数理解析研究所講究録
第274巻 1976年 7-9

A. A. CARACUBA による VINOGRADOV 積分の評価について

名工大 数学教室 江田義計

§1. 自然数 k ($k \geq c$, 以下 c は正の常数), $s > s_0$ に対し次の連立 DIOPHANTINE 方程式

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 + \cdots + x_s = y_1 + \cdots + y_s, \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ x_1^k + \cdots + x_s^k = y_1^k + \cdots + y_s^k, \\ 1 \leq x_i,\ y_i \leq P \quad (i = 1, 2, \cdots, s) \end{cases}$$

の解 $(x_1, \cdots, x_s, y_1, \cdots, y_s)$ の解の個数 $I_k(P)$ を求めることは大変興味あることであり，実は WARING 問題等この種の型の問題の基礎となるものである。

L. K. HUA は 1952年に中国科学の中で

$$(2) \quad \begin{cases} k \geq 2, \quad s_0 = [k^2(3\log k + \log\log k + 4)] \text{ で} \\ I_k(P) \sim c\, P^{2s - \frac{1}{2}k(k+1)} \end{cases}$$

を証明している。

この結果は VINOGRADOV による方法を改良進展させたものの一つである。VINOGRADOV の方法については英訳本：THE

METHOD OF TRIGONOMETRICAL SUMS IN THE THEORY OF NUMBERS (1954), [1] によって見られる。

WARING 問題というのは

自然数 $k \geq 2$ に対し，すべての十分大きな自然数 N を

$$N = x_1^k + \cdots + x_s^k$$

のように非負の整数 $x_1, \ldots, x_s$ で表わすような s を求めること，または，このような s の最小値 $G(k)$ やこれの最良の上界を求めることである。VINOGRADOV は 1937 年に彼の CIRCLE METHOD によって

$$\begin{cases} k \geq 3 \text{ のとき} \\ G(k) < 3k\log k + 11k \end{cases}$$

を与えているが（[1] 参照） 更に苦心の改良によって 1959 年には

$$(3) \quad \begin{cases} k \geq 170000 \text{ に対し} \\ G(k) < k(2\log k + 4\log\log k + 2\log\log\log k + 13) \end{cases}$$

を得ている。

§2. (1) の解の個数を評価する問題は

$$f(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_1 x$$

としたとき，次の VINOGRADOV 積分とも平均値定理ともよばれている積分

$$I = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i f(x)} \right|^{2s} d\alpha_1 \cdots d\alpha_k$$

を評価することに帰着される。これは VINOGRADOV によって開発された方法であり、[1] を見るがよい。(3) を得るにはこの平均値定理が必要であるが、それには (2) の形でなくとも次の形でよい；

$$(4) \qquad \begin{cases} s > c_1 k^2 \log k \quad \text{のとき} \\ I_k(P) \leqq c\, P^{2s - \frac{1}{2}k(k+1)} \end{cases}$$

A. A. Karacuba は 1973 年に (4) を精密な形で

$$(5) \qquad \begin{cases} k \geqq 2,\ P \geqq 1,\ s \geqq c\, k^2 \log k \quad \text{のとき} \\ I \leqq e^{c_1 k^2 \log k}\, P^{2s - \frac{1}{2}k(k+1)} \end{cases}$$

を与えている。(c_1, c はここでは絶対常数である)。(5) の結果もその方法も大変面白く優れている。有限次代数体 K でも WARING 問題は論ぜられて、$G(k)$ と類似の関数 $G_K(k)$ を定義することが出来るが、もし (5) が K で求められれば現在知られている $G_K(k)$ の上界を更に少しよく出来ることを注意する。このことは可能であろう。