数理解析研究所講究録
第274巻 1976年 148-151

Bernoulli関数のDirichlet指標和への応用

九大 理　金光 滋
白谷克巳

論文[3]の目的は，Hua[1]の指標和に関する不等式の一般化を与えることである。即ち，次の定理が成り立つ。

定理1．χがfを法とする，単位指標χ_0と異なる，原始的Dirichlet指標で，しかも偶指標であるとき，偶数nと，$1 \leqq m_0 < f$なるm_0に対し，不等式

$$\left|\sum_{m=1}^{m_0}(m_0-m)^{n-1}\chi(m) - \frac{1}{n}\{(B_\chi-m_0)^n - B_\chi^n\}\right| \leqq \frac{1}{n}f^{n-\frac{1}{2}}\left|B_n\left(\frac{m_0}{f}\right)-B_n(0)\right|$$

が成り立つ。ここで$B_n(x)$はn番目のBernoulli多項式を，B_χ^nはLeopoldtの一般Bernoulli数$B_\chi^n = f^{n-1}\sum_{m=1}^{f}\chi(m)B_n\left(\frac{m}{f}\right)$を表わし，$(B_\chi-m_0)^n$は記号的に$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}B_\chi^r(-m_0)^{n-r}$を表わす。

まず，次の補題が成り立つ。

補題．χがfを法とする，χ_0と異なる原始指標であるとき，$n \geqq 2$に対し，

$$\sum_{m=1}^{m_0}(m_0-m)^{n-1}\chi(m)=(-1)^n\frac{1}{n}\{(B_\chi-m_0)^n-B_\chi^n\}$$
$$+(-1)^n f^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(2\pi i)^n}\tau(\chi)\sum_{l=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{-2\pi i\frac{m_0}{f}l}-1}{l^n}\overline{\chi}(l)$$

となる。ここで $\tau(\chi)$ は正規化された Gauss の和で，$\overline{\chi}$ は χ の逆指標を示し，$\sum'$ は $l=0$ に対応する項を除いた和を表わす。

証明．Bernoulli 関数 $P_n(x)$ を，$P_n(x)=B_n(x)\ (0\leqq x<1)$，$P_n(x+1)=P_n(x)$ で定義すれば，

$$-B_n(x-\tfrac{m_0}{f})+B_n(x)+P_n(x-\tfrac{m_0}{f})-P_n(x)=\begin{cases} n(x-\frac{m_0}{f})^{n-1}, & 0\leqq x<\frac{m_0}{f}, \\ 0 & , \frac{m_0}{f}\leqq x<1 \end{cases}$$

が得られる。これを我々の和に適用すれば，

$$\sum_{m=1}^{m_0}(m_0-m)^{n-1}\chi(m)=(-1)^n\frac{1}{n}f^{n-1}\sum_{m=1}^{f}\{B_n(\tfrac{m}{f}-\tfrac{m_0}{f})-B_n(\tfrac{m}{f})\}\chi(m)$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}f^{n-1}\sum_{m=1}^{f}\{P_n(\tfrac{m}{f}-\tfrac{m_0}{f})-P_n(\tfrac{m}{f})\}\chi(m)$$

となり，第１項は，Bernoulli 多項式の性質を用いて，$(-1)^n\frac{1}{n}\{(B_\chi-m_0)^n-B_\chi^n\}$ となることがわかる。第２項は，Bernoulli 関数の Fourier 級数展開

$$P_n(x)=-\frac{n!}{(2\pi i)^n}\sum_{l=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi i l x}}{l^n}$$

を使えば，$(-1)^n f^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(2\pi i)^n}\tau(\chi)\sum_{l=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{-2\pi i\frac{m_0}{f}l}-1}{l^n}\overline{\chi}(l)$ となる。

定理の証明．補題の表示式の第２項の Fourier 級数の部分は，χ, n が偶のとき，$-4\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin^2\pi\frac{m_0}{f}l}{l^n}\overline{\chi}(l)$ となるが，これは，絶対値において，$4\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin^2\pi\frac{m_0}{f}l}{l^n}$ 以下である。

一方，$0\leqq x<1$ での $B_n(x)$ の Fourier 級数表示は

$$B_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n} 2\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi l x}{l^n}$$

であったから，これから $B_n(\frac{m_0}{f}) - B_n(0)$ の絶対値を求め，上の評価と比較すれば定理が得られる．

定理２．定理１の条件の下で，

$$\left| \sum_{m=1}^{m_0} (m_0 - m) \chi(m) \right| \leqq \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} m_0 \left(1 - \frac{m_0}{f}\right).$$

証明．定理１で $n=2$ の場合である．$B_\chi^1 = B_\chi^0 = 0$ に注意すればよい。

注１．定理２から $|S_2(A)| = \left|\sum_{a=1}^{A} \sum_{m=1}^{a} \chi(m)\right| \leqq \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} A$，$A \geqq 1$ が直ちに導びかれ，これを用いて，実２次体の基本単数に対する Hua の評価 $\log \varepsilon < f^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}\log f + 1)$ が得られる．

定理３．定理１の条件の下で，

$$\left| \sum_{m=1}^{m_0} (m_0 - m)^{n-1} \chi(m) \right| \leqq c f^{n-\frac{1}{2}} (n-1)! \frac{1}{(2\pi)^n},$$

ここで c は正の絶対定数である．

証明．$B_\chi^n \ll n! f^{n-\frac{1}{2}}$，$n \geqq 2$ を用いればよい．

注２．帰納的に $S_n(x) = \sum_{m=1}^{x} S_{n-1}(m)$，$S_1(x) = \sum_{m=1}^{x} \chi(m)$ と定義するとき，次の関係式が成り立つ。

$$S_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{b=1}^{n-1} S(n-1,b)(-1)^{n-1+b}\sum_{j=1}^{x+1}(x+1-j)^b \chi(j),$$

ここで，$S(a,b)$ は，第1種の Stirling 数で，

$$x(x-1)\cdots(x-a+1) = \sum_{b=1}^{a} S(a,b)x^b$$

によって定義される。

注3．χ が奇指標で，n が3以上の奇数のときも同様な定理が成り立つ。

文　献

[1] L. K. Hua, On the least solution of Pell's equation, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 731–735.

[2] G. Polyá, Über die Verteilung der quadratische Reste und Nichtreste, Göttinger Nachr. 1 (1948), 21–29.

[3] S. Kanemitsu and K. Shiratani, An application of the Bernoulli functions to character sums, Mem. Facu. Scie., Kyushu Univ., 30 (1976) (to appear).