数理解析研究所講究録
第 274 巻 1976 年 73-82

自由分配束の位数

東女大・文理　　山本幸一

1. Dedekind は代数体の整イデアル $\neq 0$ の全体が，和と共通部分を基本演算とする分配束を作ることを認知した。たとえば2つのイデアル $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ からは他に $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ が出来る. 3つのイデアル $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ からだと $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}+\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}+\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}$ の都合 18 個が出来る.

Dedekind は4つのイデアルの場合 166 個が出来ることを検証して，一般に n 個のイデアルで生成される自由分配束の位数を求める問題を提出した。1897 年のことである。

2. 束は2種類の基本演算をもつが，便宜上それらを加法と乗法の形に書くと公理系

(i)	$(x+y)+z=x+(y+z)$, $(xy)z=x(yz)$	結合律
(ii)	$x+y=y+x$, $xy=yx$	交換律
(iii)	$x+x=x$, $xx=x$	巾等律

(iv) $x+xy=x,\ x(x+y)=x$ 吸收律

(v) $x(y+z)=xy+xz,\ x+yz=(x+y)(x+z)$ 分配律

の(i)〜(iv)を満足させる. (i)〜(v)を成立させるのが分配束である. $x+y=x$ と $xy=y$ とは同値で, これを $x \geqslant y$ と書き表わす時, $\geqslant$ は半順序集合における順序の公理

$$x \geqslant x, \qquad x \geqslant y,\ y \geqslant x \longrightarrow x=y, \qquad x \geqslant y,\ y \geqslant z \longrightarrow x \geqslant z$$

を成立させる.

さて n 個の元 $1, 2, \ldots, n$ から成る離散半順序集合, すなわち $x \geqslant y$ が $x=y$ を意味する半順序集合を n と略記し, 又, n 個の元 $0, 1, \ldots, n-1$ から成る全順序集合を $\boldsymbol{n}$ と書くことにする. さらに半順序集合 Q から半順序集合 P の中への単調函数 f, すなわち

$$x \geqslant y \quad \longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$$

なる f の全体の作る半順序集合を P^Q と書きあらわすものとする.

3. Dedekind の問題自身はまだ解かれていないけれども, n 個の生成元をもつ自由分配束の束論的構造は 1913 年 Skolem によって完全に解かれた. 即ち n 個の生成元をもつ自由分配束に最大元 I, 最小元 O を添加して考えると,

定理 (Skolem). n 個の生成元をもつ自由分配束は $\mathbf{2}^{\mathbf{2}^n}$ と同型である.

が成立する．その証明を簡単に述べる．$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を生成元にもつ自由分配束 $\mathfrak{F}_n$ を決めるのにはまず，積の全体をつくり，次にそれらの和を作れば用が足りる．積は $\{1, 2, \cdots, n\}$ の部分集合 σ と1対1に関係する

$$x_\sigma = \prod_{i\in\sigma} x_i$$

だけだが，$\sigma \subseteqq \tau$ の時 $x_\sigma \geqq x_\tau$ だから $\mathbf{2}^n$ の中で $\sigma \geqq \tau$ は $\sigma \subseteqq \tau$ の意味に取ると，空集合 $\emptyset$ が最大元で $x_\emptyset$ は $\mathfrak{F}_n$ の最大元 I となる．次に和を作るのには $\sum x_\sigma$ の形の和で項数をできるだけ多くえらんでおけば $\sigma \geqq \tau$ の時 x_τ と共に x_σ も現われるわけで，上記の和を

$$\alpha = \sum_{\sigma\in\mathbf{2}^n} \alpha_\sigma x_\sigma \quad , \quad \alpha_\sigma \in \mathbf{2} = \{0, 1\}$$

の形に書くと，α は $\mathbf{2}^n$ から $\mathbf{2}$ の中への単調函数 $(\alpha_\sigma)_{\sigma\in\mathbf{2}^n}$ と同一視される．なお空なる和には，凡ての $\alpha_\sigma = 0$ なる $\mathfrak{F}_n$ の最小元 0 が対応する．I と 0 とは Dedekind 流の数え方では考慮のうちに入れられていないことに注意する．

4. 前定理にいうように最大元 $I = x_\emptyset$，最小元 $0 = \sum_\emptyset x_\sigma$ を添加した自由分配束を $\mathfrak{F}_n$ で表わし，その位数を $f(n)$ で表わす．すなわち $\mathfrak{F}_n \cong \mathbf{2}^{\mathbf{2}^n}$，$f(n) = \# \mathfrak{F}_n$ である．

$f(n)$ を決定することが Dedekind の問題で，$f(1) = 3$，$f(2) = 6$，$f(3) = 20$ の外に文献によれば

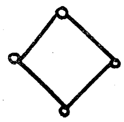
$f(4)=$	168	(R. Dedekind 1897)
$f(5)=$	7581	(R. Church 1940)
$f(6)=$	782 8354	(M. Ward 1946)
$f(7)=$	2 4146 8204 0998	(R. Church 1965)
$=$	2 2080 6128 8138	(F. Lunnon 1969)

である．$f(7)$ に対する相拮抗する結果は，最近前者の正しかったことが知られた．M. Krieger (私信 1975)，Berman-Burger-Kohler (AMS, Notices 1975年10月) がこのことを伝えている．

問題がこれだけ分明であるのにも拘わらず，矛盾する結果が飛び出す原因は無論計算基盤の相違にある．計算時間を短縮する意味から妥当と思われるのは次の手続きであろうか．

まず Skolem の定理から

$$\mathfrak{F}_{n+1}\cong\mathfrak{F}_n^{\mathbf{2}},\quad \mathfrak{F}_{n+2}\cong\mathfrak{F}_n^{\mathbf{2}^2};$$

$\mathbf{2}=$  ，$\mathbf{2}^2=$  でこれらから $\mathfrak{F}_n$ の中への単調函数の全体を求めることになる．

$\mathfrak{F}_n$ の構造はすでに分ったものとして，束 $\mathfrak{F}_n$ の関連行列 M は，$\mathfrak{F}_n$ の $f(n)$ 個の元を番号にもつ $f(n)$ 正方行列で，(α,β) 成分が $\alpha\geqq\beta$ の時に 1，そうでない時 0 なるものとする．一般に k次正方行列 A のノルム $N(A)$ は通例に従って

$$N(A)=\mathrm{tr}\,({}^tAA)=\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}^2$$

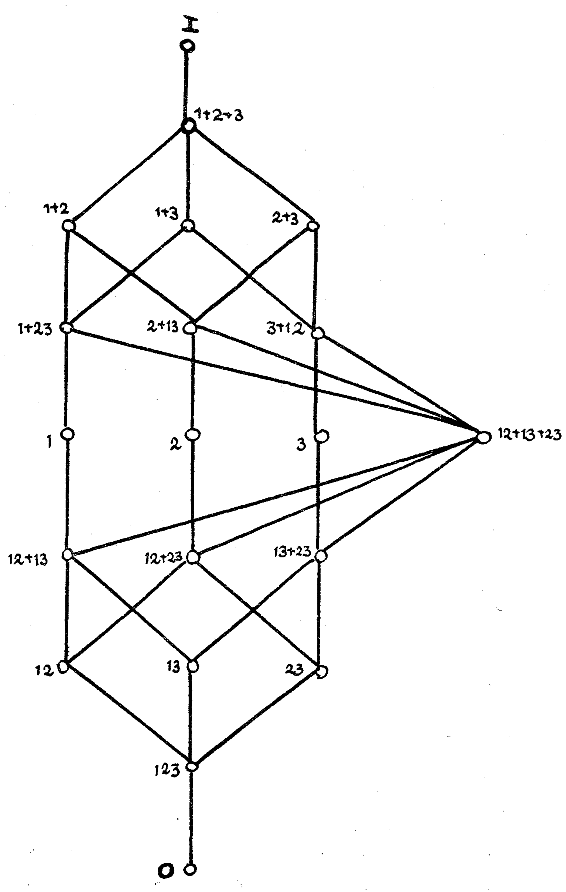
で定義されるものとすると，

$$f(n+1)=N(M),$$

$$f(n+2)=N(M^2)$$

を得る. その意味で $\mathfrak{F}_5$ の構造を熟知していたChurchが $f(7)$ の正解を得たことは不思議ではない。

例題として $\mathfrak{F}_3$ を既知として $f(4)$, $f(5)$ を計算してみることにする. $\mathfrak{F}_3$ は§1に述べたように20個の元から成り，その図は：



よって，

$$
M=\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
\cdot&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&1&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&1&1&\cdot&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&\cdot&1&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&1&1&\cdot&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&\cdot&1&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1
\end{array}
$$

$$
M^2=\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1&2&3&3&3&5&5&5&6&6&6&9&11&11&11&14&14&14&19&20\\
\cdot&1&2&2&2&4&4&4&5&5&5&8&10&10&10&13&13&13&18&19\\
\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&2&2&\cdot&3&3&\cdot&4&6&6&5&9&8&8&13&14\\
\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&2&\cdot&2&3&\cdot&3&4&6&5&6&8&9&8&13&14\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&2&2&\cdot&3&3&4&5&6&6&8&8&9&13&14\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&2&\cdot&\cdot&2&4&2&2&6&6&5&10&11\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&2&\cdot&2&2&4&2&6&5&6&10&11\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&2&2&2&2&4&5&6&6&10&11\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&2&\cdot&\cdot&3&3&\cdot&5&6\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&2&\cdot&3&\cdot&3&5&6\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&2&\cdot&3&3&5&6\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&2&2&2&4&4&4&8&9\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&2&2&\cdot&4&5\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&2&\cdot&2&4&5\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&2&2&4&5\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&2&3\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&2&3\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&2&3\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&2\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1
\end{array}
$$

これから直ちに $f(4)=N(M)=168$, $f(5)=N(M^2)=7581$ を得る.
関連行列 M の番号は $\mathcal{F}_3$ の図を上から下へ, 左から右へとたどって打ってある.

同一のことを $\mathcal{F}_5$ にあてはめて, 7581 次正方行列 M の取扱いから $f(7)$ の値が求められるであろう.

5. $f(n)$ の上からの評價. 文献により次の不等式が知られている.

$$f(n) \leqslant 2^{2^n} \qquad \text{(自明)}$$

$$f(n) \leqslant n^{\binom{n}{[n/2]}} \qquad \text{(E. N. Gilbert 1954)}$$

$$f(n) \leqslant \left(\frac{2^n}{\binom{n}{[n/2]}} \right)^{\binom{n}{[n/2]}} = \left(\sqrt{\frac{\pi n}{2}} (1+\epsilon_n) \right)^{\binom{n}{[n/2]}} \qquad \text{(山本 1954)}$$

$$f(n) \leqslant \left(2^{4.23\,(1+\epsilon_n)} \right)^{\binom{n}{[n/2]}} \qquad \text{(B. K. Korobkov 1962-65)}$$

$$f(n) \leqslant 3^{\binom{n}{[n/2]}} \qquad \text{(G. Hansel 1966)}$$

$$f(n) \leqslant \left(2^{(1+\epsilon_n)} \right)^{\binom{n}{[n/2]}}, \quad \epsilon_n = O\left(\frac{1}{\log n} \right) \qquad \text{(D. Kleitman-G. Markowsky 近刊)}$$

一方

$$f(n) \geqslant 2^{\binom{n}{[n/2]}}$$

は殆んど自明だから，Kleitman-Markowsky の結果はかなり'最終結果'に近い様相を示すといえる。

これらの結果に一貫して現われる量 $\binom{n}{[n/2]}$ は，束 $\mathbf{2}^n$ における比較不能な元の最大個数で，$\mathbf{2}^n$ を $\binom{n}{[n/2]}$ 個の全順序集合の和として表わすことから諸種の不等式が得られる．典型的なしかも画期的な例として Hansel の不等式の証明を紹介する．

$\mathbf{2}^n$ の元すなわち $\{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合 σ は特性函数列 $(\theta_\sigma(1), \theta_\sigma(2), \dots, \theta_\sigma(n))$ で与えられる．むろん $\theta_\sigma(i)$ は i が σ に属するか，しないかに従い 1 又は 0 を取るものである．しかし，記号を少し変えて $\theta_\sigma(i)$ は括弧 (又は) であって

$$\theta_\sigma(i) = (\qquad (i \in \sigma \text{ の時}),$$
$$\theta_\sigma(i) =) \qquad (i \notin \sigma \text{ の時})$$

と定めるものとする．$\mathbf{2}^n$ の元にこのような括弧の列，たとえば) (( ) ( ))) (のようなものが対応する．括弧が閉じた括弧の一部であるものと，浮き上っているものに区分して，それぞれ束縛された括弧又は自由な括弧と呼ぶ．

同一の場所に同一の束縛された括弧を有する σ は同値であるということにすると，それは同値関係で，一つの同値類中の σ につき，その自由成分だけに注目すると，それは必らず)) …) ((… (のように) が先行する．従って一つの同値類中の部分集合は $\mathbf{2}^n$ の全順序部分集合を作り，同

値類は $\#\sigma=[n/2]$ なる部分集合 σ を１つずつ含む．$2r$ 個の束縛括弧をもつ類には $n-2r=s$ に対し $s+1$ 個の部分集合が含まれる．これら $\binom{n}{[n/2]}$ の類を r の大きい方から配列して各類中の σ につき，単調函数 u の値を次次に定めて行くものとすれば，$r=[n/2]$ に対しては $s+1=1$ 又は２で，その類の中の σ に対して u の値をきめるのは高高３通りしかない．$r<[n/2]$ については帰納的により多くの束縛成分を持つ類上では u の値が確定しているものと仮定して，当面の類の中で高々３通りしか u の値を取ることができないことを証明する．この類中の連続する３元 $a_{i+1}\supsetneqq a_i\supsetneqq a_{i-1}$ に対して，区間 a_{i+1}/a_{i-1} における a_i の余集合を b_i とおくと，b_i は束縛成分の個数が $2r+2$ であるが $b_i\supseteqq a_{i-1}\supseteqq b_{i-2}$ より，偶数の番号の b_i は全順序集合を作り，$u(b_i)=1$, $u(b_{i-2})=0$ なる番号を決めると u_i, a_{i-1}, a_{i-2} 以外の a_j では u の値が定まってしまう．奇数番号の所も同様だから結局 a_j 中高高２個以外では u の値が定まる．従ってそれら高高２個の a_j に対する u の決め方が高高３通りしかないことになる．これによって単調函数 u の個数 $f(n)$ は $3^{\binom{n}{[n/2]}}$ を超えない．

6．合同関係．n が偶数ならば $f(n)$ も偶数である（山本 1953, Riviere 1968）．$f(n)$ に就いて知られている合同関係式は現在これだけである．なお $n+2$ の素因子 p が $f(n)$ を

も割り切るものと推測される。さらに

$$f(7)\equiv 0,\ f(9)\equiv 0\ ,\ f(11)\equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ 2)$$

が確かめられる。

文献

G. Birkhoff : Lattice Theory, 1949 及びそこに挙げられている諸論文。

E. N. Gilbert, J. Math. Physics 33 (1954), 57-67.

B. K. Korobkov, Problemy Kibernetik 13 (1965), 5-28.

R. Church, Amer. Math. Soc., Notices 12 (1965), 724.

G. Hansel, C. R. Paris 262 (1966), 1088-1090.

N. M. Riviere, J. Combinatorial Theory 5 (1968), 229-234.

F. Lunnon, Oxford Symposium Proceedings (1969), 173-181.

J. Berman-A. J. Burger-P. Kohler, Amer. Math. Soc., Notices 22 (1975), 622.

D. Kleitman-G. Markowsky, Trans. Amer. Math. Soc. 近刊.

M. Krieger 私信 1975.

山本幸一, Sci. Rep. Kanazawa Univ. 2 (1953), 5-6.

〃, J. Math. Soc. Japan 6 (1954), 343-353.