数理解析研究所講究録
第 275 巻 1976 年 54-56

乱流におけるダイアグラム法I

東大 生産研　　吉澤 徴

乱流はいわゆるレイノルズ数をカップリングパラメターとする非線型現象であり，しかもそれが大きいときにのみ興味がある。一方，我々は非線型方程式の取り扱いに際して，厳密解の得られる稀な場合を除いて，摂動法にたよらざるを得ない。この点，すなわち強い相互作用をもった系を摂動法で取り扱わねばならない所に乱流研究の（少なくとも現在は）致命的障害がある。

上のような困難のもとで我々がなすべきことは，できるだけ「効率のよい」摂動法を工夫することであろう。本稿で概略する「セルフコンシステントな方法」はそのような「効率のよさ」を狙ったものである。

u_k^α（kは波数ベクトル、αは成分を示す）を速度のフーリエ成分としたとき，確率分布関数 $P(u_k^\alpha, t)$（tは時間）に対するリューヴィル方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}P=\sum_{k\alpha}\frac{\partial}{\partial u_k^\alpha}\Big(\nu k^2u_k^\alpha-\sum_{pq}\sum_{\beta\gamma}iM_k^{\alpha\beta\gamma}\delta_{k,p+q}u_p^\beta u_q^\gamma$$
$$+\sum_\beta D_k^{\alpha\beta}h_k\frac{\partial}{\partial u_{-k}^\beta}\Big)P. \qquad (1)$$

ここで、νは動粘性係数、h_kは外力によるエネルギー流入、$M_k^{\alpha\beta\gamma}$は非線型性の強さを示すカップリングパラメターである。今我々はコルモゴロフスペクトル導出を念頭におき、定常状態に興味をもっている。そのとき(1)式は

$$\sum_{k\alpha}\frac{\partial}{\partial u_k^\alpha}\Big(\nu k^2u_k^\alpha+\sum_\beta D_k^{\alpha\beta}h_k\frac{\partial}{\partial u_{-k}^\beta}\Big)P$$
$$=\sum_{kpq}\sum_{\alpha\beta\gamma}iM_k^{\alpha\beta\gamma}\delta_{k,p+q}\frac{\partial}{\partial u_k^\alpha}u_p^\beta u_q^\gamma P. \qquad (2)$$

(2)の左辺を主要項とする摂動解は、いわゆる低レイノルズ数展開に当たり、そのままでは本稿の目ざす「効率のよい」展開とはなりえない。

今我々は乱流粘性ω_k、乱流拡散d_k、3種類のくりこまれたバーテックス$\Gamma_{ikpq}^{\alpha\beta\gamma}$ $(i=1,2,3)$を用いて(2)式を次のように書き直す。

$$\sum_{k\alpha}\frac{\partial}{\partial u_k^\alpha}\Big(\omega_ku_k^\alpha+\sum_\beta D_k^{\alpha\beta}d_k\frac{\partial}{\partial u_{-k}^\beta}\Big)P$$
$$=\epsilon\sum_{kpq}\sum_{\alpha\beta\gamma}\Big(i\Gamma_{1kpq}^{\alpha\beta\gamma}\delta_{k,p+q}\frac{\partial}{\partial u_k^\alpha}u_p^\beta u_q^\gamma+i\Gamma_{2kpq}^{\alpha\beta\gamma}\delta_{k+p,q}\frac{\partial^2}{\partial u_k^\alpha\partial u_p^\beta}u_q^\gamma$$
$$+i\Gamma_{3kpq}^{\alpha\beta\gamma}\delta_{k+p+q,0}\frac{\partial^3}{\partial u_k^\alpha\partial u_p^\beta\partial u_q^\gamma}\Big)P$$

$$+\epsilon^2(-----------)$$

$$+\epsilon^3(-------------). \qquad (3)$$

ここで、ϵは摂動の順序を示すパラメターであり、のちに1とおかれる。(3)式は次のように解釈される：我々はまずω_kとα_kを用いて乱流場を最適のガウス分布で近似し、それからのずれを$\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{ikpq}$でとりこむ。

次に$P=P_0+\epsilon P_1+\epsilon^2 P+----$と展開し、ダイアグラム法を用いて(3)式の解を求め、ω_k、α_k、$\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{ikpq}$を次の要請のもとに決める。すなわち、乱流理論において最も重要な物理量である乱流エネルギー$\langle u^\alpha_k u^\alpha_{-k}\rangle$とエネルギー輸送$\langle u^\alpha_{-k} u^\beta_p u^\gamma_{k-p}\rangle$が展開の初めの2項のみで決定される。

上のような摂動は、乱流粘性ω_k、くりこまれたバーテックス$\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{ikpq}$に基づく「有効レイノルズ数」展開となっており、少くとも「裸のレイノルズ数」の場合のように$\nu\to 0$とともに摂動項が無限大となってしまうような致命的な困難は防ぐことができる。本方法からのコルモゴロフスペクトルの導出、又参考文献等は次の二論文に与えられている。

A. Yoshizawa: On Edwards' Fokker-Planck approach and Kolmogoroff's spectrum, J. Phys. Soc. Japan 40 (1976) No.5; Statistical approach to steady homogeneous turbulence, with special reference to Kolmogoroff's spectrum, J. Phys. Soc. Japan 41 (1976) No.1.