数理解析研究所講究録
第 274 巻 1976 年 83-97



# $n$次元空間行列式と$n$次形式の不変式

都立大 理　　兼岩 龍二

## §1. $n$次元空間行列の定義

$I(\ell)=\{1,2,\cdots,\ell\}$, $I(\ell_1,\cdots,\ell_n)=I(\ell_1)\times\cdots\times I(\ell_n)$, Kを可換体とするとき, $I=I(\ell_1,\cdots,\ell_n)\longrightarrow K$なる写像AをK上の($n$次元) $(\ell_1,\cdots,\ell_n)$型(空間)行列という. これを通常の行列にならって

$$A=(a_\nu)_{\nu\in I}=(a_{\nu_1,\cdots,\nu_n})_{1\leq\nu_i\leq\ell_i}$$

のように書く. ここに $a_{\nu_1,\cdots,\nu_n}=A(\nu_1,\cdots,\nu_n)\in K$ である.

今 $\tau\in\mathfrak{S}_n=n$次対称群とし, 空間行列 $A=(a_{\nu_1,\cdots,\nu_n})$ の $\tau$ による転置行列${}^\tau A$を次のように定義する:

$${}^\tau A={}^\tau(a_{\nu_1,\cdots,\nu_n})=(a_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}),\quad \lambda_i=\nu_{\tau^{-1}(i)}\ (\text{i.e. } \nu_i=\lambda_{\tau(i)}).$$

例. $A=(a_{ijk})\in K^{I(2,2,2)}$, $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\in\mathfrak{S}_3$ ならば $i=\nu_1=\lambda_2$, $j=\nu_2=\lambda_3$, $k=\nu_3=\lambda_1$ で ${}^\tau A=(a_{kij})$. $A=\left(\begin{array}{cc}a_{111}&a_{121}\\a_{211}&a_{221}\\\hline a_{112}&a_{122}\\a_{212}&a_{222}\end{array}\right)$ と書けば ${}^\tau A=\left(\begin{array}{cc}a_{111}&a_{211}\\a_{112}&a_{212}\\\hline a_{121}&a_{221}\\a_{122}&a_{222}\end{array}\right)$ である.

$A\in K^{I(\ell,\cdots,\ell)}=K^{I(\ell)^n}$がすべての $\tau\in\mathfrak{S}_n$ に対して ${}^\tau A=A$であるとき Aは対称(symmetric)であるという.

§2. 積 * と $n$ 次形式

今，$A \in K^{I(\ell_1,\cdots,\ell_n)}$，$B \in K^{I(\ell'_1,\cdots,\ell'_m)}$，$A=(a_{\nu_1,\cdots,\nu_n})$，$B=(b_{\lambda_1,\cdots,\lambda_m})$，$\ell_1=\ell'_1$ とする。このとき $A, B$ の積 $C=A*B=(c_{\mu_1,\cdots,\mu_{n+m-2}}) \in K^{I(\ell_2,\cdots,\ell_n,\ell'_2,\cdots,\ell'_m)}$ を次で定義する：

$$c_{\mu_1,\cdots,\mu_{n+m-2}} = \sum_{k=1}^{\ell_1} a_{k,\mu_1,\cdots,\mu_{n-1}} b_{k,\mu_n,\cdots,\mu_{n+m-2}}.$$

今また

$$F(x_1,\cdots,x_\ell) = a_{i_1,\cdots,i_n} x_{i_1}\cdots x_{i_n} \quad (1 \leq i_1,\cdots,i_n \leq \ell)$$

（同じ文字に関する総和記号を省略）

を $\ell$ 元 $n$ 次形式とする。これに対して

$$A=(a_{i_1,\cdots,i_n}) \in K^{I(\ell)^n}, \quad X=(x_j)=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\ell \end{pmatrix} \in K(x_1,\cdots,x_\ell)^{I(\ell)}$$

とすれば，

$$F(X)=F(x_1,\cdots,x_\ell)=a_{i_1,\cdots,i_n} x_{i_1}\cdots x_{i_n}$$

(1) $\qquad = A*\underbrace{X*\cdots*X}_{n}$ （演算 * は前から順番に $n$ 回行なう）

となる。$x_{i_1}\cdots x_{i_n}$ は $i_1,\cdots,i_n$ の順番を入れ換えても不変だから $A$ は対称行列にとることができる。$\ell$ 元 $n$ 次形式と $I(\ell)^n$ 型の対称行列は 1 対 1 に対応する。

一次変換

(2) $\quad X=SY$，$S=(s_{ij}) \in K^{I(\ell)^2}$，$Y=(y_j) \in K(y_1,\cdots,y_\ell)^{I(\ell)}$

が与えられたとき，$F(x_1,\cdots,x_\ell)$ を $y_1,\cdots,y_\ell$ の $n$ 次形式として計算すれば

$$F(x) = a_{i_1,\cdots,i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$$
$$= a_{i_1,\cdots,i_n}(s_{i_1 j_1} y_{j_1}) \cdots (s_{i_n j_n} y_{j_n})$$
$$= a_{i_1,\cdots,i_n} s_{i_1 j_1} \cdots s_{i_n j_n} y_{j_1} \cdots y_{j_n}$$
$$= A * S * \cdots * S * Y * \cdots * Y$$

となる．$A[Z]^n = A * \underbrace{Z * \cdots * Z}_{n}$ なる記号を使えば

(3) $\quad F(x) = A[X]^n = A[SY]^n = (A[S]^n)[Y]^n$

を得る．即ち $X$ に $SY$ を代入すれば，新しい $n$ 次形式に対応する $n$ 次元空間行列 $A[S]^n$ を得るのである．忽論 $A$ が symmetric ならば $A[S]^n$ も symmetric である．

## §3．(空間)行列式

$A = (a_{i_1,\cdots,i_n}) \in K^{I(\ell)^n}$，$(\sigma_1,\cdots,\sigma_n) \in (\mathfrak{S}_\ell)^n$ とする．今関係

$(\sigma_1,\cdots,\sigma_n) \sim (\sigma_1',\cdots,\sigma_n')$ を $\exists_{\tau \in \mathfrak{S}_\ell} (\sigma_1,\cdots,\sigma_n) = (\sigma_1'\tau,\cdots,\sigma_n'\tau)$ で定めれば，

これは同値関係になり

$$(*) \qquad (\sigma_1,\cdots,\sigma_n) \sim (\sigma_1',\cdots,\sigma_n') \Rightarrow \{(\sigma_1(k),\cdots,\sigma_n(k)) \mid k = 1,\cdots,\ell\} = \{(\sigma_1'(k),\cdots,\sigma_n'(k)) \mid k = 1,\cdots,\ell\}$$

が成立する．$(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ の属す同値類を $[\sigma_1,\cdots,\sigma_n]$ で表わすことにする．そこで $\sigma = [\sigma_1,\cdots,\sigma_n] \in (\mathfrak{S}_\ell)^n/\sim$ と置いて次を定義する：

$$(1) \qquad A_\sigma = \prod_{k=1}^{\ell} a_{\sigma_1(k),\cdots,\sigma_n(k)}.$$

これは $(*)$ で保障されているように，$\sigma = [\sigma_1,\cdots,\sigma_n]$ となるような

$\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ の取り方によらない．又，

(2) $$\mathrm{sign}_j(\sigma) = \prod_{\substack{1\le i\le n\\(i\ne j)}} \mathrm{sign}\,\sigma_i\ , \qquad \sigma=[\sigma_1,\cdots,\overset{j}{\check{1}},\cdots,\sigma_n]$$

ここでは $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ のとり方を $\sigma_j=1$ となるように取るのである．この取り方は unique である．そこで $A\in K^{I(\ell)^n}$ の行列式を次のように決める：

(3) $$\det{}_j A = \sum_{\sigma\in(\mathfrak{S}_\ell)^n/\sim} \mathrm{sign}_j(\sigma)\cdot A_\sigma$$
$$= \sum_{\substack{\sigma_i\in\mathfrak{S}_\ell\\ i=1,\cdots,n\\ i\ne j}} \prod_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne j}} \mathrm{sign}\,\sigma_i \prod_{k=1}^{\ell} a_{\sigma_1(k),\cdots,\overset{j}{\check{k}},\cdots,\sigma_n(k)}\ .$$

これを $n$ 次元第 $j$ 行列式と呼ぶことにする．

この第 $j$ 行列式は $\tau\in\mathfrak{S}_n$ による転置に関して

(4) $$\det{}_j {}^\tau A = \det{}_{\tau(j)} A$$

なる性質をもつ．

証明．$n$ 次元空間行列 $A$ は $I(\ell)^n\to K$ なる写像であった．また $\tau\in\mathfrak{S}_n$ は $\{1,\cdots,n\}\to\{1,\cdots,n\}$ なる写像でこれは

$$I(\ell)^n\ni(\nu_1,\cdots,\nu_n)\longmapsto(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in I(\ell)^n,\quad \lambda_i=\nu_{\tau^{-1}(i)}$$

なる写像 $\tilde{\tau}$ を誘導する．このとき ${}^\tau A$ の定義より，$I(\ell)^n\to K$ なる写像として ${}^\tau A=A\circ\tilde{\tau}$ である．

$$\begin{tikzcd}
I(\ell)^n \arrow[rr, "\tilde{\tau}"] \arrow[dr, "{}^\tau A"'] & \arrow[d, phantom, "\Omega"] & I(\ell)^n \arrow[dl, "A"] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

$$\sigma = [\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \in (\gamma_\ell^\circ)^n/\sim$$

とすれば，

$$A_\sigma = \prod_{k=1}^{\ell} A(\sigma_1(k), \cdots, \sigma_n(k))$$

$$\begin{aligned}({}^\tau A)_\sigma &= \prod_{k=1}^{\ell} {}^\tau A(\sigma_1(k), \cdots, \sigma_n(k)) \\ &= \prod_{k=1}^{\ell} A \circ \tilde{\tau}(\sigma_1(k), \cdots, \sigma_n(k)) \\ &= \prod_{k=1}^{\ell} A(\sigma_{\tau^{-1}(1)}(k), \cdots, \sigma_{\tau^{-1}(n)}(k)) \\ &= A_{\tau(\sigma)} \qquad \text{ここに} \quad \tau(\sigma) = [\sigma_{\tau^{-1}(1)}, \cdots, \sigma_{\tau^{-1}(n)}]\end{aligned}$$

今， $sign_j \sigma = \prod_{i=1}^{n} sign\, \sigma_i$ ， $\sigma = [\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ ， $\sigma_j = 1$

とすれば， $\tau^{-1}(i) = j$ のとき $\sigma_{\tau^{-1}(i)} = 1$ だから

$$\tau(\sigma) = [\sigma_{\tau^{-1}(1)}, \cdots, \sigma_{\tau^{-1}(n)}]$$

において $\tau(j)$ 番目が 1 である．したがって

$$sign_j \sigma = sign_{\tau(j)} \tau(\sigma)$$

である．よって

$$\begin{aligned}det_j({}^\tau A) &= \sum_{\sigma \in (\gamma_\ell^\circ)^n/\sim} sign_j \sigma \cdot ({}^\tau A)_\sigma \\ &= \sum_{\sigma \in (\gamma_\ell^\circ)^n/\sim} sign_{\tau(j)} \tau(\sigma) \cdot A_{\tau(\sigma)} \\ &= det_{\tau(j)} A. \qquad \text{Q.E.D.}\end{aligned}$$

$A \in K^{I(\ell)^n}$ を次のように書く：

$$A = (a_{i_1, \cdots, i_n}) = (a_{i_1, \cdots, \overset{m}{\check{1}}, \cdots i_n}; \cdots; a_{i_1, \cdots, \overset{m}{\check{\ell}}, \cdots, i_n})_m$$

$$= (A_1^m, \cdots, A_\ell^m)_m .$$

このとき $A^m_i = (a_{i_1, \dots, \overset{m}{\check{i}}, \dots, i_n}) \in K^{I(\ell)^{n-1}}$ を $A$ の第 $m$ 方向への第 $i$ 番目の sheet と呼ぶ.

定理 1. $A$ を $I(\ell)^n$ 型の空間行列, $A^m_1, \dots, A^m_\ell$ を $A$ の第 $m$ 方向への sheets とする. このとき $s \in \mathfrak{S}_\ell$ に対して

$$(5)\quad \det{}_j (A^m_{s(1)}, \dots, A^m_{s(\ell)})_m = \begin{cases} \operatorname{sign} s \cdot \det{}_j (A^m_1, \dots, A^m_\ell), \\ \quad (j \neq m \text{ 又は } j = m \text{ で } n \text{ が偶数のとき}) \\ \det{}_j (A^m_1, \dots, A^m_\ell), \\ \quad (j = m \text{ で } n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

が成立する.

証明. $A' = (A^m_{s(1)}, \dots, A^m_{s(\ell)})_m$ と置けば

$$A'(i_1, \dots, i_n) = A(i_1, \dots, s(i_m), \dots, i_n)$$

である. したがって $\sigma \in (\mathfrak{S}_\ell)^n/\sim$ に対して

$$A'_\sigma = \prod_{k=1}^{\ell} A'(\sigma_1(k), \dots, \sigma_n(k)) = \prod_{k=1}^{\ell} A(\sigma_1(k), \dots, s\sigma_m(k), \dots, \sigma_n(k))$$

よって

$$\det{}_j A' = \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathfrak{S}_\ell \\ \sigma_j = 1}} \prod_{u=1}^{n} \operatorname{sign} \sigma_u \prod_{k=1}^{\ell} A(\sigma_1(k), \dots, s\sigma_m(k), \dots, \sigma_n(k))$$

である. $j \neq m$ のとき, $\sigma' = [\sigma_1, \dots, s\sigma_m, \dots, \sigma_n] = [\sigma'_1, \dots, \sigma'_n]$, $\sigma'_j = 1$ と置けば $\sigma'_1 = \sigma_1, \dots, \sigma'_m = s\sigma_m, \dots, \sigma'_n = \sigma_n$ で

$$\prod_{u=1}^{n} \operatorname{sign} \sigma_u = \operatorname{sign} s \cdot \prod_{u=1}^{n} \operatorname{sign} \sigma'_u,$$

$$\det{}_j A' = \sum_{\substack{\sigma'_1, \dots, \sigma'_n \in \mathfrak{S}_\ell \\ \sigma'_j = 1}} \operatorname{sign} s \cdot \prod_{u=1}^{n} \operatorname{sign} \sigma'_u \cdot \prod_{k=1}^{\ell} A(\sigma'_1(k), \dots, \sigma'_n(k))$$

$$= \operatorname{sign} s \cdot \det_j A .$$

$j=m$ のとき, $\sigma' = [\sigma_1, \cdots, \overset{m}{\check{s}}, \cdots, \sigma_n] = [\sigma_1', \cdots, \sigma_n']$, $\sigma_j' = 1$ と置けば

$\sigma_1' = \sigma_1 s^{-1}, \cdots, \sigma_j' = 1, \cdots, \sigma_n' = \sigma_n s^{-1}$ で

$$\prod_{u=1}^{n} \operatorname{sign} \sigma_u = (\operatorname{sign} s)^{n-1} \prod_{u=1}^{n} \operatorname{sign} \sigma_u' ,$$

$$\det_j A' = (\operatorname{sign} s)^{n-1} \det_j A .$$

即ち

$$\det_j A' = \begin{cases} \operatorname{sign} s \cdot \det_j A , & j \neq m \text{ のとき} \\ (\operatorname{sign} s)^{n-1} \cdot \det_j A , & j = m \text{ のとき} \end{cases}$$

が示されたのである. Q.E.D.

定理2. 写像 $f : K^{I(\ell)^n} \longrightarrow K$ が次の性質(A),(B) をもつとする:

(A) $A = (A_1^m, \cdots, A_\ell^m)_m \in K^{I(\ell)^n} \cong (K^{I(\ell)^{n-1}})^\ell$, $A_k^m = (a_{i_1, \cdots, \overset{m}{\check{k}}, \cdots, i_n}) \in K^{I(\ell)^{n-1}}$

と表わすとき, $f$ は各変数 $A_1^m, \cdots, A_\ell^m$ について線形. これは任意の $m\ (1 \leqq m \leqq n)$ に対してである. 即ち各方向 $m$ について $\ell$ 重線形.

(B) $m \neq j$ に対して, $A_1^m, \cdots, A_\ell^m$ の中に等しいものがあれば $f(A) = f(A_1^m, \cdots, A_\ell^m) = 0$. 即ち $f$ は $j$ 以外の方向について交代的(alternating).

このとき,

(C) $f(A) = f(E) \cdot \det_j(A)$, $E = (\delta_{i_1, \cdots, i_n})$, $\delta_{i_1, \cdots, i_n} = \begin{cases} 1, & (i_1 = \cdots = i_n) \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$

が成立する. 逆に $f(A) = c \cdot \det_j(A)$, $c \in K$ で与えられる写像は (A), (B) を満たす.

系１．$n$ が偶数のとき，写像 $det_j$ $K^{I(\ell)^n}\to K$ は $j$ $(1\leqq j\leqq n)$ によらずすべて等しく，この写像はすべての方向 $m$ $(1\leqq m\leqq n)$ に対して交代的である．これを $det$ と書いて $detA$ を $A$ の行列式と呼ぶことにしよう．

系２．$n$ が奇数のとき，すべての方向 $m$ $(1\leqq m\leqq n)$ について多重線形，交代的であるような写像 $f:K^{I(\ell)^n}\to K$ は $f(A)\equiv 0$ 以外には存在せず，写像たち $det_j$ $(1\leqq j\leqq n)$ はすべて異なる．$det_j$ は方向 $m\neq j$ については交代的多重線形，方向 $j$ については対称的多重線形である．

系１，系２は定理１，定理２と $det_j E=1$ なることから従う．

定理２の証明．定理の前半（(A), (B) より (C) を導くこと）．

$$(6)\qquad E_{k_1,\cdots,k_{n-1}}=(\varepsilon_{i_1,\cdots,i_{n-1}})_{1\leqq i_1,\cdots,i_{n-1}\leqq \ell}\ ,\quad \varepsilon_{i_1,\cdots i_{n-1}}=\begin{cases}1,\ (i_1=k_1,\cdots,i_{n-1}=k_{n-1})\\ 0,\ \text{その他}\end{cases}$$

と置けば

$$(7)\qquad A=\Bigl(\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_{j-1},\\ k_{j+1},\cdots,k_n}} a_{k_1,\cdots,\overset{\overset{j}{\downarrow}}{1},\cdots,k_n}E_{k_1,\cdots,k_{j-1},k_{j+1},\cdots,k_n},\cdots,\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_{j-1},\\ k_{j+1},\cdots,k_n}} a_{k_1,\cdots,\overset{\overset{j}{\downarrow}}{\ell},\cdots,k_n}E_{k_1,\cdots,k_{j-1},k_{j+1},\cdots,k_n}\Bigr)_j$$

$j$ 方向についての多重線形性(A)より，

$$(8)\qquad f(A)=\sum_{\substack{\sigma_1,\cdots,\sigma_{j-1},\\ \sigma_{j+1},\cdots,\sigma_n}}\prod_{k=1}^{\ell} a_{\sigma_1(k),\cdots,\overset{\overset{j}{\downarrow}}{k},\cdots,\sigma_n(k)}\, f(E_{\sigma_1(1),\cdots,\sigma_{j-1}(1),\sigma_{j+1}(1),\cdots,\sigma_n(1)},\cdots,E_{\sigma_1(\ell),\cdots,\sigma_{j-1}(\ell),\sigma_{j+1}(\ell),\cdots,\sigma_n(\ell)})_j$$

今，$\qquad(\varepsilon'_{i_1,\cdots,i_n})=(E_{\sigma_1(k),\cdots,\sigma_{j-1}(k),\sigma_{j+1}(k),\cdots,\sigma_n(k)})_{j,\,k=1}^{\ell}$

と置く．ここに右辺は(8)の右辺の $f$ が作用する行列を表わす．

このとき

$$\varepsilon'_{i_1,\cdots,i_n} = \begin{cases} 1, & (i_1=\sigma_1(i_j),\cdots,i_{j-1}=\sigma_{j-1}(i_j),\ i_{j+1}=\sigma_{j+1}(i_j),\cdots,i_n=\sigma_n(i_j)) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

となるから

$$\varepsilon'_{i_1,\cdots,i_n} = \delta_{\sigma_1^{-1}(i_1),\cdots,\sigma_{j-1}^{-1}(i_{j-1}),\ i_j,\ \sigma_{j+1}^{-1}(i_{j+1}),\cdots,\sigma_n^{-1}(i_n)}$$

となり，(8) より

$$(9)\qquad f(A) = \sum_{\substack{\sigma=[\sigma_1,\cdots,\sigma_n]\in(\gamma_\ell)^n/\sim \\ \sigma_j=1}} A_\sigma\cdot f(\delta_{\sigma_1^{-1}(i_1),\cdots,\sigma_n^{-1}(i_n)})$$

が成立する．一方 (A),(B) より各 $m\ (m\neq j)$ に対して

$$f(A^m_{s(1)},\cdots,A^m_{s(\ell)})_m = \operatorname{sign} s\cdot f(A^m_1,\cdots,A^m_\ell)$$

即ち

$$(10)\qquad f(a_{i_1,\cdots,\overset{m}{\check{s(i_m)}},\cdots,i_n}) = \operatorname{sign} s\cdot f(a_{i_1,\cdots,i_n})\ ,\quad m\neq j$$

が成立する．これを (9) の右辺に適用すれば，

$$f(A) = \sum_{\substack{\sigma=[\sigma_1,\cdots,\sigma_n]\in(\gamma_\ell)^n/\sim \\ \sigma_j=1}} A_\sigma \prod_{\substack{u=1 \\ u\neq j}}^{n} \operatorname{sign}\sigma_u\ f(\delta_{i_1,\cdots,i_n})$$

$$= \det_j A\cdot f(E)$$

即ち (C) が得られた．

逆は $f(A)=\det_j A$ について (A),(B) が成り立つことをいえばよい．(B) は定理 1 によって既に示されている．(A) を示す．

$m\ (1\leq m\leq n)$，$k\ (1\leq k\leq \ell)$ を任意として

$$(a_{i_1,\cdots,i_n}) = (A_1^m, \cdots, A_k^m, \cdots, A_\ell^m)_m = A$$

$$(b_{i_1,\cdots,i_n}) = (A_1^m, \cdots, B_k^m, \cdots, A_\ell^m)_m = B$$

$$(c_{i_1,\cdots,i_n}) = (A_1^m, \cdots, A_k^m + B_k^m, \cdots, A_\ell^m)_m = C$$

と置けば

$$c_{i_1,\cdots,i_n} = \begin{cases} a_{i_1,\cdots,i_n} + b_{i_1,\cdots,i_n} & (i_m = k \text{ のとき}) \\ a_{i_1,\cdots,i_n} & (i_m \neq k \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．そこで

$$\begin{aligned} \det_j C &= \sum_{\substack{\sigma_1,\cdots,\sigma_n \in \mathfrak{S}_\ell \\ \sigma_j = 1}} \prod_{q=1}^{n} \operatorname{sign}\sigma_q \prod_{p=1}^{\ell} c_{\sigma_1(p),\cdots,\sigma_n(p)} \\ &= \sum_{\substack{\sigma_1,\cdots,\sigma_n \\ \sigma_j = 1}} \prod_{q=1}^{n} \operatorname{sign}\sigma_q \Bigl( \prod_{\substack{1 \le p \le \ell \\ \sigma_m(p) \neq k}} a_{\sigma_1(p),\cdots,\sigma_n(p)} \Bigr) \bigl( a_{\sigma_1\sigma_m^{-1}(k),\cdots,\sigma_n\sigma_m^{-1}(k)} \\ &\qquad + b_{\sigma_1\sigma_m^{-1}(k),\cdots,\sigma_n\sigma_m^{-1}(k)} \bigr) \\ &= \det_j A + \det_j B \ . \end{aligned}$$

$\det_j (A_1^m, \cdots, cA_k^m, \cdots, A_\ell^m)_m = \det_j A \cdot c$ も同様である．Q.E.D.

定理３．$A \in K^{I(\ell)^n}$，$S \in K^{I(\ell)^2}$，$j = 1, \cdots, n-1$ に対して

(11) $$\det_j (A * S) = \det_{j+1} A \cdot \det S$$

が成立する．

証明．$(a_{i_1,\cdots,i_n}) = A$

$$(s_{ij}) = (S_1^2, \cdots, S_k^2, \cdots, S_\ell^2)_2 = S$$

$$(t_{ij}) = (S_1^2, \cdots, T_k^2, \cdots, S_\ell^2)_2 = T$$

$$(u_{ij}) = (S_1^2, \cdots, S_k^2 + T_k^2, \cdots, S_\ell^2)_2 = U$$

と置けば

$$u_{ij} = \begin{cases} s_{ij} + t_{ij}, & j = k \text{ のとき} \\ s_{ij}, & j \neq k \text{ のとき} \end{cases}$$

で

$$\sum_{r=1}^{\ell} a_{r,i_1,\cdots,i_{n-1}} u_{r,i_n} = \begin{cases} \sum_r a_{r,i_1,\cdots,i_{n-1}} (s_{r,i_n} + t_{r,i_n}), & i_n = k \text{ のとき} \\ \sum_r a_{r,i_1,\cdots,i_{n-1}} s_{r,i_n} \end{cases}$$

だから

$$A * U = ((A*S)^n_1, \cdots, (A*S)^n_k + (A*T)^n_k, \cdots, (A*S)^n_\ell)_n$$

また，$A*(S^2_1, \cdots, cS^2_k, \cdots, S^2_\ell)_2 = ((A*S)^n_1, \cdots, c(A*S)^n_1, \cdots, (A*S)^n_\ell)_n$

が成り立ち，$S^2_k = S^2_{k'}$ ならば $(A*S)^n_k = (A*S)^n_{k'}$ である．

(12) $$f(S) = det_j (A*S) \quad (j = 1, \cdots, n-1)$$

と置けば $det_j$ が第 $n$ 方向に交代的多重線形であることから，

$f(S)$ は $S$ の第2方向について交代的多重線形である．

通常の行列の理論により，

(13) $$f(S) = c \cdot det\, S$$

ここに $c$ は $S$ に無関係な定数である．$S = E = (\delta_{ij})$ のとき

$$(A*E)(i_1, \cdots, i_n) = \sum_{r=1}^{\ell} a_{r,i_1,\cdots,i_{n-1}} \delta_{r,i_n} = a_{i_n,i_1,\cdots,i_{n-1}}$$

だから $A*E = {}^{\tau}A$，$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$ で

(14) $$f(E) = det_j {}^{\tau}A = det_{\tau(j)} A = det_{j+1} A$$

となり，(13)より $c = det_{j+1} A$ である．即ち

$$det_j\, A*S = det_{j+1} A \cdot det\, S$$

が示された．Q.E.D.

ここで $det_n A*S = det_1 A \cdot det\, S$ は成立しないことを注意しておき

たい．ただし $n$ が奇数の場合である．

$n$ が偶数の場合は index $j$ は書く必要がなくなって

(15) $$\det(A * S) = \det A \cdot \det S \quad , \quad S \in K^{I(\ell)^2},\ A \in K^{I(\ell)^n}$$

が成立する．

$A$ が偶数次形式に対応する対称空間行列のとき

(16) $$\det(A[S]^n) = \det A \cdot (\det S)^n$$

だから $\det A$ はこの $n$ 次形式の重さ $n$ の不変式となる．

また $A$ が奇数次 $n$ の代数形式に対応する空間行列のとき，

(17) $$\det \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{2n}} {}^{\tau}(A \otimes A)$$

はこの $n$ 次形式の重さ $2n$ の不変式を与える．ここに tensor 積

$$A \otimes B \quad , \quad A \in K^{I(\ell)^n},\ B \in K^{I(\ell)^m}$$

は $$(A \otimes B)(i_1, \cdots, i_{n+m}) = A(i_1, \cdots, i_n) \cdot B(i_{n+1}, \cdots, i_{2n}) \in K^{I(\ell)^{n+m}}$$

で与えられる．

例 1． $f(x, y) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 y + 6a_2 x^2 y^2 + 4a_3 x y^3 + a_4 y^4$

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & a_2 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_3 & a_4 \end{array}\right) \qquad f(x, y) = B[X]^4 \ , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \mathfrak{S}_2 = \{1, t\}$$

| $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\sigma_4$ | $\mathrm{sign}\,\sigma$ | $b_{1,\sigma_2(1),\sigma_3(1),\sigma_4(1)}$ | $b_{2,\sigma_2(2),\sigma_3(2),\sigma_4(2)}$ | $b_\sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | +1 | $b_{1111} = a_0$ | $b_{2222} = a_4$ | $a_0 a_4$ |
| 1 | 1 | t | −1 | $b_{1112} = a_1$ | $b_{2221} = a_3$ | $a_1 a_3$ |
| 1 | t | 1 | −1 | $b_{1121} = a_1$ | $b_{2212} = a_3$ | $a_1 a_3$ |
| 1 | t | t | +1 | $b_{1122} = a_2$ | $b_{2211} = a_2$ | $a_2^2$ |
| t | 1 | 1 | −1 | $b_{1211} = a_1$ | $b_{2122} = a_3$ | $a_1 a_3$ |
| t | 1 | t | +1 | $b_{1212} = a_2$ | $b_{2121} = a_2$ | $a_2^2$ |
| t | t | 1 | +1 | $b_{1221} = a_2$ | $b_{2112} = a_2$ | $a_2^2$ |
| t | t | t | −1 | $b_{1222} = a_3$ | $b_{2111} = a_1$ | $a_1 a_3$ |

$\det B = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 = g_2$ （Cayley の不変式）

例2.

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc||cc|cc} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_2 & a_3 & a_2 & a_3 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & a_2 & a_2 & a_3 & a_2 & a_3 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_3 & a_4 & a_3 & a_4 & a_4 & a_5 \\ \hline\hline a_1 & a_2 & a_2 & a_3 & a_2 & a_3 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_3 & a_4 & a_3 & a_4 & a_4 & a_5 \\ \hline a_2 & a_3 & a_3 & a_4 & a_3 & a_4 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_4 & a_5 & a_4 & a_5 & a_5 & a_6 \end{array}\right) \qquad \det B = a_0a_6-6a_1a_5+15a_2a_4-10a_3^2$$

（2元6次形式の重さ6の不変式）

$A=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ b & c \\ \hline b & c \\ c & d \end{array}\right)$ と置けば $A\otimes A=\left(\begin{array}{cc|cc||cc|cc} a^2 & ab & ab & b^2 & ab & b^2 & ac & bc \\ ab & ac & b^2 & bc & b^2 & bc & bc & c^2 \\ \hline ab & ac & b^2 & bc & b^2 & bc & bc & c^2 \\ ac & ad & bc & bd & bc & bd & c^2 & cd \\ \hline\hline ab & b^2 & ac & bc & ac & bc & ad & bd \\ b^2 & bc & bc & c^2 & bc & c^2 & bd & cd \\ \hline b^2 & bc & bc & c^2 & bc & c^2 & bd & cd \\ bc & bd & c^2 & cd & c^2 & cd & cd & d^2 \end{array}\right)$ で

$\det(A\otimes A)=0$ であるが，$B=\sum\limits_{\tau\in\mathfrak{S}_6}{}^{\tau}(A\otimes A)$ と置けば

$$a_0=6!\,a^2,\quad a_1=6!\,ab,\quad a_2=6!\cdot\frac{9b^2+6ac}{15},\quad a_3=6!\cdot\frac{ad+9bc}{10},$$

$$a_4=6!\cdot\frac{9c^2+6bd}{15},\quad a_5=6!\cdot cd,\quad a_6=6!\cdot d^2$$

で

$$\det B=(6!)^2\cdot\frac{9}{10}\{a^2d^2-6abcd-3b^2c^2+4b^3d+4ac^3\}$$

$$=(6!)^2\cdot\frac{9}{10}\left(-\frac{D}{27}\right)$$

ここに $D=a^4\{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)\}^2$，$x_1, x_2, x_3$ は $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ の根．

追記．筆者は昭和50年の正月ごろ，$n$次形式の算術をこころみようと考えて，そのためには最低，上記ほどの準備は必要なのであろうと考えた．これらのこと既に得られていたであろうことは容易に想像されたが，文献を知らなかったし，自分で考えた方が勉強になると思った。田村純一君のすすめで，それを今度紹介することになった訳であります．当日，内山三郎先生より文献[1]を教示いただきました．それによれば今回紹介したものとスタイルの差はあるけれど同じ概念のものが書かれている．本文において空間行列なる用語に改めたのは[1]によるものである．本文において

$$\det{}_j A$$

となっているものは[1]においては

$$\begin{cases} |a^{\pm\cdots+\cdots\pm}_{i_1,\cdots,i_j,\cdots,i_n}| & ,\ n\text{が奇数のとき} \\ |a^{\pm\cdots\pm}_{i_1,\cdots,i_n}| & ,\ n\text{が偶数のとき} \end{cases}$$

と同じもので index の上の $\pm$, $+$ は各方向への交代性，対称性を表わしているのである．[1]には $\det{}_j A$ 以外の行列式も多種載っているが，有用なのは全交代的なる行列式であろう．

また[1]では行列と行列の多種の積を載せてあるが，本文に登場するのは $*$ と $\otimes$ だけである．$n$次形式をあつかう上には積はこの2つで足りると思う．これらの意味から，結果として本文は[1]の単純化，要約になっていると思う．勿論一部分で

あるが.

またtensorとの関連であるが，空間行列はtensorと同じ概念である．筆者はconcreteな計算とか変形式について行なうには空間行列の方が扱い易いように思う．

---

[1] Н. П. СОКОЛОВ,

Пространственные Матрицы и их Приложения

Москва 1960