数理解析研究所講究録
第273巻 1976年 198-205

Some Remarks on Abelian Varieties

東大 理　　塩田徹治

§0. アーベル多様体に関する次の問題を考える:

<u>問題1</u>. アーベル多様体 A とその部分アーベル多様体 B_1, B_2 が与えられたとき. 商アーベル多様体 A/B_i について.

$$B_1 \simeq B_2 \implies A/B_1 \simeq A/B_2 \quad ?$$

<u>問題2</u>. A, A' を代数体 K 上定義されたアーベル多様体とし. Kの素イデアル $\mathfrak{p}$ について. A, A'の reduction mod $\mathfrak{p}$ をそれぞれ $A(\mathfrak{p})$, $A'(\mathfrak{p})$ とかく。このとき. もし $A \not\simeq A'$ (Kの代数的閉体の上で) ならば. $A(\mathfrak{p}) \simeq A'(\mathfrak{p})$ となる $\mathfrak{p}$ は高々有限個にかぎられるか?

問題1の特別な場合として. 楕円曲線 E, E', E'' について次の問を発することができる("Cancellation problem"):

<u>問題3</u> $E \times E' \simeq E \times E'' \implies E' \simeq E''$?

<u>問題4</u> $E \times E \simeq E \times E' \implies E \simeq E'$?

さて 答はいずれも一般には否定的である! それを示す

のが本稿の目的である。明らかに，問題3又は4の反例は問題1の反例を与えるから，我々は主として直積型のアーベル曲面，即ち $A = E \times E'$ (E, E': 楕円曲線) の形のものを考察する。問題2に関しても，このような A, A' から反例を見出すことができる。

まずアーベル曲面 $A = E \times E'$ のピカール数 ρ について，次の事実を思出す (cf. [1], Appendix)

$$\rho(A) = \begin{cases} 2 & E \nsim E' \\ 3 & E \sim E', \quad \mathrm{End}(E) = \mathbb{Z} \\ 4 & E \sim E', \quad \mathrm{End}(E) \simeq \mathbb{Z}^2 \\ 6 & E \sim E', \quad \mathrm{End}(E) \simeq \mathbb{Z}^4 . \end{cases}$$

ここで，$\sim$ は同種，$\mathrm{End}(E)$ は E の自己準同型環をあらわす。

<u>命題</u>. もし $\rho(E \times E') \leq 3$ ならば，問題3(及び4)は正しい。

証明は省略する。一般の場合の結果は次の通り：

標数	問題3		問題4
0	No		Yes
$p>0$	No	$\Leftarrow$	No

標数 $p > 0$ のとき，4の反例を supersingular な E を用いて構成する。標数0 (複素体上)の場合，特異アーベル曲面の理論([2])を応用して，単に反例を与えるのみならず，問題3の完全な理解が可能である。

§1. まず問題4の標数 $p>0$ における反例をあげる:

例I　$p\equiv 3 \pmod 4$, $k=\mathbb{F}_{p^2}$ とし, 次の楕円曲線を考える

(1)　$E: \quad Y^2 = X^3 - X$.

(2)　$E': \quad \eta^2 = (\xi+1)(\xi^2-4\xi-4)$.

このとき $E\times E \simeq E\times E'$ (k 上) であるが,

$p\geq 7$ なら $E\not\simeq E'$ (k の閉体上でも) である。

次に 問題2の反例:

例II　上の楕円曲線 E および E' を Gauss の数体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の上で考え アーベル曲面

(3)　$$A = E\times E, \quad A' = E\times E'$$

を考える。このとき

(4)　$$A \not\simeq A' \quad (\mathbb{C} \text{ 上})$$

(5)　$$A \bmod p \simeq A' \bmod p, \quad \forall p\equiv 3 \pmod 4.$$

これらを示すために, まず上の E を一般の体 k 上で考える。E に無限遠点を原点 o として群の構造を入れると, 2等分点は $v: (X,Y)=(0,0)$ および $w: (X,Y)=(1,0)$ で生成される。簡単な計算により, 点 v 又は w による E 上の平行移動は夫々

$$(X,Y) \longrightarrow (-1/X,\ Y/X^2),$$

$$(X,Y) \longrightarrow ((X+1)/(X-1),\ -2Y/(X-1)^2)$$

で与えられる。従って これらによる商曲線 $E/\langle v\rangle$, $E/\langle w\rangle$ について $E/\langle v\rangle \simeq E$, $E/\langle w\rangle \simeq E'$ が容易に確められる。一方 不変量をみると

$$j(E) = 2^6 \cdot 3^3 \quad , \quad j(E') = (2\cdot 3\cdot 11)^3$$

だから $E \simeq E'$ ($\bar{k}$上) となるのは $p=3$ 又は 7 に限る。

さて よく知られているように

$$E : \text{supersingular} \iff p \equiv 3 \pmod 4.$$

しかも このとき $k \ni \sqrt{-1}$ とする (i.e. $k \supset \mathbb{F}_{p^2}$) と E の k上有理的な自己準同型の環 $\mathrm{End}_k(E)$ は rank 4 の加群となる。

そこで 例Iを証明するには 次の事が成立てば十分である:

アーベル曲面 $E\times E$ のk上の自己同型(群の意味でも)で点 (v, o) を点 (o, w) に写すものが存在する。

実際 これを認めると $E\times E$ を これらの2等分点で割って

$$(E/\langle v\rangle)\times E \simeq E\times (E/\langle w\rangle) \quad (k\text{上})$$

従って $E\times E \simeq E\times E'$ (k上) を得る。

補題 一般に Eを 標数 p の supersingular な楕円曲線, $\ell \neq p$ を素数, v, w を Eの ℓ等分点の群E_ℓの生成元とする。このとき $\mathrm{Aut}(E\times E) \ni f$ で $f(v, o) = (o, w)$ となるものが存在する。さらに $\mathrm{End}_k(E) \simeq \mathbb{Z}^4$ かつ v, w が k上有理的なら f として k-有理的なものがとれる。

証明. Eの準同型を, ℓ等分点の群 E_ℓ に制限することにより, 自然な群の準同型

$$r : \mathrm{End}_k(E) \longrightarrow \mathrm{End}(E_\ell)$$

が生ずる。$\mathrm{Ker}(r) \ni \varphi \iff \varphi(x) = 0,\ \forall x \in E_\ell \iff \varphi = \ell\cdot\psi,$ $\exists\, \psi \in \mathrm{End}_k(E)$, だから,

$$\bar{r} : \mathrm{End}_k(E)/\ell\cdot\mathrm{End}_k(E) \hookrightarrow \mathrm{End}(E_\ell)。$$

ところが仮定より, どちらも $\mathbb{Z}/\ell$ (素体) 上 4 次元のベクトル空間だから $\bar{r}$ は同型, 従って, r は全射となる。

さて v, w は E_ℓ の ($\mathbb{Z}/\ell$ 上の) 底であるから $\mathrm{End}(E_\ell)$ の元で $v \mapsto w$, $w \mapsto 0$ なるものが存在する。上の注意から

$$\exists\, \varphi \in \mathrm{End}_k(E), \quad \varphi(v) = w, \quad \varphi(w) = 0.$$

同様にして

$$\exists\, \psi \in \mathrm{End}_k(E), \quad \psi(v) = 0, \quad \psi(w) = v.$$

そこで $E \times E$ の自己同型 f_1, f_2 を次の様に定義する:

$$f_1(x, y) = (x, y + \varphi(x))$$

$$f_2(x, y) = (x + \psi(y), y).$$

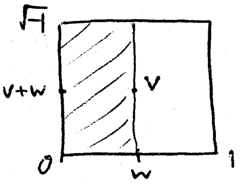
このとき $f_1(v, 0) = (v, w) = f_2(0, w)$ だから, $f = f_2^{-1} \circ f_1$ とおくと, f は補題の条件をみたす。証終.

以上で例Iが示された。例IIについては, あと(4)を示せば十分である。

複素数体$\mathbb{C}$上で、楕円曲線(1), (2)は、夫々、次の複素トーラスと同一視される。

$$E \simeq \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{-1}),$$

$$E' \simeq \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\,2\sqrt{-1}).$$



実際、前者は $\mathrm{Aut}(E) \ni \sqrt{-1}$ から明らか、後者は $E' \cong E/\langle w \rangle$ となること（および $E/\langle v \rangle \simeq E$）から分る。

故に、(3)で定義されるアーベル曲面は、いわゆる特異アーベル曲面になる：すなわち、$\rho(A) = \rho(A') = 4$.

一般に、$\mathbb{C}$上の特異アーベル曲面Aに対し、A上の代数的サイクルの群S_Aは$H_2(A, \mathbb{Z})$のrank 4の部分加群であるから、その直交補空間として"超越的サイクル"の群T_Aが定義されrank 2である。今T_Aの底$\{t_1, t_2\}$で

$$\mathrm{Im}\left(\int_{t_1}\omega \Big/ \int_{t_2}\omega\right) > 0$$

となるものをとる。ここにωはA上の正則な2-formである。そして、T_Aの交叉行列

$$Q_A = \begin{pmatrix} t_1t_1 & t_1t_2 \\ t_1t_2 & t_2t_2 \end{pmatrix}$$

を考えると、これは、T_Aの上のような底の変換により

$$Q \longrightarrow {}^t\gamma\, Q\, \gamma, \quad {}^\exists\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}),$$

となる。従って、次の対応が得られた：

$$A \longmapsto \{Q_A\} \bmod SL_2(\mathbb{Z}).$$

特異アーベル曲面の理論[2]により、これは特異アーベル曲面の同型類の集合から正定値偶整二元二次形式の狭義同値類の集合の上への1対1の対応を与える。

さて、問題の A, A′ については [2] p.265～により直ちに

$$Q_A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q_{A'} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

が分る。従って A と A′ は ($\mathbb{C}$ 上) 同型であり得ない。故に (4) が示され、例 II の証明は終る。

§2. 標数0の時、問題3(および4)を考える。§0で述べた命題により、$\rho(E \times E') \leq 3$ のときは正しいから、$\rho(E \times E') = 4$, 即ち $E \times E'$ は特異アーベル曲面の時を考えればよい。このとき、E と E′ は同種で虚数乗法をもつ楕円曲線である。共通する虚数乗法の二次体を K とかく。

K の整数環を $\mathcal{O}$、その導手 f の order を $\mathcal{O}_f$ とかく (i.e. $\mathcal{O}_f$ は $\mathcal{O}$ の指数 f の唯一つの部分環)。さらに

$$\mathrm{End}(E) = \mathcal{O}_f, \quad \mathrm{End}(E') = \mathcal{O}_{f'},$$

$$(f, f') = d$$

とおく。この時

<u>定理</u> 上のように E, E′ が与えられたとき

$$E \times E'' \simeq E \times E'$$

となる楕円曲線 E'' の同型類の個数 N は有限で、次の公式で与えられる：

$$
\begin{aligned}
N &= h(\mathcal{O}_{f'})\,/\,h(\mathcal{O}_d) \\
&= (f'/d)\cdot[\mathcal{O}_d^\times : \mathcal{O}_{f'}^\times]^{-1} \prod_{p\mid(f'/d)} \left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right).
\end{aligned}
$$

ここで $h(\mathcal{O}_{f'}), \cdots$ は $\mathcal{O}_{f'}, \cdots$ の類数、$\mathcal{O}_{f'}^\times$ は $\mathcal{O}_f$ の単元の群、$\chi(p) = \left(\frac{K}{p}\right)$ は K の Legendre 記号である。

（証明は §1 の最後で述べた特異アーベル曲面に関する結果により、二次体の理論に帰着する。詳しいことは [3] を参照されたい。）

特に $E = E'$ のときは $f = f'$ で上の $N = 1$。即ち問題4が $\mathbb{C}$ の場合成立する。（$\rho(E\times E) \leq 3$ のときは §0 命題によってやはりよい）。他方 $N>1$ となる例を与えることも容易で、それは問題3の反例を与える。

なお、こういう問題を考えた動機は Kummer 曲面に関連した問題に由来するが、それについても [3] を見られたい。

Reference

[1] T. Shioda, Algebraic cycles on certain K3 surfaces in char. p, Proc. Int. Conf. on Manifolds, Univ. Tokyo Press, 1975.

[2] —— and N. Mitani, Singular abelian surfaces and binary quadratic forms, in Springer Lecture Note 412, 1974

[3] ——, Some remarks on abelian varieties, (to appear)