数理解析研究所講究録
第274巻 1976年 50-68

数論的函数と総和公式

岡山大 理　　鹿野　健

良く知られているように，数論では数論的函数の間に成り立つ解析的な関係式（等式）の研究は重要なテーマの1つであり，特論，一般論ともにそれぞれ長い歴史がある。ここでは総和公式（summation formula）という観点から，数論の古典的な有名問題である『約数問題』や『円の（格子点）問題』などの考察から Voronoï（1904）が得た，いわゆる『Voronoï 等式』（Voronoï identity）に関する話題をまず取り上げ，次にそこで得られた総和公式の幾つかの応用について述べよう。それらは，主として Berndt による最近の一連の研究結果を中心にしたものであり，証明抜きの展望である。

1. 総和公式として最も有名なものは，次の Poisson の総和公式であろう。　いま，$f(x)$ を $[a, b]$ 上の有界変動函

数とすると,

(1) $$\frac{1}{2}{\sum_{a\leq n\leq b}}'\{f(n+0)+f(n-0)\}=\int_a^b f(x)\,dx+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f(x)\cos(2\pi nx)\,dx,$$

が成り立つ。 ここに,$\sum$の肩のプライム $'$ は, $n=a$, b に対する項はそれぞれ $\frac{1}{2}f(a+0)$, $\frac{1}{2}f(b-0)$ だけを加えるという意味と約束する。

このPoissonの総和公式は数論のみならず,数学の他の分野でも種々の結果を導く重要な道具であり,またその拡張や変形も幾つか知られている。 G. Voronoï [33] は,このPoisson総和公式の1つの一般化と言える次の予想に到達した。

【Voronoïの予想】 $a(n)$ が数論的函数ならば,等式

(2) $$\sum_{a\leq n\leq b}{}' a(n)f(n)=\int_a^b f(x)\,\delta(x)\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\int_a^b f(x)\,\alpha(nx)\,dx,$$

が,(a, b) 上で高々有限個の最大値と最小値を有するような任意の連続函数に対して成立するように,解析函数 $\delta(x)$, $\alpha(x)$ が $f(x)$ には無関係に,ただ $a(n)$ にのみ依存して定まる。
($'$ の意味は (1) の場合と同様.)

例えば, $a(n)\equiv 1$ のときはPoisson総和公式(1)であり,このときは $\delta(x)\equiv 1$, $\alpha(x)=2\cos(2\pi x)$ である。 しかし,これ以外の場合に(2)を検証することは極めて困難となる。Voronoï は大変な計算(それは十分に説得性のあるものとは

言い難い）の末に，$a(n) = d(n)$ （約数函数）の場合に

$$\delta(x) = \log x + 2\gamma,$$

$$\alpha(x) = 4K_0(4\pi\sqrt{x}) - 2\pi Y_0(4\pi\sqrt{x}),$$

となることを得た。ここに，γ は Euler 定数であり，K_0，Y_0 はそれぞれ（第２種の）位数 0 の変形ベッセル函数，位数 0 のベッセル函数を表わす。翌 1905 年には，$a(n)=r(n)$ についても同様な結果；

$$\delta(x) \equiv \pi, \quad \alpha(x) = \pi J_0(2\pi\sqrt{x})$$

が得られると述べた。ここに，$r(n)$ は不定方程式

$$n = u^2 + v^2 \quad (u, v \in \mathbb{Z})$$

の解の個数を表わし，J_0 は位数 0 の第１種ベッセル函数を表わす。これらの結果は後に Sierpiński や Landau 等によって証明され，Hardy [19] はそれらの結果をいわゆる Ω－結果を得るのに用いた。Voronoï の研究は，それ以後の発展に決定的な示唆と方向を与えたことで極めて重要であると同時に，数論の問題に初めてベッセル函数を登場させた点でも意義深い。　Voronoï 以後，上述のように，

特論，すなわち上のように個別の数論的函数 $a(n)$ について (2) を論ずるという問題はかなり進んだが，一般論の方はそれに比べると研究は非常に少なく，最初の結果は Koshliakov (1929) によって得られた。Koshliakov [25] は，$a(n)$ を

あるDirichlet級数といわゆるテータ級数関係式とに関連する数論的函数で，かつ$f(x)$は解析函数でしかもある種の極限演算の交換（Σと$\int$の）が可能であるようなものに限って(2)を証明したのであるが，fに関する条件は上のようにかなり漠然としたものに留めている。 Poisson 総和公式(1)が Fourier 変換論の立場から論じられることは良く知られているが，同様な観点から(2)を論ずることは Ferrar [11, 12], Guinand [13, 14, 15] などによって行われた。 そこでは，$f \in C^1[a, b]$ あるいは $f \in C^2[a, b]$ としたり，fは有界変動としたりして，更にある種の変換が成立するようなものに限られた。 特に Guinand はそれらの研究を通じて，概周期函数による総和公式を考察し，それによって Riemann 予想と同値な命題を得た [16, 17]。

複素函数論と Dirichlet 級数による，という点では Koshliakov と同じであるが，新たに『函数等式』という条件を満たすfについて考察したのが Bochner [8] であり，それは鋳論の方向として Chandrasekharan 等によって押し進められた。 (2)を得る際の重要なステップの1つは，(2)の右辺の無限級数の収束することの証明であるが，Chandrasekharan はそこに三角級数の同程度収束（equiconvergence）に関する Zygmund の定理を援用した [9, 10] が，そうせずとも初

等的にしかも更に詳しい結果（いわゆる summability index について）が証明できることを著者は示した[23]。Bochner と Landau の方法[26]を用いて，最近 Berndt は一連の結果を(2)の一般論について得たので，そのうちの代表的なものを次に挙げよう[2,3,5,6]：

$$\{\lambda_n\} : \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots \to \infty,$$

$$\{\mu_n\} : \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n < \cdots \to \infty,$$

とし，$\{a(n)\}$, $\{b(n)\}$ は恒等的には 0 でない複素数列で，2つの Dirichlet 級数

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{\lambda_n^s}, \quad \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{\mu_n^s},$$

$$(s = \sigma + it)$$

はともにある半平面で収束し，絶対収束(横)座標（abscisa）σ_a, σ_a^* をそれぞれ持つとする。ある実数 r について，

$$\Gamma(s)\varphi(s) = \Gamma(r-s)\psi(r-s),$$

が成り立つとき，φ と ψ は『函数等式』（functional equation）を満たすと言う。ここに，次のような性質を具えた有理型函数 $F(s)$ が存在するものとする。

(i) $$F(s) = \Gamma(s)\varphi(s) \quad \cdots \sigma > \sigma_a,$$
$$= \Gamma(r-s)\psi(r-s) \quad \cdots \sigma < r - \sigma_a^*,$$

(ii) $\lim_{|t|\to\infty} F(s) = 0$ がσについてコンパクト一様に成立する，

#)(iii) $F(s)$ は高々有限個の極（特異点）を持つのみである。

さて，$b(n)$ については更に

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{0\le h\le 1} \left| \sum_{m^2\le\mu_n\le(m+h)^2} b(n)\mu_n^{\frac{1}{2}-\sigma} \right| = 0,$$

と仮定し，$x>0$ に対して

(3) $$A(x) = {\sum_{\lambda_n\le x}}' a(n),$$

と置く。　そして，$q\in\mathbb{Z}^+$ に対して，

$$Q_q(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_q} \frac{\Gamma(s)\varphi(s)}{\Gamma(s+q+1)} x^{s+q}\, ds,$$

とする。　ここに，C_q は被積分函数の極をすべて囲むような積分路（cycle）とする。

すると，$\sigma_a^* < \frac{1}{2}r + \frac{3}{4}$ のとき，

(4) $$D(x) \overset{\text{def}}{=} A(x) - Q_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{\mu_n^r} I_0(\mu_n x),$$

が成り立つ。　ここに，$q=0, -1$ に対して，

#) 原論文ではこうなっていないが，実は本質的にはこのように単純になる。

$$I_q(x) = x^{\frac{r+q}{2}} J_{r+q}(2\sqrt{x}),$$

である。(4)の右辺の級数は，$x > 0$ についてコンパクト有界収束する。

〚定理 1〛 $f \in C^1(0,\infty)$ で $0 < a < \lambda_1 < x < \infty$ ならば，

(5) $$\sum_{\lambda_n \leq x}{}' a(n) f(\lambda_n) = \int_a^x Q_0'(t) f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{\mu_n^{r-1}} \times$$
$$\times \int_a^x I_{-1}(\mu_n t) f(t)\,dt.$$

この定理の証明は，上述の準備の下では最早簡単であり，本質的には部分和（partial summation）と部分積分に他ならない。#)（$I_0'(x) = I_{-1}(x)$ に注意。）しかし，$a = 0$ のときには（この方法では）更に他の付加条件を必要とする。

〚定理 2〛 $f \in C^1(0,\infty)$ とし，

$$\lim_{t\to 0} D(t) f(t)$$

$$\int_0^x Q_0'(t) f(t)\,dt$$

がともに有限に存在し，かつ $D(t)$（の右辺の級数）が $0 \leq t \leq x$ で有界収束するならば，(5)は $a = 0$ に対しても成立する。

#) この点に関して，Hardy の [20] は示唆的である。

$f(t)$ を有界変動函数とすれば次のような結果を得る。

〖定理 3〗 $f(t)$ が $[a, x]$ $(0 < a < \lambda_1 < x < \infty)$ で有界変動ならば,

(6) $$\frac{1}{2}\sum_{\lambda_n \le x}{}' a(n)\{f(\lambda_n+0)+f(\lambda_n-0)\}$$
$$= \int_a^x Q_0'(t) f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{\mu_n^{r-1}} \int_a^x I_{-1}(\mu_n t) f(t)\,dt .$$

$a=0$ の場合にも(6) が成り立つことを主張するには，この方法ではなお幾つかの付加条件を要する。 また，$x=\infty$ の場合にも，別の付加条件を設ければやはり(6)が次の意味で成り立つ。

(6′) $$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\sum_{\lambda_n \le x}{}' a(n)\{f(\lambda_n+0)+f(\lambda_n-0)\} - \int_a^x Q_0'(t) f(t)\,dt\right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{\mu_n^{r-1}} \int_a^{\infty} I_{-1}(\mu_n t) f(t)\,dt .$$

上の定理 3，およびそれに続く拡張では，いずれも右辺の級数の収束性が問題であり，付加条件はすべてそこから派生するものと言えるが，著者が [24] で示した方法の類似によって，Berndt とは異なる付加条件の下で(6) および(6′) の成立することが示される。 しかしそれとても簡単なものとは言い難く，かつ(6′) については，前述した Guinand (あ

るいは Ferrar）の立場，すなわち変換論の観点からのアプローチの方が本筋ではないかと思われる。（(6')は,いわゆる Parseval 等式に対応するものとなる。）また，Koshliakov の示した方法を更に追求することも必要であり，それらすべての相互関係（特に付加条件について）を調べることは重要と思われるが，著者はまだ十分にそれを解明できないでいる。

2. 先に得られた総和公式には幾つかの応用がある。特に興味を持って考えられたのが，$a(n)$ が指標（Dirichlet の）の場合であり，そこからディリクレの L－函数 $L(s,\chi)$ について $L(n,\chi)$ の値をある種の cotangent の有限和で表現するという Apostol [1] や Leopoldt [27] などの結果と同等のものが得られることを Berndt は示している [3, 5, 6]。また，いわゆる『一般 Bernoulli 多項式』を用いれば，古典的な Euler − Maclaurin 総和公式の一般化が得られ，その応用も色々とある。 ここでは,それらの特殊な場合の1つである『周期的 Poisson 総和公式』（periodic Poisson summation formula）のみについて述べよう：

$A=\{a_j\}$ （$j\in\mathbb{Z}$）を周期 $k\in\mathbb{N}$ を持つ複素数列とし，

$$G(z,A)\overset{\mathrm{def}}{=}\sum_{0\le n\le k-1} a_n e^{2\pi i n z/k},$$

としよう。 すると，$G(\chi) \overset{\mathrm{def}}{=} G(1, \chi)$ は，k を法とする原始（ディリクレ）指標 $\chi(n)$ に対して，通常の Gauß 和である。 次に，

$$b_j(k) = b_j \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1} a_m e^{-2\pi i j m/k},$$

とすると，これは $\{a_j\}$ のいわゆる『有限 Fourier 変換』である。その逆変換から，

$$a_j = \sum_{m=0}^{k-1} b_m e^{2\pi i j m/k} \quad (= G(j, B)),$$

が得られる。 特に $a_n = \chi(n)$ の場合は，Gauß 和の分解公式によって，

$$b_j = \frac{1}{k}\bar{\chi}(-j)\, G(\chi),$$

を得る（Hasse [22]，H. Schmidt [31]，Berndt [4]）。

以下では，A が偶（even）であるとは

$$a_j = a_{-j}, \quad (j \in \mathbb{Z})$$

となることを言い，A が奇（odd）であるとは

$$a_j = -a_{-j}, \quad (j \in \mathbb{Z})$$

となることを言うものとする。 $a_n = \chi(n)$ の場合は，

$$A \text{ even} \iff \chi(-1) = 1,$$

$$A \text{ odd} \iff \chi(-1) = -1,$$

である。

すると，Berndt－Schoenfeld の主定理は次のようである [5, 6, 7]。

〖定理 4〗 $f(x)$ が $[c, d]$ で有界変動ならば，

(7)
$$\frac{1}{2}\sum_{c\le n\le d}{}' a_n\{f(n+0)+f(n-0)\} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} b_n\int_c^d e^{2\pi i n x/k} f(x)\,dx.$$

この系として，次の定理が直に得られる。

〖定理 5〗 $f(x)$ が $[c, d]$ で有界変動で，A が偶ならば，

(8)
$$\frac{1}{2}\sum_{c\le n\le d}{}' a_n\{f(n+0)+f(n-0)\} = b_0\int_c^d f(x)\,dx + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_c^d f(x)\cos(2\pi n x/k)\,dx,$$

となり，A が奇ならば，

(9)
$$\frac{1}{2}\sum_{c\le n\le d}{}' a_n\{f(n+0)+f(n-0)\} = 2i\sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_c^d f(x)\sin(2\pi n x/k)\,dx.$$

この定理 5 の特別な場合は，既に Mordell [29]，Lerch [28] などによって得られていたが，$a_n=\chi(n)$ については Guinand [16, 18] と Berndt [3, 6] によって初めて与えられた。その場合を述べれば次のようになる。

〖定理 6〗 $f(x)$ が $[c, d]$ で連続な有界変動函数ならば，k を法とする原始偶指標 $\chi(n)$ に対して，

$$(10) \qquad {\sum_{c \le n \le d}}' \chi(n) f(n) = \frac{2}{k} G(\chi) \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}(n) \int_c^d f(x) \cos(2\pi nx/k)\, dx,$$

となり，原始奇指標 $\chi(n)$ に対しては，

$$(11) \qquad {\sum_{c \le n \le d}}' \chi(n) f(n) = -\frac{2i}{k} G(\chi) \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}(n) \int_c^d f(x) \sin(2\pi nx/k)\, dx,$$

となる。

この定理 6 は，様々な応用を持っていることが Berndt [5] および Berndt − Schoenfeldt [7] によって示されているが，その端的な一例として，有名な Dirichlet の定理：

$$(12) \qquad \text{素数 } p \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow \sum_{0 < n < \frac{p}{2}} \left(\frac{n}{p}\right) > 0,$$

($\left(\frac{n}{p}\right)$ は Legendre 記号)

の簡単な証明が得られる（良く知られているように，Dirichlet の原証明は彼の類数公式によるものである.#)）。のみならず，k を法とする実原始奇指標 $\chi(n)$ に対して，

$$\sum_{0 < n < \frac{k}{2}} \chi(n)$$

の符号を決定できるのである。

定理4は，幾つかの反転公式を与えるという点からも興味深い。それを以下に述べよう。

〖定理7〗 $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $ac \neq 0$, $ack+b \equiv 0$ $(\mathrm{mod}\ 2)$ とすると，

$$(13)\quad \sum_{n=0}^{|c|k-1} a_n \exp(\pi i a n^2/ck + \pi i b n/ck)$$
$$= \left(\frac{|c|k}{|a|}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\pi i b^2/4ack + \frac{\pi}{4} i\,\mathrm{sgn}(ac)\right) \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{|a|k-1} b_n \exp\left(-\pi i c n^2/ak - \pi i b n/ak\right).$$

この定理で $k = a_0 = 1$ とした特別の場合が次の結果であるが，それは一種の拡張されたGauß和に対する反転公式と言える。

(系) $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $ac \neq 0$, $ac+b \equiv 0$ $(\mathrm{mod}\ 2)$ とすると，

$$\sum_{0 \le n < |c|} \exp(\pi i a n^2/c + \pi i b n/c) = \left|\frac{c}{a}\right|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\pi i \frac{b^2}{4ac} + \frac{\pi i}{4} \cdot \frac{|ac|}{ac}\right) \times$$

#) しかし，真に初等的な(12)の証明は現在も得られていない。これについて，高木 [32] p.383 の叙述を見よ。

$$\times \sum \exp\left(-\pi i \frac{c}{a} n^2 - \pi i \frac{b}{a} n\right).$$

これらの結果と関係が深く，それ自身としても重要な，いわゆるテータ公式の1つの一般化が次の結果である。

〚定理 8〛 g，h は実数で，$s=\sigma+it$ $(\sigma>0)$ とし，

$$\vartheta(s,g,h;A) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(-\pi s(n+g)^2/k + 2\pi i n h/k\right),$$

とすると，

$$\vartheta(s,g,h;A) = \left(\frac{k}{s}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i g h/k} \cdot \vartheta\left(\frac{1}{s}, h, -g; B\right),$$

が成り立つ。ここに，右辺の平方根はその主枝を取るものとする。

この定理8から，定理7を導くこともできる。また，Berndt による定理8の証明は定理4と Cauchy の積分定理によるものであるが，後者によらずに実解析の範囲内で証明することも可能である。

3. Lambert 級数に対する Tauber 型定理の研究において，Hardy と Littlewood [21] は彼等の得た Tauber 条件が best であることを示すために，

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right), \qquad \sum_{n\le x}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{x}{n}\right),$$

の2つの函数を導入して，それらが $x\to\infty$ のときに非有界であることを巧妙に証明した。 Segal [30]はこれに関連して，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right), \tag{14}$$

を考え（これと $\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ との違いは $O(1)$ である。），

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\left(\frac{x}{n}\right) = \pi x - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi x}{n}\right)^{\frac{1}{2}} J_1(4\sqrt{\pi x n}), \tag{15}$$

を得た。 もし(15)の両辺が項別微分できるならば，それから(14)に対する表現として，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi\sum_{n=1}^{\infty} J_0(2\sqrt{2\pi n x}), \tag{16}$$

を得るが，これは著者[23]によって否定された。 (15)を得るためにSegalが用いた方法は複素函数論によるものであるが，普通のPoisson総和公式によって,より簡単に証明できることをBerndtは注意している。 この(15)は，前述の定理5によれば，次のように一般化される[5]。

〘定理 9〙 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$は 2. の周期的Poisson総和公式の所で定義された数列とする。 $A=\{a_n\}$ が偶ならば，

$$(17)\qquad 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin^2\left(\frac{x}{n}\right) = a_0\frac{\pi x}{k} - \frac{b_0}{2} + \sum a_n\left(\frac{\pi x}{kn}\right)^{\frac{1}{2}} J_1(4\sqrt{\pi n x/k}),$$

となり，A が奇ならば

$$(18)\qquad 2i\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{2\pi x}{kn}\right)^{\frac{1}{2}} J_1(2\sqrt{2\pi n x/k}).$$

この系として，a_n が k を法とする（基本指標でない）原始指標の場合は次のようになることが得られる。

〖定理 10〗 $\chi(n)$ を k を法とする（基本指標でない）原始指標とする。 χ が偶のときは，

$$(17')\qquad 2\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\sin^2\left(\frac{x}{n}\right) = G(\chi)\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}(n)\left(\frac{\pi x}{kn}\right)^{\frac{1}{2}} J_1(4\sqrt{\pi x n/k}),$$

となり，χ が奇のときは，

$$(18')\qquad 2i\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\sin\left(\frac{x}{n}\right) = G(\chi)\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}(n)\left(\frac{2\pi x}{kn}\right)^{\frac{1}{2}} J_1(2\sqrt{2\pi x n/k}),$$

となる。

Berndt は述べていないが，今度は(17′)の両辺が項別微分できて，(16) に対応する結果（χ は偶）

$$(16')\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{\pi}{k}G(\chi)\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}(n) J_0(2\sqrt{2\pi x n/k}),$$

が得られる。同様に(18′) の両辺が項別微分できて，χ が奇

のときは

$$(19)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n}\cos\left(\frac{x}{n}\right) = -\frac{\pi i}{k}G(\chi)\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\chi}(n)J_0\left(2\sqrt{2\pi x n/k}\right),$$

を得る。　しかし，(16′) において χ が奇のときと，(19) において χ が偶のときはそれぞれの右辺はどうなるのか，Berndt の定理 9，10 からは出て来ない。　しかし，ベッセル函数の積分表示に関連する Hardy の幾つかの結果を用いて Berndt の証明を少し変更すれば，以上の残りの場合も導くことができるのみならず，更に一般に，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\exp\left(\frac{ix}{n}\right),$$

という和に対しても同様な表現を得ることができるのである。

[文 献]

[1] T.M. Apostol, J. Number Theory 2 (1970) 223-234.

[2] B.C. Berndt, Trans. Amer. Math. Soc. 160 (1971) 139-156.

[3] __________, Proceedings of a conference on the theory of arithmetic functions, Kalamazoo, 1971, Springer Lecture Notes 251, 1972, 21-36.

[4] __________, Duke Math. J. 40 (1973) 145-156.

[5] __________, Theory and Application of Special Functions, Academic Press, 1975, 143-189.

[6] __________, J. Number Theory 7 (1975) 413-445.

[7] B.C. Berndt and L. Schoenfeld, Acta Arith. 28 (1975) 23-68.

[8] S. Bochner, Ann. of Math. (2) 53 (1951) 332-363.

[9] K. Chandrasekharan and R. Narashimhan, Ann. of Math. 74 (1961) 1-23.

[10] K. Chandrasekharan, Arithmetical Functions, Springer, 1970.

[11] W.L. Ferrar, Summation formulae.... , Compositio Math. 1 (1935) 344-360.

[12] __________, Summation formulae.... II, ibid 4 (1937) 394-405.

[13] A.P. Guinand, Proc.London Math. Soc. (2) 43 (1937) 439-448.

[14] __________, Quart. J. Math. Oxford Ser. 9 (1938) 53-67.

[15] __________, ibid 10 (1939) 38-44.

[16] __________, Ann. of Math. 42 (1941) 591-603.

[17] __________, Acta Math. 101 (1959) 235-271.

[18] __________, Quart. J. Math. Oxford Ser. 16 (1945) 59-63.

[19] G.H. Hardy, Proc. London Math. Soc. (2) 15 (1916) 1-25.

[20] __________, Messenger of Math. 30 (1901) 185-187.

[21] G.H. Hardy and J.E. Littlewood, Proc. London Math. Soc. 41 (1936) 257-270.

[22] H. Hasse, Rend. Mat. e Appl. (5) 21 (1962) 9-27.

[23] T. Kano, Math. J. Okayama Univ. 16 (1974) 129-136.

[24] ______, ibid 18 (1975) 1-11.

[25] N.S. Koshliakov, Messenger of Math. 58 (1929) 1-23.

[26] E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Zweiter Band, Chelsea reprint, 1947.

[27] H. Leopoldt, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 22 (1958) 131-140.

[28] M. Lerch, Acta Math. 29 (1905) 333- 424.

[29] L. J. Mordell, Proc. Cambridge Philos. Soc. 24 (1928) 585-596.

[30] S.L. Segal, J. London Math. Soc. (2) 4 (1972) 385- 393.

[31] H. Schmidt, S. -B. Bayer. Akad. Wiss. Math. -Natur. Kl. (1972) 87-99.

[32] 高木貞治，初等整数論講義，共立 1971.

[33] G. Voronoi, Ann. de l'École Norm. Sup. (3) 21 (1904) 207-267, 459-533.