数理解析研究所講究録
第273巻 1976年 20-27

クンマー曲面と4次曲面

東大 理　　水上真澄

1°　3次元射影空間 $\mathbb{P}^3$ 内の非特異4次曲面でクンマー曲面であるものの1例をあげ、その構造を調べる。

I. I. Pjateckiĭ - Šapiro と I. R. Šafarevič が [1] において、複素数体上で $F: x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 0 \subset \mathbb{P}^3$ が、クンマー曲面であることを注意し、さらに F は $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\cdot i) \times (\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\cdot(2i))$ を inversion : $u \to -u$ で割り、16個の特異点を blow up した（以後、アーベル曲面Aから、このようにして得られるクンマー曲面を Km(A) で表わす。）クンマー曲面であることを述べた。

また、塩田先生が基礎体の標数が 3 (mod 4) のときも F はクンマー曲面であることを [2] で指摘している。そして、この4次曲面とクンマー曲面との間の具体的な双有理対応を求めることを問題として出された。ここで述べることは、この問題について得られたことである。

さらに、猪瀬氏により $X: \prod_{j=1}^{4}(x_1-\alpha_j x_2)+\prod_{j=1}^{4}(x_3-\beta_j x_4)\subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ が非特異でPicard数が20のときクンマー曲面であることがわかっていた。([3])

2°　用語及び記号を次のように定める。

基礎体 k は代数閉体で、k の標数は2ではないとする。

$X_a: x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4+2a(x_1^2x_2^2+x_3^2x_4^2)=0 \subset \mathbb{P}^3_k$

$a\in k$, $a\neq\pm1$　X_a は非特異4次曲面。

$A_a = E_1\times E_2/\tau$

$E_1:\ v_1^2=(u_1^2-1)(u_1^2-\frac{1+a}{2})$

$E_2:\ v_2^2=(u_2^2-1)(u_2^2-\frac{1-a}{2})$

$\tau_1:\ (u_1,v_1)\longrightarrow(-u_1,-v_1)$

$\tau_2:\ (u_2,v_2)\longrightarrow(-u_2,-v_2)$

$\tau=\tau_1\times\tau_2:(u_1,v_1,u_2,v_2)\longrightarrow(-u_1,-v_1,-u_2,-v_2)$

τ は $E_1\times E_2$ のゼロ点を $(-1,0)\times(-1,0)$ とすれば、位数2の点 $(1,0)\times(1,0)$ による移動である。

ζ は1の原始8乗根, $\zeta^2=i$ とする。α は $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=-2a$ を満す k の元の1つ。k_0 は k の素体とする。

次の定理が成立つ。

定理　X_a は $Km(A_a)$ と双有理同型である。具体的な双有理写像は $k_0(\zeta,\alpha)$ 上定義される。

注意　$E_3 : v_3^2 = u_3(u_3-1)(u_3-\frac{1+a}{2})$ とおくと $E_1/\tau_1 \simeq E_3 \simeq E_2/\tau_2$ である。

3°　まず、ここでこの問題を考える指針となる命題を[1]から引用する。

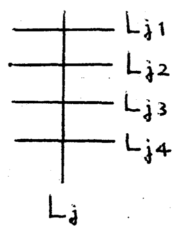
命題（I.I.Pjateckiĭ-Šapiro & I.R.Šafarevič）　標準因子 K_X が 0 に線形同値な曲面 X が、楕円曲線を含むアーベル曲面 A の Km(A) と双有理同型になる必要十分条件は

$\exists\, \Phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ morphism，$\exists\, \Sigma = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset \mathbb{P}^1$ s.t.

$\forall c \in \mathbb{P}^1 - \Sigma$ について $\Phi^{-1}(c)$ は非特異楕円曲面

$$\Phi^{-1}(a_j) = 2L_j + L_{j1} + L_{j2} + L_{j3} + L_{j4} \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

となることである。ここで $\Phi^{-1}(a_j)$ は I_0^* 型特異ファイバーといわれるもので、図１のように非特異有理曲線が交わっているものである。



（図１）

証明は[1]の§4.Th.1 の中でなされている。

これから X_a と $Km(A_a)$ の同型を命題で述べた Φ を構成することによって証明する。つまり $\Phi^{-1}(a_j)$ に当る４つの特異ファイバーを見出す。

X_a 上の非特異有理曲線を調べる。次の方程式で定義される次数１の非特異有理曲線（直線）が X_a 上にある。

$$l_{jk} : x_1 - c_j x_2 = x_3 - c_k x_4 = 0 \qquad j, k = 0, 1, 2, 3$$

$$m_{jk} : x_1 - d_j x_3 = x_4 - d_k x_2 = 0 \qquad 〃 \qquad j + k \equiv 1 \pmod{2}$$

$$n_{jk} : x_1 - d_j x_4 = x_2 - d_k x_3 = 0 \qquad 〃 \qquad j + k \equiv 0 \pmod{2}$$

但し $(c_0, c_1, c_2, c_3) = (\alpha, -\frac{1}{\alpha}, -\alpha, \frac{1}{\alpha})$, (d_0, d_1, d_2, d_3) $= (\zeta, \zeta^3, \zeta^5, \zeta^7)$

これらが互いに交わるのは次の場合でありこの場合に限る。

$$\left.\begin{array}{l} l_{jk} \text{ と } l_{j'k'} \\ m_{jk} \text{ と } m_{j'k'} \\ n_{jk} \text{ と } n_{j'k'} \end{array}\right\} \quad (j - j')(k - k') = 0$$

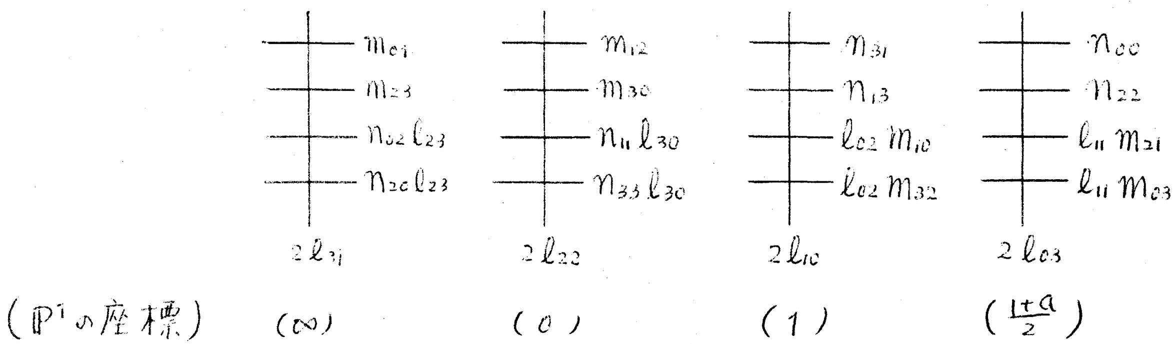
$$\left.\begin{array}{l} l_{jk} \text{ と } m_{j'k'} \\ m_{jk} \text{ と } n_{j'k'} \\ n_{jk} \text{ と } l_{j'k'} \end{array}\right\} \quad -j + k + j' + k' \equiv 3 \pmod{4}$$

さらに $\mathbb{P}^3_k$ の超平面で l_{00} と m_{03} を含むものを H とすると

$$X_a \cap H = l_{00} + m_{03} + D_H$$

ここで D_H は次数2の非特異有理曲線(conic)である。(kの標数が3で $a = 0$ のときは例外で D_H は2本の直線から成る。このときは適当に理解しなおすことにする。) この D_H を $l_{00} m_{03}$ で表わす。同様に $l_{02} m_{10}$, $n_{02} l_{23}$ などが定められる。

X_a は次の4つの I_0^* 型の特異ファイバーを持つ $\mathbb{P}^1$ 上の楕円曲面になる。($\mathbb{P}^1$ への写像は補題2の $\varphi^* w_1$ で与えられる。)



(図２)

これらの曲線たちが，図２のように交わっていることは，１つ１つ確かめればよい。

4°　この節で X_a から $\mathrm{Km}(A_a)$ への１つの双有理写像を与える。補題１は[2]の 359, 360 頁を参照した。

補題１　$k(\mathrm{Km}(A_a)) = k(w_1, w_2, y, z)$

$$y^2 = (w_1-1)\left(w_1-\frac{1+a}{2}\right)(w_2-1)\left(w_2-\frac{1-a}{2}\right) \qquad (1)$$

$$z^2 = \frac{w_2}{w_1} \qquad (2)$$

証明．$k(\mathrm{Km}(A_a)) = k(A_a)^{\iota_{A_a}} = k(E_1\times E_2)^{\langle \iota_1\times\iota_2\rangle}$

但し，ι_{A_a} は A_a の inversion，$\iota_1 : (u_1, v_1) \to (u_1, -v_1)$ $\iota_2 : (u_2, v_2) \to (u_2, -v_2)$。したがって $w_1 = u_1^2$，$w_2 = u_2^2$ $y = v_1 v_2$，$z = \frac{u_2}{u_1}$ とおけば，これらは $k(\mathrm{Km}(A_a))$ の元である。$k(w_1, w_2, y, z) = K$ とおく。$K(u_1)$ は K の，$K(u_1, v_1) = k(u_1, v_1, u_2, v_2)$ は $K(u_1)$ の２次以下の拡大体である。また $\langle \iota_1\times\iota_2\rangle$ は位数４の群だから $[k(E_1\times E_2) : k(\mathrm{Km}(A_a))] = 4$。故に $k(\mathrm{Km}(A_a)) = K$。

また、体の包含関係は右のようになっているから、

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & k(u_1, v_1, u_2, v_2) \arrow[dl, dash, "4"'] \arrow[dr, dash, "4"] & \\
k(w_1, w_2, y, z) \arrow[dr, dash] & & k(u_1, u_2) \arrow[dl, dash, "4"] \\
 & k(w_1, w_2) &
\end{tikzcd}$$

$[k(w_1, w_2, y, z) : k(w_1, w_2)] = 4$。

故に、関係式として(1)，(2)をとれば十分である。

補題2　$\varphi : X_a \longrightarrow Km(A_a)$ は有理写像である。

但し、　$\varphi^* w_1 = F_2/F_1 \qquad \varphi^* w_2 = G_1/G_2$

$$\varphi^* y = \frac{i}{2\alpha F_1 G_1}\left\{2\alpha x_1^2 - 2\alpha^3 x_2^2 + 2i\alpha^3 x_3^2 - 2i\alpha x_4^2 + \zeta^3(\alpha^4 - 1)(x_1 x_3 - x_2 x_4)\right\}$$
$$\times\left\{(x_1 + \tfrac{1}{\alpha}x_2)^2 - i(x_3 + \tfrac{1}{\alpha}x_4)^2\right\}\left\{(x_1 - \alpha x_2)^2 + i(x_3 + \alpha x_4)^2\right\}\left\{(x_1 + \tfrac{\zeta^3}{\alpha}x_3)^2 - (\tfrac{1}{\alpha}x_2 - \zeta^3 x_4)^2\right\}$$

$$\varphi^* z = \frac{\zeta(\alpha^2 x_1^2 - x_2^2 - i\alpha^2 x_3^2 + i x_4^2)}{(\alpha^2 - 1)(x_1 x_4 - x_2 x_3)}$$

$$F_1 = \frac{2(\alpha^2 - 1)}{\alpha^2 + 1}(x_1^4 - x_2^4 + x_3^4 - x_4^4) + \frac{2(\alpha^2 - 1)}{\alpha}(-x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_3^3 x_4 - x_3 x_4^3)$$
$$+ 4i(x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) + 8i\, x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$F_2 = F_1 - \left\{(x_1 - \alpha x_2)^2 + i(x_3 + \alpha x_4)^2\right\}\left\{(x_1 + \tfrac{1}{\alpha}x_2)^2 + i(\tfrac{1}{\alpha}x_3 - x_4)^2\right\}$$

$G_1 = F_1$ の $(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha)$ を $(\zeta^7 x_1, \zeta x_2, \zeta x_3, \zeta^7 x_4, -i\alpha)$ におきかえた式

$$G_2 = G_1 - \left\{(x_1 + \tfrac{1}{\alpha}x_2)^2 - i(x_3 + \tfrac{1}{\alpha}x_4)^2\right\}\left\{(\alpha x_1 - x_2)^2 + i(x_3 + \alpha x_4)^2\right\}$$

証明．(1)，(2) 式を満すことをいえばよい。(1) の両辺の因子は $2(l_{03} + l_{10} + l_{21} + l_{32} + n_{00} + n_{13} + n_{22} + n_{31} + l_{02} m_{10} + l_{02} m_{32} + l_{11} m_{03} + l_{11} m_{21}) - 2(2 l_{00} + 2 l_{31} + m_{01} + m_{12} + m_{23} + m_{30} + 2 n_{02} l_{23} + 2 n_{20} l_{23})$ であり，(2) の両辺の因子は $2(l_{13} + l_{31} + m_{01} + m_{23})$

$-2(l_{00}+l_{22}+m_{12}+m_{30})$ である。また $(\alpha:1:1:-\alpha)\in X_a$ での値は、(1) では $\frac{1}{128\alpha^8}(\alpha^4-1)^4$、(2) では i にそれぞれ両辺ともになっているからよい。

定理の証明. 補題2の φ が双有理写像であることを示す。$f: X_a \to \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ を $f(P)=(\varphi^*w_1(P), \varphi^*w_2(P))$, $P\in X_a$, と定義すれば、これは、図2の曲線と $l_{00}, l_{13}, l_{21}, l_{32}$ 上の点を除いて4対1の写像である。よって $k(X_a)$ は $k(\varphi^*w_1, \varphi^*w_2)$ の4次の拡大体である。一方 $Km(A_a)$ は既約曲面で、$\varphi(X_a)$ は2次元だから φ は全射であり、φ^* は単射である。補題1でみたように $[k(Km(A_a)):k(w_1,w_2)]=4$ だから、φ^* は $k(Km(A_a))$ から $k(X_a)$ への同型を与える。

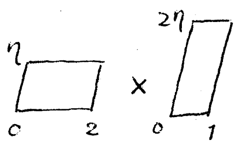
同様にして $X_{a,b}$:

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4+2a(x_1^2x_2^2+x_3^2x_4^2)+2b(x_1^2x_3^2-x_2^2x_4^2)=0\subset\mathbb{P}^3_k$$

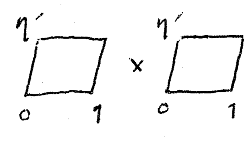
$$(1-a^2)(1-b^2)(1-a^2-b^2)\neq 0\ ,\ a^2+b^2+4a+3=0$$

もクンマー曲面 $Km(A_{a,b})$ であることがわかる。

基礎体が複素数体のときを考えれば

A_a: 

を $(1,\eta)$ による移動で割ったもの

$A_{a,b}$ 

を $(\frac{1}{2},\frac{\eta'}{2})$ による移動で割ったもの

になっている。

Reference

[1] I.I.Pjateckiĭ-Šapiro & I.R.Šafarevič: A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3, Izv. Akad. Nauk SSSR 35 (1971); English translation Math. USSR Izv. 5 (1971) 547-587

[2] T.Shioda: Algebraic cycles on certain K3 surfaces in characteristic p, Manifolds-Tokyo 1973, Univ. of Tokyo Press 1975, 357-364

[3] H.Inose: On certain Kummer surfaces which can be realized as non-singular quartic surfaces in $\mathbb{P}^3$ (to appear)