$ 上で有理函数

$$\Phi = \frac{zx}{(y-w)(y-\lambda_2 w)} = \frac{(x-w)(x-\lambda_1 w)}{zy}$$

を考えれば、この函数が、補題3の elliptic pencil を与えるものである事が（elementary だがすこし長い）計算によって確かめられる。その singular fibers は $\Phi=t$ とおいて、w で非斉次化して、$\mathbb{P}^3$ 内の 2-2 交叉

$$\begin{cases} zx = t(y-1)(y-\lambda_2) \\ zy = \frac{1}{t}(x-1)(x-\lambda_1) \end{cases} \qquad -\infty \qquad t\in\mathbb{C}-\{0\}$$

を調べる事により明らかになる。実際この Jacobi 行列、

$$\begin{pmatrix} z & -t(2y-(1+\lambda_2)) & x \\ -\frac{1}{t}(2x-(1+\lambda_1)) & z & y \end{pmatrix}$$

の退化する点は、

$$t^2 = \frac{(\lambda_1+1)(\lambda_1-2)(2\lambda_1-1)+2(\lambda_1^2-\lambda_1+1)\sqrt{\lambda_1^2-\lambda_1+1}}{(\lambda_2+1)(\lambda_2-2)(2\lambda_2-1)+2(\lambda_2^2-\lambda_2+1)\sqrt{\lambda_2^2-\lambda_2+1}}$$

で与えられる。$\sqrt{\dfrac{\lambda_2(\lambda_2-1)}{\lambda_1(\lambda_1-1)}}$ を乗じ，楕円曲線の解析的不変量

$$j_k = \frac{4(\lambda_k^2-\lambda_k+1)^3}{27\lambda_k^2(\lambda_k-1)^2}, \quad k=1,2.$$

をつかって整理すると

$$t = \sqrt{(\sqrt{j_1-1}+\sqrt{j_1})(\sqrt{j_2-1}+\sqrt{j_2})}.$$

となる。（平方根のとり方は全く自由ではない。例えば，$\sqrt{j_1-1}$ と $\sqrt{j_2-1}$ の２つは平方根を固定して以下考える。（t の座標のとり替で，どう固定しても結果は同じ）だから上の式の平方根は，$\sqrt{j_1}, \sqrt{j_2}$ 及び一番外側の $\sqrt{\ }$ の 2^3 個選択の自由があり，一般には，$0, \infty$ を除けば，特異ファイバーは８個でてくる。）

さて，補題２で得られた，楕円曲面を決める定数 α, β に対して，

$$j_1 = -\frac{(\alpha-\beta)^2}{4\alpha\beta}, \quad j_2 = -\frac{(1-\alpha\beta)^2}{4\alpha\beta}$$

として，この不変量から決まる，楕円曲面の特異ファイバーの位置を，（$K_m A/\iota$ に於ては，elliptic fibering が $\Phi^2 = t^2$ で与えられる事に注意して）計算すれば，丁度，求める定数 α β に対応するものが得られる事がわかる。（特異ファイバーの形もすぐ check できる）

補題1と補題4とを合わせれば、最初に述べた 命題☆の $f_1 : Y_1 \to X$ の存在が言えた事になる。

§2 証明（有理写像と T_X の関係）

前節の結果をつかって、定理1，2を証明する。次の一般に成り立つ命題を用いる。

（命題） $f : X \to Y$ を K3 曲面間の$\overbrace{\text{有理写像}}^{\text{次数 } n \text{ の}}$とする時、自然な準同型 $f_* : T_X \to T_Y$, $f^* : T_Y \to T_X$ が定義され（T_X の定義は p.2 参照）次を満たす。

1) $(f^*t, f^*u) = n(t,u), \quad \forall t,u \in T_Y,$

2) $f_*f^*t = nt, \quad \forall t \in T_Y,$

3) $(f_*t, f_*u) = n(t,u), \quad \forall t,u \in T_X,$

4) $f^*f_*t = nt \quad \forall t \in T_X.$

（証明） 定義より T_X は、あらゆる分岐曲線と交わらぬようにとれる。したがって T_X, T_Y に関する限り 有理写像 f は，被覆写像のようにふるまう。f^*, f_* の定義はこれから、自然に定義され、性質 1)，2) が容易にみられる。4)を証明しよう。$\omega_X = f^*\omega_Y$ を 非零正則2型式とし、$f^*f_*t - nt$

上でそれを積分する。

$$\int_{f^*f_*t-nt} \omega_X = \int_{f^*f_*t-nt} f^*\omega_Y = \int_{f_*f^*f_*t-f_*nt} \omega_Y = \int_{nf_*t-nf_*t} \omega_Y = 0$$

これから f^*f_*t-nt が代数的サイクルであるとわかる。

ところが明らかに $f^*f_*t-nt \in T_X$ だから、T_X の定義より

$$f^*f_*t = nt$$

となる。$(f_*t, f_*u) = \frac{1}{n}(f^*f_*t, f^*f_*t) = \frac{1}{n}(nt, nu)$

$$= n(t, u)$$

より 3) も言えた。

この命題よりただちに、

（系） K3 曲面 X, Y 間に有限次数の有理写像 $f: X \to Y$ があれば、X と Y の Picard 数は一致する。

（定理の証明） X, Y を特異 K3 曲面、$f: X \to Y$ を有理写像とする。$f_1: X_1 \to X$，$f_2: Y \to Y_1$ なる Kummer 曲面 X_1, Y_1 を命題☆によってとれば、これは Picard 数 20 の曲面になる。

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d] \arrow[ddr, dashed] & \\ X \arrow[r] & Y \arrow[d] \\ & Y_1 \end{tikzcd}$$

有理写像 $f_2 \circ f \circ f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ に対して定理1がいえれば ${}^{\exists}h : Y_1 \to X_1$ で、これから $f_1 \circ h \circ f_2 : Y \to X$ がつくれるから、最初から、X, Y を Picard 数 20 の Kummer 曲面として証明すれば良い。X, Y に対応する特異アーベル曲面を A, B とすれば $f : Km(A) \longrightarrow Km(B)$ の存在から、T_A, T_B の計算によって A と B が同種である事がわかる。そこで逆向きの準同型 $B \to A$ から Kummer 曲面間の有理写像 $Km(B) \to Km(A)$ が導かれる。これが求める有理写像の1つを与える。定理2はアーベル曲面に関する同様の結果から、容易にしたがう。[cf. [4]]

(参照文献)

[1] I. I. Pjateckiĭ-Šapiro and I.R. Šafarevič, "A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3." Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math. 35 (1971), p530~572

[2] T. Shioda and H. Inose, "On singular K3 surfaces" (to appear)

[3] H. Inose "A notion of isogeny for singular K3 surfaces" (to appear)

[4] T. Shioda and N. Mitani, "Singular abelian surfaces and binary quadratic forms" in "Classification of algebraic varieties and Compact Complex manifold" edited by H. Popp, Lecture notes in Math. No. 412 Springer, 1974.

[5] I. R. Šafarevič "Le Théorèm de Torelli pour les surfaces algébrique de type K3" Actes. Congrès interm., 1970 Tome I, p413~417.

[6] K. Kodaira, "On Compact analytic surfaces II, III" Ann. of Math., 77. 78