数理解析研究所講究録
第 274 巻 1976 年 178-179

C.J.Everett の仕事の紹介

茨城大・理　竹内　護

これは，C.J.Everett，'Fermat's conjecture, Roth's theorem, Pythagorean triangles, and Pell's equation'，Duke Math.(1974) の紹介である．この中で，彼は，Fermat's equation に Roth's theorem を応用している．Everett の結果は次の通り：

<u>定理(Everett)</u>．奇素数 $p \geqq 3$ と，整数 $v \geqq 1$ を fix する．そのとき，直線 $y=x+v$ 上に，x^p+y^p が整数の p べきであるような互いに素な整数の組 (x,y) はせいぜい有限個しか存在しない．

次に証明の概略を述べる．今 (x,y) を定理の条件を満たす一組の解とする．z は $x^p+y^p=z^p$ を満たす整数とする．$b=\frac{v}{2}$，$a=x+b$ とおく．その時，次の (1), (2) は容易に出る：

(1) $z^p=(a-b)^p+(a+b)^p=2a(a^{p-1}+C_2^p a^{p-3}b^2+\dots+C_{p-3}^p a^2 b^{p-3}+C_{p-1}^p b^{p-1})$，

$$(2)\quad 0<(z-2^{1/p}a)\,p\,(2^{1/p}a)^{p-1}<z^p-2a^p=2a\left(C_2^p a^{p-3}b^2+\dots+C_{p-1}^p b^{p-1}\right)<a^{p-2}K,$$

$$0<\frac{z}{a}-2^{1/p}<\frac{K'}{a^2},$$

ここで，K, K' は v と p にのみ依存する定数である．

Everett は，まず v が奇数，偶数の場合に分け，更に，$p\nmid z$, $p\mid z$ の場合に分けて証明している．すべて同じ論法なので，ここでは，v が奇数，$p\nmid z$ の場合だけを述べる．

$u=2a$ とおく．$2x=u-v$, $2y=u+v$ がすぐわかる．これより，u と v は両方とも奇数で，$(u,v)=1$ である．(1) から，

$$(3)\quad 2^p z^p=2u\left(u^{p-1}+C_{p-2}^p u^{p-3}v^2+\dots+C_{p-3}^p u^2v^{p-3}+C_{p-1}^p v^{p-1}\right)\equiv 2uQ'$$

がわかる．これより，$2^{p-1}\mid Q'$ で，$z^p=uQ''$, $Q'\equiv 2^{p-1}Q''$ を得る．(3) から，$p\mid u \Rightarrow p\mid z$ が出る．上の仮定から，$p\nmid u$ で，$(u,Q')=(u,Q'')=1$ が出る．これより，$2a=u=z_1^p$, $z=z_1z_2$, $(z_1,z_2)=1$ が出る．これを (2) に代入すると，

$$0<\frac{2z_2}{z_1^{p-1}}-2^{1/p}<\frac{4K'}{z_1^{2p}}=\frac{4K'}{(z_1^{p-1})^{2+\varepsilon}},\quad \varepsilon=\frac{2}{p-1}$$

を得る．$z_1^p=u=2a=2x+v$ であるから，異なる x に，異なる z_1 が対応する．これから，Roth's theorem より，定理の条件を満たす (x,y) はせいぜい有限個しか存在しない．

附記．M氏に伺ったところによれば，この結果の effective な証明（Baker 流の）がすでにあるそうです．