数理解析研究所講究録
第 274 巻 1976 年 152-177

Linnikの零点密度定理について

日大理工 本橋洋一

(Yoichi MOTOHASHI / Nihon Univ.)

— Summary —

Let $N(\alpha, T, \chi)$ denote as usual the number of zeros of Dirichlet's L-functions $L(s, \chi)$ in the rectangle $\alpha \leqq \sigma \leqq 1$, $|t| \leqq T$, $s = \sigma + it$. Then we have

THEOREM

If $\alpha \geqq 4/5$, then

$$\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)} N(\alpha, T, \chi) \ll_\varepsilon (q^2 T^3)^{(1+\varepsilon)(1-\alpha)},$$

$$\sum_{q \leqq Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)} N(\alpha, T, \chi) \ll_\varepsilon (Q^4 T^3)^{(1+\varepsilon)(1-\alpha)}.$$

This is an improvement on a recent result of Montgomery and Selberg [1]. To prove this we appeal to the following main lemma:

Lemma

Let r be a square-free integer and let $\varphi_r(n) = \mu((r,n))\,\varphi((r,n))$. Let $\chi_j \pmod{q_j}$ be mutually distinct primitive characters such that $q_j \leqq Q$. Further let $s_{j,k} = \sigma_{j,k} + i\,t_{j,k}$ be complex numbers such that

$$\min_{j,k} \sigma_{j,k} = \sigma, \qquad \max_{j,k} |t_{j,k}| \leqq T \quad (T \geqq 1)$$

$$\min_{j} \min_{1 \leqq k < k' \leqq K_j} |t_{j,k} - t_{j,k'}| = \delta \quad (>0).$$

Then we have, for any $N \geqq T$ and $A > 1$,

$$\sum_{j \leqq J} \sum_{\substack{r \leqq R \\ (r, q_j)=1}} \frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(q_j r)} \sum_{k \leqq K_j} \Big| \sum_{N \leqq n \leqq N^A} c(n) \chi_j(n) \varphi_r(n) n^{-s_{j,k}} \Big|^2$$

$$\ll_A (\delta^{-1} + \log N) \sum_{N \leqq n \leqq N^A} (n + JTQR^2 (\log QK)^2)\, |c(n)|^2 n^{-2\sigma},$$

where $C(n)$ are arbitrary complex numbers.

Moreover, if χ_j runs over characters $\pmod q$ only, then in the above estimate Q is replaced by $\sqrt{q}$ as well as χ_j are not necessarily primitive.

§1.

Linnikの最小素数定理の証明にあたっては，ある密度定理と，例外零点が他の零点にあたえる影響をあらわすDeuring-Heilbronn現象とが根底になっている。この密度定理は，

$$\sum_{\chi \pmod q} N(\alpha, T, \chi) \ll q^{c_0(1-\alpha)} \qquad (T = O(1)) \tag{1}$$

（但しc_0は絶対常数）という形をとるものであり，logの項がないことが，$\alpha \to 1$のとき極めてよい評価となっていることを示している。この絶対常数c_0は2,3の人によって計算されているのであるが（例えばJutila [2]），その値を小さくすることが，勿論，最小素数の評価をよくすることに直接関係するのであり，強く望まれる訳である。所で，(1)の証明は，Turán [3]によってかなり簡易化され，そこで展開された方法がFogels [4]によって

$$\sum_{\chi \pmod q} N(\alpha, T, \chi) \ll (qT)^{c_1(1-\alpha)}, \tag{2}$$

更に，Gallagher [5]の美しい論文によって

$$\sum_{q \leq Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \pmod q} N(\alpha, T, \chi) \ll (Q^2 T)^{c_2(1-\alpha)} \tag{3}$$

という結果に発展したことは周知のことである。さきに示したJutilaの論文では，このTuránの方法が用いられているの

であるが，得られた c_0 の値は，かなり大きなものであった。これらの事情があって，筆者は先に論文［6］において，ある種の篩の結果を用いることによって，Turanの方法を用いずして，しかもよい値の c_0（あるいは c_1, c_2）をもとめる道のあることを示しておいた。しかしながら，論文［6］は基本的に不完全なものであり，筆者の論説［7］において，残念ながら，取り消し処分にしたのであった。所が最近に至って，D.Wolke氏の御厚意により，Montgomery氏の手稿［1］を入手することが出来，筆者の考えが幾分なりとも正鵠を射たものであることを知ることが出来た。又，藤井氏によれば，アメリカでのある集会で，既に1973年の秋頃に，Montgomery - Selbergの結果は発表されていたとのことである。更に又，Bombieri氏の論説［8］にもSelbergの結果として，このことが証明なしに示されていることを，情報不案内な筆者は，極く最近になって知った次第である。話が逆になったが，彼らの結果は

$$(4)\qquad \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)} N(\alpha, T, \chi) \ll_{\varepsilon} (qT)^{(3+\varepsilon)(1-\alpha)},$$

$$(5)\qquad \sum_{q \leq Q} \ \sideset{}{^*}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)} N(\alpha, T, \chi) \ll_{\varepsilon} (Q^5 T^3)^{(1+\varepsilon)(1-\alpha)},$$

である。

§2.

以下我々の定理の証明に入るのであるが，ここでは，lemmaをいくつか示す。

<u>Lemma 1.</u> δ_χ は χ : principal のときのみ 1，他は 0 として，

$$\sum_{M<n\leqq M+N}\chi(n) = \frac{\varphi(q)}{q}N\delta_\chi + O(\sqrt{q}\log q)$$

<u>Proof.</u> これは Pólya-Vinogradov の定理.

<u>Lemma 2.</u> (Selberg)

r は square-free として，$\psi_r(n)=\mu((r,n))\varphi((r,n))$ とおく。

更に，$\xi_d=O(1)$ は任意の複素数として，

$$M(s,\chi,\psi_r) = \sum_{d}\frac{\xi_d}{d^s}\chi(d)\psi_r(d)\prod_{p\mid\frac{r}{(r,d)}}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{s-1}}\right)$$

とする。すると，$\mathrm{Re}\, s>1$ において，

$$L(s,\chi)M(s,\chi,\psi_r) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\psi_r(n)}{n^s}\left(\sum_{d\mid n}\xi_d\right)$$

<u>Proof</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\psi_r(n)}{n^s}\left(\sum_{d\mid n}\xi_d\right) = \sum_{d}\frac{\chi(d)\xi_d}{d^s}\sum_{n}\frac{\chi(n)}{n^s}\psi_r(nd)$$

ここで $\psi_r(nd)=\psi_r(d)\,\psi_{\frac{r}{(r,d)}}(n)$ に注意して，上記は

$$= \sum_{d} \frac{\chi(d)\xi_d}{d^s} \psi_r(d) \sum_{n} \frac{\chi(n)}{n^s} \psi_{\frac{r}{(r,d)}}(n)$$

$$= \sum_{d} \frac{\chi(d)\xi_d}{d^s} \psi_r(d) \prod_{p} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi(p)^m}{p^{ms}} \psi_{\frac{r}{(r,d)}}(p^m) \right\}$$

$$= \sum_{d} \frac{\chi(d)\xi_d}{d^s} \psi_r(d) \prod_{p \nmid \frac{r}{(r,d)}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \mid \frac{r}{(r,d)}} \left\{ 1 - \frac{\chi(p)}{p^s}(p-1)\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \right\}$$

$$= \sum_{d} \frac{\chi(d)\xi_d}{d^s} \psi_r(d) \prod_{p \mid \frac{r}{(r,d)}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s-1}}\right) \quad L(s,\chi).$$

Lemma 3.

r, r' は square-free として

$$\prod_{\substack{p \mid r \\ p \nmid r'}} \left(1 - \frac{1}{p^{s-1}}\right) \prod_{\substack{p \nmid r \\ p \mid r'}} \left(1 - \frac{1}{p^{s-1}}\right) \prod_{\substack{p \mid r \\ p \mid r'}} \left(1 + \frac{1}{p^{s-1}}(p-2)\right)$$

$$= \sum_{d} \frac{1}{d^s} f(d; r, r')$$

とすれば

$$\psi_r\psi_{r'}(n) \ (= \psi_r(n)\psi_{r'}(n)) = \sum_{d \mid n} f(d; r, r')$$

Proof.

少し一般的にして： $\psi_r\psi_{r'}(n)$は乗法的であるから，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \psi_r\psi_{r'}(n) = \prod_{p} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi(p)^m}{p^{ms}} \psi_r\psi_{r'}(p^m) \right\}$$

$$= \prod_{\substack{p\nmid r\\ p\nmid r'}}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{\substack{p\mid r\\ p\nmid r'}}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}(p-1)\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\right) \prod_{\substack{p\nmid r\\ p\mid r'}}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}(p-1)\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\right)\times$$

$$\times \prod_{\substack{p\mid r\\ p\mid r'}}\left(1+\frac{\chi(p)}{p^s}(p-1)^2\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\right)$$

$$= L(s,\chi)\prod_{\substack{p\mid r\\ p\nmid r'}}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{s-1}}\right)\prod_{\substack{p\nmid r\\ p\mid r'}}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{s-1}}\right)\prod_{\substack{p\mid r\\ p\mid r'}}\left(1+\frac{\chi(p)}{p^{s-1}}(p-2)\right)$$

これより，lemma の結果を得る。

Lemma 4.

$f(d;r,r')$ は上記の通りとして，任意の $q\geqq 1$ に対して，

$$\sum_{\substack{d\\ (d,q)=1}} \frac{1}{d} f(d;r,r') = \delta_{r,r'}\varphi(r)$$

が $(rr',q)=1$ のとき成立する。但し $\delta_{r,r'}$ は Kronecker の記号。又，更に

$$\sum_{d} |f(d;r,r')| \leqq \prod_{p\mid r}(p+1)\prod_{p\mid r'}(p+1).$$

Proof.

これらは，前記の lemma から直ちに得られる。

Lemma 5.

$$E(M,N;\chi\psi_r\psi_{r'}) = \sum_{M<n\leqq M+N} \chi(n)\psi_r\psi_{r'}(n) \quad , \quad \chi : \bmod q$$

とすれば,

$$E(M,N;\chi\psi_r\psi_{r'}) = \frac{\varphi(qr)}{q} N\delta_\chi \delta_{r,r'} + O\Big(\sqrt{q}\log q \prod_{p\mid r}(p+1)\prod_{p\mid r'}(p+1)\Big)$$

が，$(rr',q)=1$ なる条件下に成立する。

Proof.

$$E(M,N;\chi\psi_r\psi_{r'}) = \sum_{M<n\leqq M+N} \chi(n) \sum_{d\mid n} f(d;r,r')$$

$$= \sum_{d} f(d;r,r')\chi(d) \sum_{\frac{M}{d}<n\leqq\frac{1}{d}(M+N)} \chi(n)$$

$$= \sum_{d} f(d;r,r')\chi(d) \left\{ \frac{\varphi(q)}{qd} N\delta_\chi + O(\sqrt{q}\log q)\right\}$$

$$= N\delta_\chi \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{\substack{d \\ (d,q)=1}} \frac{f(d;r,r')}{d} + O\Big(\sqrt{q}\log q \sum_{d} |f(d;r,r')|\Big)$$

Lemma 6.

$\chi_j \pmod{q_j}$ は相異る原始指標とし，$q_j \leqq Q$ と仮定する。このとき任意の $J,R,M,N \geqq 1$ について,

$$\sum_{j\leq J}\ \sum_{\substack{r\leq R\\(r,q_j)=1}} \frac{q_j\,\mu^2(r)}{\varphi(q_j r)} \Bigl|\sum_{M<n\leq M+N} c(n)\,\chi_j(n)\,\psi_r(n)\Bigr|^2$$

$$\leq \bigl(N + O(JQR^2(\log QR)^2)\bigr) \sum_{M<n\leq M+N} |c(n)|^2$$

ここに $c(n)$ は任意の複素数。

<u>Proof.</u>

2次形式の一般論から，双対な形式

$$B = \sum_{M<n\leq M+N} \Bigl|\sum_{j\leq J}\ \sum_{\substack{(q_j,r)=1\\r\leq R}} b(j,r)\,\chi_j(n)\,\psi_r(n) \Bigl(\frac{q_j\,\mu^2(r)}{\varphi(q_j r)}\Bigr)^{\frac12}\Bigr|^2$$

について考えれば充分である。計算をすすめれば，

$$B = \sum_{j,j'}\ \sum_{\substack{r,r'\\(q_j,r)=1\\(q_{j'},r')=1}} b(j,r)\,\overline{b(j',r')} \Bigl(\frac{q_j q_{j'}\,\mu^2(r)\mu^2(r')}{\varphi(q_j r)\varphi(q_{j'} r')}\Bigr)^{\frac12} \sum_{M<n\leq M+N} \chi_j\overline{\chi_{j'}}(n)\,\psi_r\overline{\psi_{r'}}(n)$$

$$\leq \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 \frac{q_j\,\mu^2(r)}{\varphi(q_j r)} E(M,N;\chi_j\overline{\chi_j}\,\psi_r\overline{\psi_r}) +$$

$$+\ 2\sum_{j,r} |b(j,r)|^2 \Bigl(\frac{q_j\,\mu^2(r)}{\varphi(q_j r)}\Bigr)^{\frac12} \sum_{\substack{j',r'\\(j',r')\neq(j,r)}} \Bigl(\frac{q_{j'}\,\mu^2(r')}{\varphi(q_{j'} r')}\Bigr)^{\frac12} \bigl|E(M,N;\chi_j\overline{\chi_{j'}}\,\psi_r\overline{\psi_{r'}})\bigr|$$

従って Lemma 5 から，$\delta_{\chi_j\overline{\chi_{j'}}} = \delta_{j,j'}$ に注意して，

$$B \leqq \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 \frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(q_j r)} \left\{ \frac{\varphi(q_j)}{q_j} N \varphi(r) + O\left(\sqrt{q_j} \log q_j \prod_{p|r} (p+1)^2\right)\right\}$$

$$+ 2 \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 \left(\frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(q_j r)}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{j',r' \\ (j',r')\neq(j,r)}} \left(\frac{q_{j'} \mu^2(r')}{\varphi(q_{j'} r')}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{q_j q_{j'}} \log(q_j q_{j'}) \prod_{p|r}(p+1) \prod_{p|r'}(p+1)$$

$$\leqq N \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 \; +$$

$$+ O\left\{ \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 \left(\frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(q_j r)}\right)^{\frac{1}{2}} J Q \log Q \cdot \log\log Q \cdot \prod_{p|r}(p+1) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{r' \leqq R} \left(\frac{\mu^2(r')}{\varphi(r')}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{p|r'}(p+1) \right\}$$

$$= N \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 + O\left\{ \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 \left(\frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(q_j r)}\right)^{\frac{1}{2}} J Q \log Q \log\log Q \, \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{p|r}(p+1) \; R^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$= N \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 + O\left\{ \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 \, J Q R^2 \log Q (\log\log Q)^{\frac{3}{2}} \times \right.$$

$$\left. \times (\log\log R)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$= \left\{ N + O\left(J Q R^2 (\log QR)^2\right)\right\} \sum_{j,r} |b(j,r)|^2 .$$

これは lemma の結果を意味する。

Lemma 7.

Summary の lemma.

Proof.

Montgomery [9] のいくつかの idea を用いる。

まず

$$S(s, \chi, \psi_r) = \sum_{N \leqq n \leqq N^A} c(n)\chi(n)\psi_r(n) n^{-s},$$

$$S(s, \chi, \psi_r ; u) = \sum_{N \leqq n \leqq u} c(n)\chi(n)\psi_r(n) n^{-s}$$

とおく。

すると

$$S(\sigma_1 + it, \chi, \psi_r) = S(\sigma + it, \chi, \psi_r) N^{A(\sigma - \sigma_1)} + (\sigma - \sigma_1)\int_N^{N^A} S(\sigma + it, \chi, \psi_r ; u) u^{-\sigma_1 + \sigma - 1} du.$$

これより $\sigma_1 \geqq \sigma$ ならば

$$|S(\sigma_1 + it, \chi, \psi_r)|^2 \ll |S(\sigma + it, \chi, \psi_r)|^2 +$$

$$+ (\sigma - \sigma_1)^2 \int_N^{N^A} u^{-2\sigma_1 + 2\sigma - 1} \log u \, du \times \int_N^{N^A} |S(\sigma + it, \chi, \psi_r ; u)|^2 \frac{du}{u \log u}.$$

$$\ll |S(\sigma+it, \chi, \psi_r)|^2 + \int_N^{N^A} |S(\sigma+it, \chi, \psi_r; u)|^2 \frac{du}{u \log u}.$$

よって

$$\sum_{k \leq K_j} |S(s_{j,k}, \chi_j, \psi_r)|^2$$

$$\ll \sum_{k \leq K_j} |S(\sigma+it_{j,k}, \chi_j, \psi_r)|^2 + \int_N^{N^A} \sum_{k \leq K_j} |S(\sigma+it_{j,k}, \chi_j, \psi_r; u)|^2 \frac{du}{u \log u}.$$

所で, Gallagher ([9, p.3]) により

$$\sum_{k \leq K_j} |S(\sigma+it_{j,k}, \chi_j, \psi_r; u)|^2$$

$$\ll \delta^{-1} \int_{-T}^{T} |S(\sigma+it, \chi_j, \psi_r; u)|^2 dt + \left\{ \int_{-T}^{T} |S(\sigma+it, \chi_j, \psi_r; u)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \int_{-T}^{T} |S'(\sigma+it, \chi_j, \psi_r; u)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

但し $S' = \frac{d}{ds} S$.

更に, 再び Gallagher [5] により

$$\int_{-T}^{T} |S(\sigma+it, \chi_j, \psi_r; u)|^2 dt$$

$$\ll T^2 \int_N^u \Big| \sum_{\substack{y < n \leq y e^{1/T} \\ n \leq u}} n^{-\sigma} c(n) \chi_j(n) \psi_r(n) \Big|^2 \frac{dy}{y}$$

同じく

$$\int_{-T}^{T} |\zeta'(\sigma+it, \chi_j, \psi_r, u)|^2 dt$$

$$\ll T^2 \int_N^u \Bigl| \sum_{\substack{y<n\le ye^{1/T} \\ n\le u}} n^{-\sigma} c(n) \chi_j(n) \psi_r(n) \log n \Bigr|^2 \frac{dy}{y} .$$

として，これらをまとめると，

$$\sum_{j\le J} \sum_{\substack{r\le R \\ (r,q_j)=1}} \frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(q_j r)} \sum_{k\le K_j} \Bigl| \sum_{N\le n\le N^A} c(n) \chi_j(n) \psi_r(n) n^{-s_{j,k}} \Bigr|^2$$

$$\ll \delta^{-1} T^2 \int_N^{N^A} \sum_{j\le J} \sum_{\substack{r\le R \\ (r,q_j)=1}} \frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(q_j r)} \Bigl| \sum_{\substack{y\le n\le ye^{1/T} \\ n\le N^A}} n^{-\sigma} c(n) \chi_j(n) \psi_r(n) \Bigr|^2 \frac{dy}{y} +$$

$$+ T^2 \Bigl\{ \int_N^{N^A} \sum_{j\le J} \sum_{\substack{r\le R \\ (r,q_j)=1}} \frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(q_j r)} \Bigl| \sum_{\substack{y\le n\le ye^{1/T} \\ n\le N^A}} n^{-\sigma} c(n) \chi_j(n) \psi_r(n) \Bigr|^2 \frac{dy}{y} \Bigr\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \Bigl\{ \int_N^{N^A} \sum_{j\le J} \sum_{\substack{r\le R \\ (r,q_j)=1}} \frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(q_j r)} \Bigl| \sum_{\substack{y\le n\le ye^{1/T} \\ n\le N^A}} n^{-\sigma} c(n) \chi_j(n) \psi_r(n) \log n \Bigr|^2 \frac{dy}{y} \Bigr\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ T^2 \delta^{-1} \int_N^{N^A} \frac{du}{u \log u} \int_N^u \sum_{j\le J} \sum_{\substack{r\le R \\ (r,q_j)=1}} \frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(q_j r)} \Bigl| \sum_{\substack{y\le n\le ye^{1/T} \\ n\le u}} n^{-\sigma} c(n) \chi_j(n) \psi_r(n) \Bigr|^2 \frac{dy}{y} +$$

$$+ T^2 \Bigl\{ \int_N^{N^A} \frac{du}{u \log u} \int_N^u \sum_{j\le J} \sum_{\substack{r\le R \\ (r,q_j)=1}} \frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(r q_j)} \Bigl| \sum_{\substack{y\le n\le ye^{1/T} \\ n\le u}} n^{-\sigma} c(n) \chi_j(n) \psi_r(n) \Bigr|^2 \frac{dy}{y} \Bigr\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \int_N^{N^A} \frac{du}{u \log u} \int_1^{u} \sum_{j \leq J} \sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q_j)=1}} \frac{q_j \mu(r)}{\varphi(r q_j)} \Big| \sum_{\substack{y \leq n \leq y e^{1/T} \\ n \leq u}} n^{-\sigma} c(n) \chi_j(n) f_r(n) \log n \Big|^2 \frac{dy}{y} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

そこで Lemma 6 を用いれば

$$\sum_{j \leq J} \sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q_j)=1}} \frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(q_j r)} \sum_{k \leq K_j} \Big| \sum_{N \leq n \leq N^A} c(n) \chi_j(n) f_r(n) n^{-s_{j,k}} \Big|^2$$

$$\ll \delta^{-1} \sum_{N \leq n \leq N^A} (n + JTQR^2 (\log QR)^2) |c(n)|^2 n^{-2\sigma} +$$

$$+ \left\{ \sum_{N \leq n \leq N^A} (n + JTQR^2 (\log QR)^2) |c(n)|^2 n^{-2\sigma} \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{N \leq n \leq N^A} (n + JTQR^2 (\log QR)^2) |c(n)|^2 n^{-2\sigma} \log^2 n \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \delta^{-1} \int_N^{N^A} \frac{du}{u \log u} \sum_{N \leq n \leq u} (n + JTQR^2 (\log QR)^2) |c(n)|^2 n^{-2\sigma}$$

$$+ \left\{ \int_N^{N^A} \frac{du}{u \log u} \sum_{N \leq n \leq u} (n + JTQR^2 (\log QR)^2) |c(n)|^2 n^{-2\sigma} \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \int_N^{N^A} \frac{du}{u \log u} \sum_{N \leq n \leq u} (n + JTQR^2 (\log QR)^2) |c(n)|^2 n^{-2\sigma} \log^2 n \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll (\delta^{-1} + \log N^A) \sum_{N \leq n \leq N^A} (n + JTQR^2 (\log QR)^2) |c(n)|^2 n^{-2\sigma} \Big(1 + \int_n^{N^A} \frac{du}{u \log u}\Big)$$

$$\ll A\log A\ (\delta^{-1}+\log N)\sum_{N\leqq n\leqq N^A}(n+JT2R^2(\log 2R)^2)\,|c(n)|^2 n^{-2\alpha}.$$

これは lemma の結果である。

<u>Lemma 8.</u>

$$\lambda_d=\begin{cases}\mu(d) & : d<z \text{ のとき}\\ \mu(d)\,(\log z^{1+\varepsilon}/d)/(\log z^{\varepsilon}) & : z\leqq d<z^{1+\varepsilon} \text{ のとき}\\ 0 & : d\geqq z^{1+\varepsilon} \text{ のとき}\end{cases}$$

とすると 任意の $x\geqq 1$ に対して

$$\sum_{1<n\leqq x}\Big(\sum_{d|n}\lambda_d\Big)^2\ll_{\varepsilon}\frac{x}{\log z}$$

<u>Proof.</u> これは，Barban-Vehov [10] の結果であるが，彼らの証明は充分とはいいがたい。しっかりした証明は [11] にある。

§3. 定理の証明.

Lemma 2 において $\xi_d=\lambda_d$ (Lemma 8) とする。そうして，この場合 $\sum_{d|n}\lambda_d=0$ $(1<n<z)$ であるから，Vinogradov - Montgomery の idea により，χ は non-principal として（勿論これだけ考えれば充分である）：$a(n)=\sum_{d|n}\lambda_d$ とおいて

$$e^{-\frac{1}{Y}} + \sum_{z \leqq n} a(n)\chi(n)\psi_r(n)n^{-s} e^{-\frac{n}{Y}}$$

(3.1)
$$= L(s,\chi)M(s,\chi,\psi_r) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} L(\tfrac{1}{2}+i(t+u),\chi)M(\tfrac{1}{2}+i(t+u),\chi,\psi_r)Y^{\frac{1}{2}-\sigma+iu}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\sigma+iu)du,$$

が $\sigma > \frac{1}{2}$ において成立する。

以下 次のことを常に仮定する。

(3.2)
$$\log z \asymp \log QT \ , \ \log R \asymp \log QT \ , \ \log Y \asymp \log QT$$

勿論これらは，最後にたしかめられることである。この仮定のもとに，$\rho = \beta + i\gamma$ が $L(s,\chi)$ の零点であれば，

$$1 \ll \Bigl|\sum_{z \leqq n < Y^2} a(n)\chi(n)\psi_r(n)n^{-\rho} e^{-\frac{n}{Y}}\Bigr|^2 +$$

$$+ \ Y^{1-2\beta}\int_{-(\log QT)^2}^{(\log QT)^2} |L(\tfrac{1}{2}+i(\gamma+u),\chi)|^2 |M(\tfrac{1}{2}+i(\gamma+u),\chi,\psi_r)|^2 \, du$$

を容易に得る。まず $\chi:(\mathrm{mod}\ q)$ として，この両辺に $\frac{\mu^2(r)q}{\varphi(qr)}$ を乗じて $r \leqq R$，$(r,q)=1$ についての和をとると，

$$\sum_{\substack{r \leqq R \\ (r,q)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} >> \frac{\varphi(q)}{q}\log R$$

である故，

$$\log R \ll \sum_{\substack{r \leqq R \\ (r,q)=1}} \frac{q\mu^2(r)}{\varphi(rq)} \Big| \sum_{Z \leqq n < Y^2} a(n)\chi(n)\psi_r(n) n^{-\rho} e^{-\frac{n}{Y}} \Big|^2 +$$

$$+ Y^{1-2\beta} \int_{-(\log QT)^2}^{(\log QT)^2} \left| L\left(\tfrac{1}{2}+i(\gamma+u), \chi\right)\right|^2 U_R(\gamma+u, \chi)\, du ,$$

但し

$$U_R(t,\chi) = \sum_{\substack{r \leqq R \\ (r,q)=1}} \frac{q\mu^2(r)}{\varphi(rq)} \left| M\left(\tfrac{1}{2}+it, \chi, \psi_r\right)\right|^2 ,$$

となる。ここで 零点は次のように 2つの類に分けられる：

(I)

$$\rho \text{ s.t. } \log R \ll \sum_{\substack{r \leqq R \\ (r,q)=1}} \frac{q\mu^2(r)}{\varphi(rq)} \Big| \sum_{Z \leqq n < Y^2} a(n)\chi(n)\psi_r(n) n^{-\rho} e^{-\frac{n}{Y}} \Big|^2$$

(II)

$$\rho \text{ s.t. } \log R \ll Y^{1-2\beta} \int_{-(\log QT)^2}^{(\log QT)^2} \left| L\left(\tfrac{1}{2}+i(\gamma+u), \chi\right)\right|^2 U_R(\gamma+u, \chi)\, du .$$

以下当分のあいだ (I) の場合を考察する。まず，そのために

領域 $\alpha \leqq \sigma \leqq 1$, $|t| \leqq T$ を

$$\Delta_k : \alpha \leqq \sigma \leqq 1 , \quad \frac{k}{\log QT} \leqq t < \frac{k+1}{\log QT}$$

$$k = 0, \pm 1, \cdots, \pm [T \log QT].$$

と分割する。そして各 Δ_k 内にある $L(s,\chi)$ (mod q) ($q \leqq Q$) の零点の数を $N_\chi(\Delta_k)$ と書けば，Linnik のよく知られた結果により

(3.3) $$N_\chi(\Delta_k) \ll (1-\alpha)\log QT \qquad (1-\alpha \geqq (\log QT)^{-1})$$

が成りたつ。次に領域 $\alpha \leqq \sigma \leqq 1$, $|t| \leqq T$ 内に実際に零点をもつ $L(s,\chi_j)$ (mod q_j) ($q_j \leqq Q$) の個数を $J^{(I)}$ とする。そして更に $L(s,\chi_j)$ が Δ_k 内に零点 $\rho_{j,k}$ をもつものとする。勿論あるkについては $\rho_{j,k}$ は存在しないのであるが，この点は以下の議論には不都合をおこさない。さて，このようにするとき，$\rho_{j,k} = \sigma_{j,k} + it_{j,k}$ と書けば，

$$J^{(I)}\log R \ll \log R \sum_{j} \sum_{\substack{k \\ \rho_{j,k}:(I)}} 1$$

$$\ll \sum_{\substack{j \\ (I)}} \sum_{\substack{r \leqq R \\ (r,q_j)=1}} \frac{q_j \mu^2(r)}{\varphi(rq_j)} \Big\{ \sum_{k \equiv 1 \pmod 2} + \sum_{k \equiv 0 \pmod 2} \Big\} \times$$

$$\times \Big| \sum_{z \leqq n < Y^2} a(n)\chi_j(n) n^{-\rho_{j,k}} e^{-\frac{n}{Y}} \Big|^2$$

となり，各 $k, k' \equiv \nu \pmod 2$ については

$$|t_{j,k} - t_{j,k'}| \geqq (\log QT)^{-1} \qquad (k \neq k')$$

であるから，Lemma 7 により，

$$\ll \log QT \sum_{Z \leqq n < Y^2} (n + J^{(\mathrm{I})} TQR^2 (\log QR)^2) |a(n)|^2 n^{-2\alpha} e^{-\frac{2n}{Y}}$$

$$\ll \log QT \left\{ \frac{Y^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)\log QT} + J^{(\mathrm{I})} Z^{1-2\alpha} TQR^2 (\log QT) \right\}$$

を得る。但しここで Lemma 8 及び条件 (3.2) を用いた。両辺を比較して，

$$Z^{2\alpha-1} \gg TQR^2 \log QT \tag{3.4}$$

であれば，

$$\sum_{j} \sum_{\substack{k \\ \rho_{j,k}:(\mathrm{I})}} 1 \ll \frac{Y^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha) \log QT}$$

を得る。よって (3.4) のもとに，(3.3) により，

$$\sum_{\rho:(\mathrm{I})} 1 = \sum_{j} \sum_{\substack{k \\ \rho_{j,k}:(\mathrm{I})}} N_{\chi_j}(\Delta_k)$$

$$\ll (1-\alpha) \log QT \sum_{j} \sum_{\substack{k \\ \rho_{j,k}:(\mathrm{I})}} 1 \ll Y^{2(1-\alpha)} \tag{3.5}$$

を得る。

次に (II) の場合を考えるのであるが，議論がやや複雑になる。まず領域 $\alpha \leqq \sigma \leqq 1$, $|t| \leqq T$ を

$$D_k : \ \alpha \leqq \sigma \leqq 1 \quad , \quad k[3(\log QT)^2] \leqq t < (k+1)[3(\log QT)^2]$$

$$k = 0, \pm 1, \cdots, \pm [T/[3(\log QT)^2]]$$

と分割する。$L(s,\chi)$ $(\bmod\, q)$ $(q \leqq Q)$ が D_k 内にもつ零点の個数を $N_\chi(D_k)$ とすれば

$$(3.6) \qquad N_\chi(D_k) \ll (\log QT)^3$$

となる。そこで，(II)の条件をみたしかつ D_k 内にある $L(s,\chi_j)$ $(\bmod\, q_j)$ の零点の一つを $\omega_{j,k} = \bar{\sigma}_{j,k} + i\bar{t}_{j,k}$ とすると，(II)の被積分函数の最大値が $t'_{j,k} = \bar{t}_{j,k} + u$ で起るとして

$$(3.7) \qquad (\log QT)^{-1} Y^{2\alpha-1} \ll |L(\tfrac{1}{2}+it'_{j,k},\chi_j)|^2 U_k(t'_{j,k},\chi_j)$$

を得る。そして更に後で定まるパラメータ V を用いて，$\omega_{j,k}$ を 2 つに分類する。

$(\mathrm{II}^{(1)})$: $\omega_{j,k}$ s.t. $|L(\frac{1}{2}+it'_{j,k},\chi_j)| \geqq V$,

$(\mathrm{II}^{(2)})$: $\omega_{j,k}$ s.t. $|L(\frac{1}{2}+it'_{j,k},\chi_j)| < V$.

そして $\mathrm{II}^{(\nu)}$ をみたす $\omega_{j,k}$ の個数を $R^{(\nu)}$ $(\nu=1,2)$ とする。[9, Theorem 10.3] と全く同様にして

$$(3.8) \qquad P^{(1)} \ll V^{-4} Q^2 T (\log QT)^5$$

を得る。

一方 $(\mathrm{II}^{(2)})$ であれば (3.7) より

$$V^{-2} Y^{2d-1} (\log QT)^{-1} \ll U_R(t'_{j,k}, \chi_j)$$

である。しかるに

$$U_R(t'_{j,k}, \chi) \ll \log QT \sum_{r \leq R} \frac{\mu^2(r)}{r} \left| M\left(\tfrac{1}{2} + it'_{j,k}, \chi, \psi_r\right) \right|^2,$$

そして

$$M(s, \chi, \psi_r) = \sum_{n \leq Z^{1+\varepsilon}} \frac{\chi(n)\lambda_n}{n^s} \psi_r(n) \prod_{p \mid \frac{r}{(r,n)}} \left(1 - \frac{p}{p^s} \chi(p)\right)$$

$$= \sum_{n \leq Z^{1+\varepsilon} r} \frac{\chi(n)}{n^s} b_r(n),$$

但し $b_r(n) = \sum_{\substack{dm = n \\ d \mid \frac{r}{(r,m)}}} \psi_r(m) \lambda_m \mu(d) d$, と書けるから、

[9, Theorem 8.2] によって

$$P^{(2)} V^{-2} Y^{2d-1} (\log QT)^{-2} \ll \sum_{r \leq R} \frac{\mu^2(r)}{r} \times$$

$$\times \sum_{\substack{j,k \\ \omega_{j,k} : \mathrm{II}^{(2)}}} \left| \sum_{n \leq r Z^{1+\varepsilon}} \frac{\chi_j(n)}{n^{\frac{1}{2} + it'_{j,k}}} b_r(n) \right|^2$$

$$\ll \sum_{r \le R} \frac{\mu^2(r)}{r} \log QT \left(r z^{1+\varepsilon} + P^{(2)} Q T^{\frac{1}{2}} \log QT \right) \sum_{n \le r z^{1+\varepsilon}} \frac{b_r(n)^2}{n}.$$

但し、この評価を得るに当って $k \equiv 1, 2 \pmod 2$ と分類し

$$|t'_{j,k} - t'_{j,k'}| > (\log QT)^2 \qquad (k \ne k', \quad k \equiv k' \pmod 2)$$

を利用した。さて、粗い評価で、

$$\sum_{n \le r z^{1+\varepsilon}} \frac{b_r(n)^2}{n} \ll R^2 (\log QT)^4$$

を得る故

$$P^{(2)} V^{-2} Y^{2\alpha-1} (\log QT)^{-2}$$

$$\ll z^{1+\varepsilon} R^3 (\log QT)^6 + P^{(2)} Q T^{\frac{1}{2}} R^2 (\log QT)^7.$$

従って

$$(3.9) \qquad Y^{2\alpha-1} \gg V^2 Q T^{\frac{1}{2}} R^2 (\log QT)^9$$

であれば

$$(3.10) \qquad P^{(2)} \ll z^{1+\varepsilon} R^3 V^2 Y^{1-2\alpha} (\log QT)^9$$

となる。

以上まとめると、まず (3.6) により、

$$\sum_{\rho : (\mathrm{II})} 1 = \sum_{\substack{j,k \\ \omega_{j,k}}} \sum N_{\chi_j}(D_k)$$

$$\ll (\log QT)^3 \left\{ \sum_{\substack{j \\ \omega_{j,k}:(\mathrm{II}^{(1)})}} \sum_{k} 1 + \sum_{\substack{j \\ \omega_{j,k}:(\mathrm{II}^{(2)})}} \sum_{k} 1 \right\}$$

$$\ll (\log QT)^3 \left(P^{(1)} + P^{(2)} \right).$$

よって条件(3.9)のもとに，(3.8)，(3.10)より

$$\sum_{\rho:(\mathrm{II})} 1 \ll V^{-4} Q^2 T (\log QT)^8 + Z^{1+\varepsilon} R^3 V^2 Y^{1-2\alpha} (\log QT)^{12}.$$

すなわち，

条件(3.4)，(3.9)のもとに

$$\sum_{q \leqq Q} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)}^{*} N(\alpha, T, \chi) = \sum_{\rho:(\mathrm{I})} 1 + \sum_{\rho:(\mathrm{II})} 1$$

$$\ll Y^{2(1-\alpha)} + V^{-4} Q^2 T (\log QT)^8 + Z^{1+\varepsilon} R^3 V^2 Y^{1-2\alpha} (\log QT)^{12}.$$

さて，この結果において，条件(3.4)を考えて，

$$Z = (QTR^3)^{\frac{1}{2\alpha-1}} \quad , \quad R = (QT)^{\varepsilon}$$

とおき，更に，条件(3.9)を考えて，

$$Y^{2\alpha-1} = V^2 QTR^9$$

$$V = (Q^2 T)^{\frac{3\alpha-2}{4\alpha}} R^{\frac{1}{4}}$$

とおく。すると，

$$V^{-4}Q^2T(\log QT)^8 = (Q^2T)^{\frac{2}{\alpha}(1-\alpha)} R^{-1}(\log QT)^8,$$

$$\begin{aligned} Z^{1+\varepsilon} R V^2 Y^{1-2\alpha} (\log QT)^{12} &= (QT)^{\frac{2(1-\alpha)}{2\alpha-1}} R^{-1} (\log QT)^{12} \\ &\leqq (Q^4T^3)^{\frac{1}{\alpha}(1-\alpha)} R^{-1} (\log QT)^{12} \qquad (\text{但し } \alpha \geqq 4/5). \end{aligned}$$

そして又

$$\begin{aligned} Y &= \left(Q^{\frac{2(2\alpha-1)}{\alpha}} T^{\frac{5\alpha-2}{2\alpha}} R^{\frac{19}{2}} \right)^{\frac{1}{2\alpha-1}} \\ &= Q^{\frac{2}{\alpha}} T^{\frac{5\alpha-2}{2\alpha(2\alpha-1)}} (QT)^{\frac{19\varepsilon}{2(2\alpha-1)}} \end{aligned}$$

であるから

$$\sum_{q \leqq Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\bmod q)} N(\alpha, T, \chi) \ll \left(Q^{\frac{2}{\alpha}} T^{\frac{5\alpha-2}{2\alpha(2\alpha-1)}} (QT)^{\frac{19\varepsilon}{2(2\alpha-1)}} \right)^{2(1-\alpha)} + (Q^4T^3)^{\frac{1}{\alpha}(1-\alpha)}$$

が $\alpha \geqq 4/5$ において成立する。 よって特に $\alpha \geqq 1-\varepsilon$ であれば

$$\sum_{q \leqq Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\bmod q)} N(\alpha, T, \chi) \ll (Q^4T^3)^{(1+\varepsilon)(1-\alpha)}$$

となる。しかるに Jutila [12] によって，$\alpha \geqq 4/5$ のとき

$$\sum_{q \leqq Q} \sum_{\chi(\bmod q)}^{*} N(\alpha, T, \chi) \ll (Q^2 T)^{2(1-\alpha)} (\log QT)^c$$

である故，これによって定理の証明が完成したのである。

[注意] Burgess [12] によれば，non-principal $\chi \pmod q$ で

$$\sum_{M < n \leqq M+N} \chi(n) \ll \sqrt{N}\, q^{\frac{3}{16}+\varepsilon}.$$

これを Pólya-Vinogradov のかわりに用いれば，$\alpha = 1$ の近くで更に改良できる。

30 IX '75.

文献

[1] H. L. Montgomery and A. Selberg : Linnik's theorem. (unpublished)

[2] M. Jutila : On two theorems of Linnik concerning the zeros of Dirichlet's L-function. Ann. Acad. Fennicae. ser. A, I. Math., No. 458 (1969).

[3] P. Turán : On a density theorem of Yu. V. Linnik. Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., Ser. A 6 (1961), 165-179.

[4] E. Fogels : On the zeros of L-functions. Acta Arith., 11 (1965) 67–96.

[5] P. X. Gallagher : A large sieve density estimate near $\sigma = 1$. Invent. Math., 11 (1970), 329–339.

[6] 本橋洋一 : Linnik-Fogels-Gallagher の定理について. 解析数論シンポジウム報告集. 1973年10月 京都.

[7] 本橋洋一 : 素数分布論序説, 数学 26 (1974), 1–12

[8] E. Bombieri : Le grand crible dans la theorie analytique des nombre. Soc. Math. France, Asterisque No. 18, 1974.

[9] H. L. Montgomery : Topics in multiplicative number theory. Lect. Note in Math., No. 227, Springer 1971.

[10] M. B. Barban and P. P. Vehov : On an extremal problem. Trans. Moscow Math. Soc., 18 (1968), 91–99.

[11] 本橋洋一 : 篩の方法からの一問題. 数理研講究録 222 (1974), 9–50.

[12] M. Jutila : Zero density estimate for L-functions, II. (unpublished)

[13] D. A. Burgess : On character sums and L-series, II. Proc. London Math. Soc., 13 (1963), 524–536.