

## モンテカルロ法を含む数値解法によるアプローチ

岩手大工 細川 巖  
航技研 山本 稀義

### 1. モンテカルロ法の効用

元来モンテカルロ法は、確率論をベースとする数値計算の一方法である。例えば、Buffon の針の問題で、 $\pi$  を計算するという技術もこのカテゴリーに属する。簡単な例として

$$\int_0^1 f(x) dx$$

を計算することを考えよう。  $dx$  は  $[0, 1]$  に於ける一様な確率測度とみなされるから、この積分は丁度その確率での  $f(x)$  の期待値であり、従って  $x$  を  $[0, 1]$  での一様乱数として取り出した  $f(x)$  の標本平均値で評価できる。即ち

$$\int_0^1 f(x) dx \doteq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i),$$

誤差は標本の数  $N$  の  $1/2$  乗に比例する。<sup>1)</sup>  $N$  を大きくすれば、精度は限りなく増すように思われるが、乱数の完全なものは実現できないので、擬似乱数を使う以上は、限度がある。従

って、上記のような一次元積分は別の数値計算法に頼る法が能率がいい。

然し、次元数が増して、50次元や100次元の定積分計算をする場合はどうだろう。精度の良い区分求積の仕方では、加速度的に計算時間がかかっていずれ駄目になる。モンテカルロ法では、次元の数に無関係に精度は  $O(N^{-1/2})$  で決ってくるので、むしろこの方が実用的になって来るのである。従って汎函数積分といわれる超多次元の積分を数値計算するとすれば、もはやモンテカルロ法以外の方法は考えられない。ソ連では汎函数積分とはいわず、連続積分というが、この種のモンテカルロ法の最初の計算が、Gel'fand & Chentsov<sup>2)</sup>により、量子物理の path integral を Wiener積分で示したものについて行われた。

所で、次節で述べるように、特性汎函数を使った乱流の formalism では、解を汎函数積分の形で示せることが分っている。もしそうなら、モンテカルロ法を使って、いきなり汎函数解に数値的アプローチを試みるという頗る fantastic な可能性も、追求する値打ちがある筈である。現行の乱流理論の殆どは何らかの「完結」仮説を含む、誤差の程度の分らない近似の理論であるに反し、これは厳密理論への誤差の程度の分った数値近似であるから、結果には大きな興味を寄せ

られるであろう。

われわれは、この観点から長らくいろいろな汎函数積分のテストを繰り返して来た。現在の所、1次元の乱流モデル、即ち Burgers 乱流に関しては、この方法は確立したといってよい。更に実在乱流への試行を進めつつあるが、これは現在進行中であるので、具体的結果は本稿では提出しない。

## 2. 乱流に於ける汎函数積分

### (i) Hopf の特性汎函数<sup>3)</sup>

乱流理論の汎函数表現は、Hopf によって次のように与えられた。

$$\phi(y, t) = \int \exp \left\{ i \int y_\alpha(x) \tilde{q}_\alpha(x, t) dx \right\} \delta P^\circ[\tilde{q}(x, t^\circ)] \quad (1)$$

ここで、 $\alpha$  は summation convention に従い、 $y, \tilde{q}$  は物理空間  $X$  の中の vector 函数とし、 $\delta P^\circ$  は  $t=t^\circ$  における  $\tilde{q}$  の確率測度である。 $\tilde{q}(x, t)$  は物理空間の境界条件を充し、初期の  $\tilde{q}(x, t^\circ)$  より一意的に力学法則 (Navier-Stokes 方程式 etc.) により発展したものとする。

(1) の  $\phi(y, t)$  は実際 Hopf 方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = i \int y_\alpha(x) \chi_\alpha \left[ \frac{\delta}{i \delta y(x)} \right] \phi dx \quad (2)$$

を充す一般解であることが確かめられる。ここで、 $\chi_\alpha$  は

$$\frac{\partial \tilde{q}_\alpha}{\partial t} = \chi_\alpha \tilde{q} \quad (3)$$

が  $\tilde{q}$  の力学法則を与えるような operator であって、Navier-Stokes 方程式では非線型である。方程式(3)の解 operator を  $T^{t-t^0}$  とすれば、

$$\tilde{q}(x, t) = T^{t-t^0} \tilde{q}(x, t^0) \quad (4)$$

と書いてもよい。

元来、乱流の特性汎函数の定義は

$$\phi(y, t) = \int \exp \left\{ i \int y_\alpha(x) \tilde{q}_\alpha(x, t) dx \right\} \delta P[\tilde{q}(x, t)] \quad (5)$$

であって、(1)とは異なるが、(5)と(1)を一致し得るのは、Hopf の証明した確率保存式

$$\delta P^0[\tilde{q}(x, t^0)] = \delta P[\tilde{q}(x, t)] \quad (6)$$

の故であることを注意しておこう。

さて、 $\tilde{q}$  の凡ての  $t$  時刻での相関量は、 $\phi(y, t)$  の  $y$  についての展開係数であるから、(1)-(4)により、それらを汎函数積分として公式化することができる。即ち、

$$\langle \tilde{q}_\alpha(x) \cdots \tilde{q}_\alpha(x') \rangle_t = \int T^{t-t^0} \tilde{q}_\alpha(x, t) \cdots T^{t-t^0} \tilde{q}_\alpha(x', t) \delta P^0[\tilde{q}(x, t^0)] \quad (7)$$

モンテカルロ法によれば、これは  $P^0$  によって分布する乱函数  $\tilde{q}(x, t^0)$  を被積分汎函数に入れた標本値の平均で近似できる。 $P^0$  は任意であるが、正規分布と仮定するのが技術的に簡単である。一方、 $T^{t-t^0}$  が explicit に知られていれば、標本値の

計算は容易であるが、そうでない時には、時間的に step by step に力学方程式を解く操作が要るので、二次元場以上になると厄介になる。

実行方法については、Burgers model についての Hosokawa & Yamamoto<sup>4)</sup> の論文を参照して頂きたい。この結果は次節で紹介する。

(ii) random force の働く場合

速度場に random force  $f(x, t)$  が作用すると、 $\tilde{q}(x, t)$  はもはや決定論的に  $\tilde{q}(x, t^0)$  のみに関連づけられなくなるので、 $\sim$  の記号は省略し、

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial t} = \chi_\alpha q + f_\alpha \quad (8)$$

と書こう。今、 $f$  の確率測度を  $P^f(f)$  とし、大きい特性汎函数

$$\psi(y, h, t) = \int_{\{f\}} \phi(y, t; f) \exp(i \iint h_\mu f_\mu dx dt) \delta P^f(f) \quad (9)$$

を導入する。 $\phi(y, t; f)$  は(8)により、 $\phi$  が  $f$  に依存することを示す。

(8) を差分型で書き、 $\Delta t = (t - t^0) / M$  として

$$q_\alpha^{k+1} = (1 + \Delta t \chi_\alpha) q_\alpha^k + \Delta t f_\alpha^k, \quad (10)$$

$$q^k \equiv q(x, t^0 + k\Delta t)$$

と表われし、 $T^{t-t^0}$  の代りに  $\phi$  の中でこの関係を考慮すると、

$$\psi(y, 0, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{|f|} \int_A \cdots \int_A \exp(i \int y_\alpha q_\alpha^M dx) \prod_{k=0}^{M-1} \delta[q^{k+1} - (1 + \Delta t \chi) q^k - \Delta t f^k] \delta q^k \delta P(q^0) \delta P^\psi(f) \quad (11)$$

ここに、 $\delta[q^k - F(q^{k-1}, f^{k-1})] \delta q^k$  は  $q^k = F$  で 1, otherwise 0 であるような確率測度で、デルタ汎函数と理解すべきものである。A は  $q^k$  の作る函数空間を総称した。  $P^\psi(f)$  が  $f \equiv 0$  (no random force) に集中していれば、(11) が Hopf の特性汎函数  $\phi(y, t)$  に帰着することは明かであろう。

$\psi(y, 0, t)$  は乱函数  $q^0$  及び  $f$  を発生せしめて、被積分汎函数の標本平均を取れば、前項(i)と同様の計算原理が可能であるが、もし、 $f(x, t)$  が各時刻で独立に与えられると、 $\psi$  は次のような汎函数微分方程式を満足することが証明できる。<sup>5)</sup>

[各時刻で独立に与えられるという意味は、異った時刻での相関量が零になるということである。<sup>13)</sup> 例えば

$$\langle f_\alpha(x, t) f_\beta(x', t') \rangle = F_{\alpha\beta}(x, x', t) \delta(t - t') \quad (12)$$

となる。]

即ち、

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i \int y_\alpha(x) \chi_\alpha \left[ \frac{\delta}{i \delta y(x)} \right] \psi dx + \Gamma(y, t) \psi, \quad (13)$$

ここに

$$\Gamma(y, t) = \frac{i^2}{2!} \iint F_{\alpha\beta}(x, x', t) y_\alpha(x) y_\beta(x') dx dx'$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i^3}{3!} \iint G_{\alpha\beta\gamma}(x, x', x'', t) y_\alpha(x) y_\beta(x') y_\gamma(x'') dx dx' dx'' \\
& + \dots, \tag{14}
\end{aligned}$$

そして  $F_{\alpha\beta}$ ,  $G_{\alpha\beta\gamma}$  は相関の 2 次, 3 次 … の cumulants である。これは、Novikov<sup>6)</sup> が時間的に定常で、空間的に一様、そして Gauss 分布の random force が働く乱流場で導いた特性汎関数方程式の一般化である。実際、その条件の下では、(14)

は

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i \int y_\alpha(x) \chi_\alpha \left[ \frac{\delta}{i \delta y_\alpha} \right] \psi dx - \frac{1}{2} \iint y_\alpha(x) y_\beta(x') F_{\alpha\beta}(x-x') dx dx' \psi \tag{15}$$

となり、確かに Novikov 方程式となる。更に興味のあるのは、これを逆 Fourier 変換したもの、つまり乱流場の確率分布方程式に戻したものは、

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \int \frac{\delta}{\delta q_\alpha(x)} [\chi_\alpha(q) p] dx + \frac{1}{2} \iint \frac{\delta^2}{\delta q_\alpha(x) \delta q_\beta(x')} [F_{\alpha\beta}(x-x') p] dx dx' \tag{16}$$

となり、形式的に汎関数  $p$  に対する Fokker-Planck 方程式になるという事実である。これが、Edwards<sup>7)</sup> のいわゆる「乱流場に対する Liouville 方程式」と称するものと同じであることは多言を要すまい。特に、多次元 Fokker-Planck 方程式の最終定常解の一意存在は無有限領域についても証明されていることを付け加えておこう。<sup>8)</sup> 超多次元の場合は  $p$  そのものが数学的意味を失うが、 $\psi$  の存在を前提としてその symbolic な意味付けが可能であることは、別の所で議論したので興味

のある方は参照して頂きたい。<sup>9)</sup> さて、モンテカルロ法の本論に帰り、ここで注意すべきは、 $p^\psi$  について以上のようなやや特殊な仮定を置くことにより、(16)の解表現を使って(11)は次のように書き換えられることなのである。

即ち、

$$\psi(y, 0, t) = \int_A \exp(i \int y_a q_a^M) dx p(q^M) \delta q^M, \quad (17)$$

ここに、 $F_{\alpha\beta}$  を直交化するような函数空間の変換を行えば、 $p$  の解は Gauss 型 Green 核の step by step の無限回積分の形で表わすことができるのである。Brown 運動に詳しい人は、(16)が、(定常 Gauss 型の  $f$  に従うとして)、(8)で示される Langevin 力学の分布函数方程式であること、そして乱流場の偶然解は一般化した Brown 運動の偶然解で示せることに気付かれるであろう。この偶然解というのが、実は、 $p(q^M) \delta q^M$  の分布に従う  $q(x, t)$  の一つの標本に相当するのである。

Burgers model の場合<sup>10)</sup> に例をとると、この一般化した Brown 運動で、 $t^j$  時刻から  $t^{j+1}$  時刻の間に  $q(x, t)$  の Fourier 成分  $v_n$  は次のように発展する。

$$v_n^{j+1} = v_n^j + \Delta t \chi_n(v^j) + (\Delta t B_n)^{1/2} \gamma, \quad (18)$$

$$\text{ここに } \langle f_n(t) f_m(t') \rangle = \delta(t-t') F_{mn}, \quad F_{mn} = \delta_{mn} B_n \quad (19)$$

$\gamma$  は標準正規乱数で、毎回独立に変る。これが偶然解であって、(17)の汎函数積分は結局、(18)によって生成される乱函数



- 函数空間の中の random walk - の標本平均を取ればよいことになるが、これは一般的な(11)を扱うよりは能率がよい。

初期に層流から出発する時には、 $v_n^0$  は凡ての標本で一致した層流値を取ることになるが、初期に乱流の時には、その分布に応じて  $v_n^0$  は種々の標本値を取らせなければならない。 $B_n$  は random force の power spectrum に相当する。計算結果は次節で紹介しよう。

前項(i)でも同じような困難があったが、この場合でも、二次元以上の乱流場を扱う時には、Fourier 成分の数が飛躍的に多くなるので、ここに述べた方法を実在乱流に適用するには、現行のコンピュータを使う限り、もう一つの研究の飛躍を要する点がある。

### 3. 計算実例の紹介

この節では、既発表の二つの論文<sup>4), 10)</sup>の結果だけを紹介する。Fig. 1 から 7 までは、前節(i)の方法により、

$$\chi_g = -g \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \quad (20)$$

と取って Burgers 乱流の減衰を調べたものである。初期乱流の確率分布は平均値ゼロの Gaussian とし、相関函数は

$$Q(x, x') = \exp[-(x-x')^2] \quad (21)$$

として、エネルギーの時間的变化を追うと、いろいろな Reynolds 数  $R$  に対して、Fig. 1 のようにプロットされる。 $R=100$  で既に  $R \rightarrow \infty$  の漸近曲線が得られることは注目すべきである。モンテカルロ法の標本数による安定の具合は Fig. 2 から推察すればよい。この場合  $T^{t-t_0} u(x)$  の計算で考慮した  $u(x)$  の Fourier 成分の数は  $2N$  (sin 級数と cos 級数) で、これに対するエネルギー減衰の依存度は Fig. 3 にプロットされる。 $N=30$  で飽和していると考えてよいだろう。そしてこの時、減衰法則は  $t^{-2/3}$  を与えることが見てとれる。この結果からみて、本会講演の桑原氏のモード分解理論は、よい結果を得るには、先ずこの程度の次元数を要することが分るだろう。Fig. 4 は相関函数の計算結果であるが、ここでも  $R=100$  は  $R \rightarrow \infty$  の漸近値を与えると考えてもよいことを示している。つまり、(20) に於ける非線型項の効果は、 $R$  がある程度以上になると、全体として Reynolds 数に余り sensitive でなくなってくる。(Reynolds number independence) Fig. 5 に再びモンテカルロ法の標本平均の推移を、 $t=1$  での相関函数について示した。得られた相関函数の Fourier 変換によって計算したエネルギー・スペクトルを Fig. 6 に示す。 $R=100$  では大体に於いて  $K^{-2}$  のスペクトルを見ることができる。

Fig. 7 には、初期相関函数、従って初期エネルギー・スペ

クトルをいろいろ変えた場合のエネルギー減衰を示す。初期エネルギー・スペクトルを

$$E(k) = C_n k^n \exp(-k^2/4), \quad C_n = 1/\{\Gamma[(n+1)/2] 2^{n+1}\} \quad (22)$$

とし、 $n=0$  の場合が(21)の場合に相当する。 $n$ が大きくなると共に、減衰法則の中数が  $-2/3$  より連続的に小さくなり、 $n=2$  の附近から  $-1$  を越えてしまうことが分るだろう。この結果は、 $n > 0$  の場合について、最近の Tatsumi & Kida<sup>11)</sup> の Burgers model に対する統計理論(特に、その中の補助仮設)に疑問を投ずるものである。

Fig. 8 から 24 までは、主流が存在し、限られた区間  $[0, 1]$  での Burgers model が Gaussian random force を受ける場合に、前節(ii)の方法を適用したものである。境界条件により、流れは非一様であり、主流の介在によって、臨界 Reynolds 数 ( $= \pi^2$ ) を越える場合には、定常乱流に達することが期待され、乱れの発生及び構造を調べるのに興味あるモデルといえよう。この時、

$$\chi \mathcal{L} = \mathcal{L} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} - 2\mathcal{L} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \quad (23)$$

となり、第一項は主流との干渉を示す。われわれの計算では、主流速度は常に 1 で一定とし、その代り乱流の発生によって圧力が変るものとした。

即ち、

$$P = (1/R) + \int_0^1 q^2 dx. \quad (24)$$

境界条件を充す  $q$  の Fourier modes  $\{v_n\}$  の数  $N$  をどこまで取るかについて、Fig. 8 が参考資料となった。(23) の力学的発展について、理論的漸近解 ( $R \rightarrow \infty$ ) と比べて、 $\Delta t = 0.004$  として Euler の近似を行い、 $N = 20$  で相当にいい近似を示すので、これを採用する。 $B_n$  については、 $B_n = 0.01$  (for  $n = 1, \dots, 20$ );  $0.01$  (for  $n = 1, 2$ ), otherwise 0;  $0.0001$  (for  $n = 1, \dots, 20$ ) の三種についてとり上げた。各  $a, b, c$  のケースと呼ぼう。そして初期は凡て層流で、 $v_n = 0$  とする。標本数は 200 で十分であった。Fig. 9-12 はケース  $a, b$  の  $R$  を変えた時のエネルギー・スペクトルの時間変化を示す。

Fig. 13, 14 は対応する平均速度プロフィールである。 $R = 10$  では、臨界 Reynolds 数に近いので、乱れの発達は未熟であることがみられる。Fig. 15-17 に、乱流エネルギーの生成及び発達を  $a, b, c$  について示した。実線は、注入された random force のエネルギーを比較のためにさし入れた。これで見ると、乱流エネルギーの発達は、random force のスペクトルや大きさには余り関係せず、ほぼ一定の所に落ち着く傾向があることが分る。特に Fig. 17 のケースでは、乱流エネルギーは主流から入っていることが明白である。ケース  $c$  のエネルギー

ギー・スペクトルの発展は Fig.18 に示した。a, b, c の凡てについて  $R=100$  では、定常に達した後、Burgers model に特有の  $n^{-2}$  法則が確認される。Fig.19-21 に、それぞれの分散速度場の模様を示した。  $R=100$  では、分散のばらつきはどのケースも同じようであるが、少しづつレベルが違っていることが見られるであろう。これは random force の注入エネルギーに比例するようと思われる。Fig.22-24 に、各ケースの速度場成分 ( $n=1, 2, 3$ ) の定常確率分布をヒストグラムで示した。これは、ケース c の場合で顕著なように、速度場は random force で乱されながらも (23) の二つの安定解 (I), (II) で示される。(IV) は定常解であるが安定でない。) に向かって近づいて行く傾向があることを示し、ケース a, b では random force の大きさによってこの傾向が弱められること、そしてこれが Fig.22-24 の分散レベルの差に直接関係することが容易に理解されよう。

Burgers model で、 $R$  の大きい所で、今の境界条件で安定な定常解が二つもあるということが、その定常確率分布の形に大きい影響をもったことが、これで明かであるが、実在乱流ではこんなことはあり得ない。従って、こんな場合を pseudo turbulence と称することにした。<sup>10)</sup> pseudo turbulence には、「準正規分布」近似や Wiener-Hermite 展開

が不向きであることは明かであるので、モンテカルロ法で研究した成果は充分にあると思われるが、今後は、本当の turbulence に適用することが興味を中心となろう。

#### 4. 後記

(11)式は非常に一般的な公式であって、 $P^{\mathcal{Y}}$ の与え方によって、 $g(x,t)$ の広汎な確率過程を包含していることを注意したい。講演中、質問が出たが、「random force  $f(x,t)$ が各時刻で独立で与えられない場合」は、 $f(x,t)$ に時間相関が存在し、いわゆる振動数スペクトルが(中沢宏氏の本会講演の意味で) white でなくなり、当然(13)-(14)の方程式は成立しなくなる。所で、(13)-(14)は、逆 Fourier 変換によって確率分布方程式に直したものが丁度マルコフ過程の Smoluchovski - Chapman の式と形式的に等価であることが分っている。そうすると、 $f(x,t)$ に時間相関がある場合の、 $g$ の確率過程は Smoluchovski - Chapman の式で表わすことはできず、従ってマルコフ過程の埒外に出るわけである。恐らく、その場合の(non-Markovian)の確率分布方程式は(16)のようでなく、時間に関して微積分方程式となって、過去の履歴に依存するものとなるだろう。

マルコフ過程の中でも、 $P^{\mathcal{Y}}$ が Gaussian で、時間的に定常

であるような場合は、最も簡単な過程であって、Fokker-Planck 方程式 (16) が成立し、その最終定常状態の一意性は Ref. 8), 9) を引用したが、たとえ  $P^{\psi}$  が Gaussian でなくても、時間的に定常でさえあれば、多次元マルコフ過程である限り、Kolmogorov のエルゴート定理<sup>12)</sup>によってこの性質は明らかに成立することをつけ加えておこう。つまり、 $F_{\alpha\beta}$ ,  $G_{\alpha\beta}$ , ... が尤に依存しなければ、初期条件にかかわらず (13) の最終定常状態  $\psi^{\infty}$  の一意存在は、(物理的には余りこだわる必要のない) 定理の条件を損ねない限り、Ref. 9) の超多次元の場合の論法を併用して、保証されている筈である。

random force の存在しない Hopf 方程式の場合は、上記のマルコフ過程に入らない。従ってこの時  $\psi^{\infty}$  の一意存在は一般にいえないことを注意したい。このことは、定常乱流の研究で、具体的にはっきりしてくるだろう。前節の pseudo turbulence では、random force を除いた場合、最終定常状態が初期条件に依存して全く一意でないことが結論できている。<sup>10)</sup>

#### 参考文献

- 1) J.M.Hammersley and D.C.Handscomb, Monte Carlo Methods (Methuen & Co.Ltd., London, 1964).

- 2) I.M.Gelfand and N.N.Chentsov, Soviet Phys. - JETP 4, 945 (1957).
- 3) E.Hopf, J.Rat.Mech.Anal. 1, 87 (1952).
- 4) I.Hosokawa and K.Yamamoto, Phys.Fluids 13, 1683 (1970).
- 5) I.Hosokawa, J.Phys.Soc.Japan 25, 271 (1968).
- 6) E.A.Novikov, Soviet Phys. - JETP 20, 1290 (1965).
- 7) S.F.Edwards, J.Fluid Mech. 18, 239 (1964).
- 8) A.H.Grey, Jr. , J.Math.Phys. 6, 644 (1965).
- 9) I.Hosokawa, to be published in J.Statist.Phys. 15, no. 2.
- 10) I.Hosokawa and K.Yamamoto, J.Statist.Phys. 13, 245 (1975).
- 11) T.Tatsumi and S.Kida, J.Fluid Mech. 55, 659 (1972).
- 12) 吉田耕作, 物理数学概論 (日本評論社, 昭和24年), 第4章.
- 13) この場合,  $\langle f_2 \rangle = 0$  が前提であることに注意.



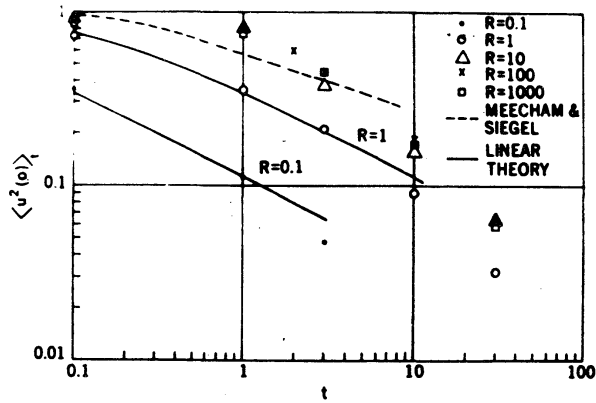


FIG. 1. Features of the energy decay.

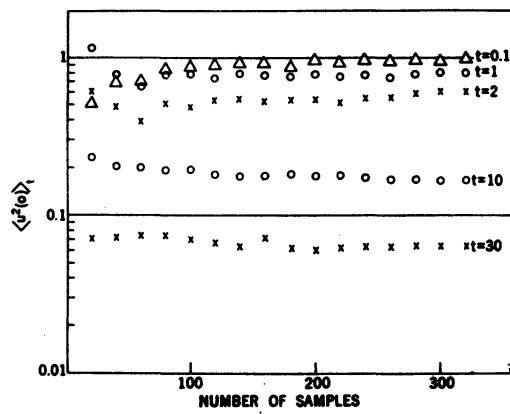


FIG. 2. Average values for  $\langle u(0) \rangle_t$  versus the number of samples at various instants, with  $R = 100, N = 30$ .

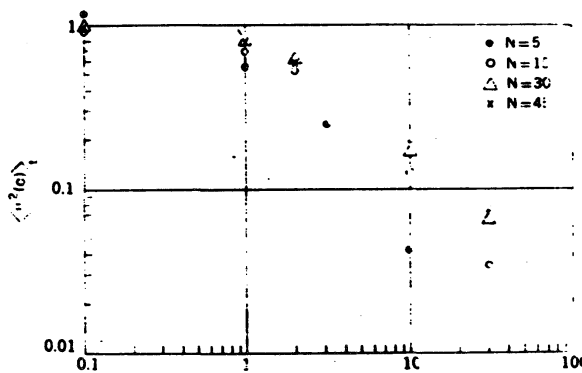


FIG. 3. Dependence of the energy decay on  $N$ , with  $R = 10$ .

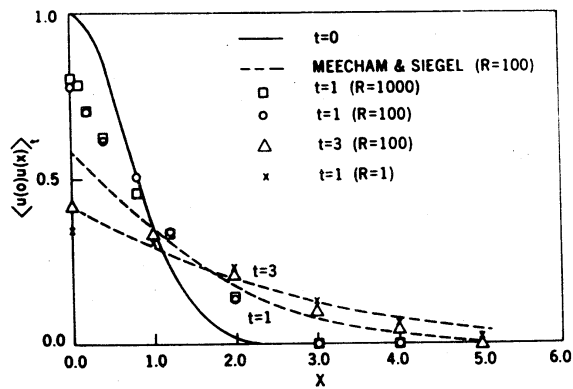


FIG. 4. Correlation function  $\langle u(0)u(x) \rangle_t$  for various values of  $R$  and  $t$ , with  $N = 30$ .

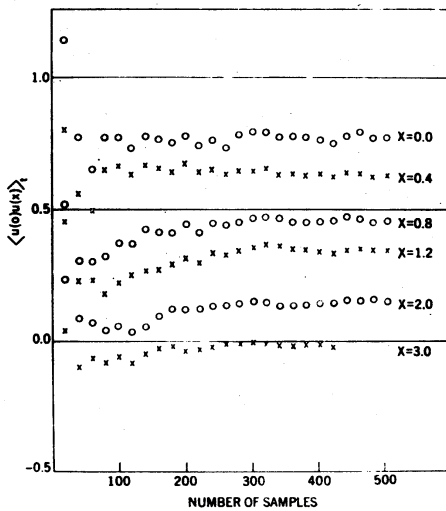


FIG. 5. Average values for  $\langle u(0)u(x) \rangle_t$  at  $t = 1$  versus the number of samples at various distances, with  $R = 100$ ,  $N = 30$ .

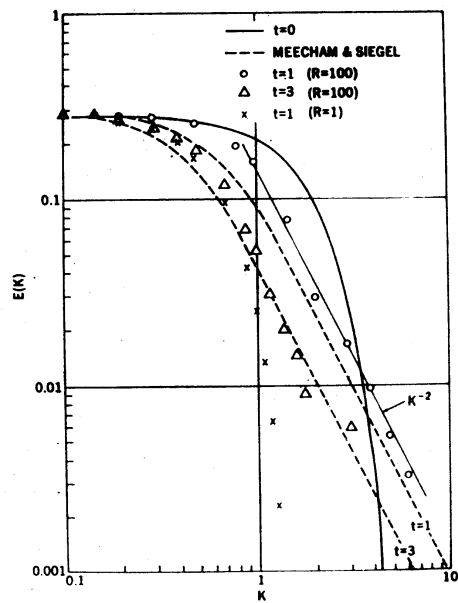


FIG. 6. Energy spectrums  $E(k, t)$  for various values of  $R$  and  $t$  with  $N = 30$ .

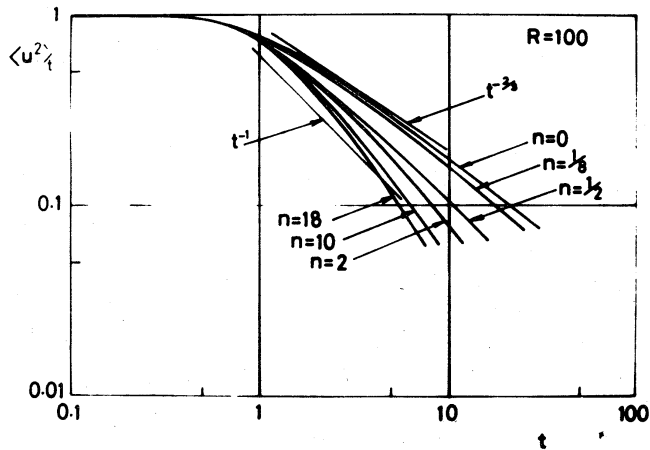


Fig. 7 Energy decay of Burgers equations with various initial energy spectrums.

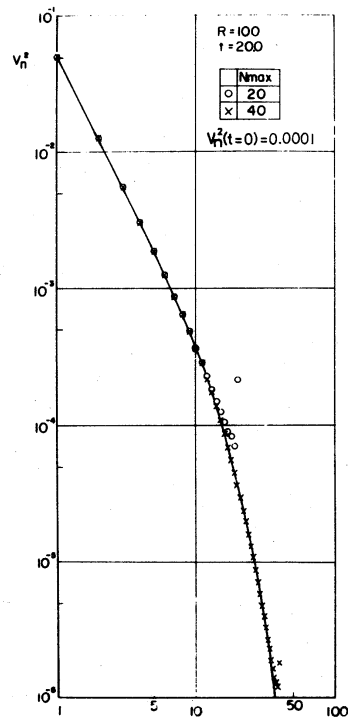


Fig. 8. Squared wave-number component of the secondary flow (without noise) velocity for  $R = 100$  at  $t = 20.0$  with the initial value  $v_n^2 = 0.0001$  for all  $n$ , plotted against the wave number.

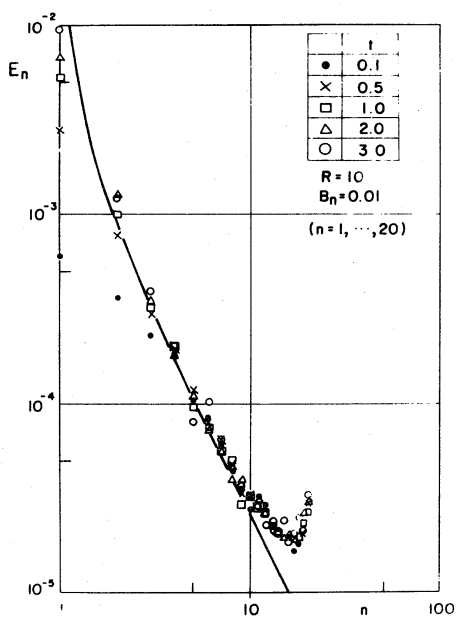


Fig. 9. Energy spectrum of the stochastic secondary flow with white noise for  $R = 10$ .

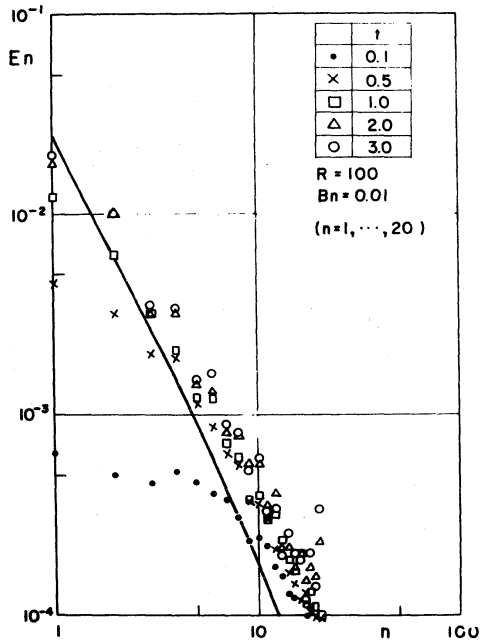


Fig. 10. Energy spectrum of the stochastic secondary flow with white noise for  $R = 100$ .

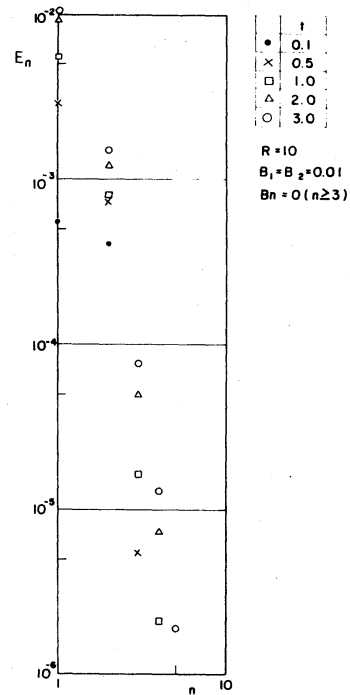


Fig. 11. Energy spectrum of the stochastic secondary flow with "red" noise for  $R = 10$ .

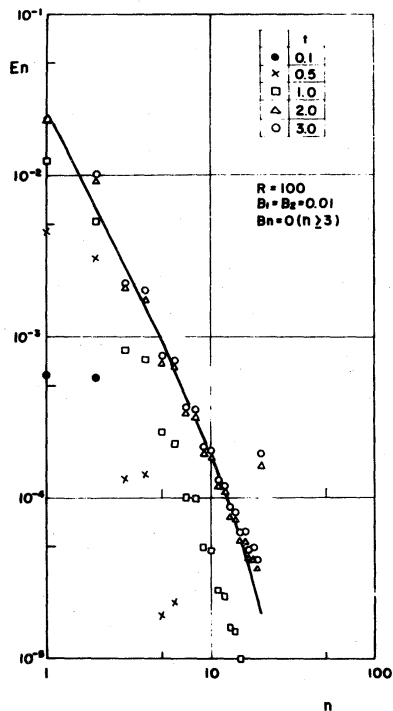


Fig. 12. Energy spectrum of the stochastic secondary flow with "red" noise for  $R = 100$ .

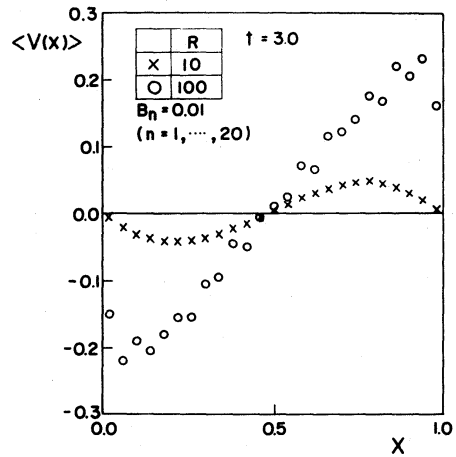


Fig. 13. Average velocity profile of the stochastic secondary flow with white noise.

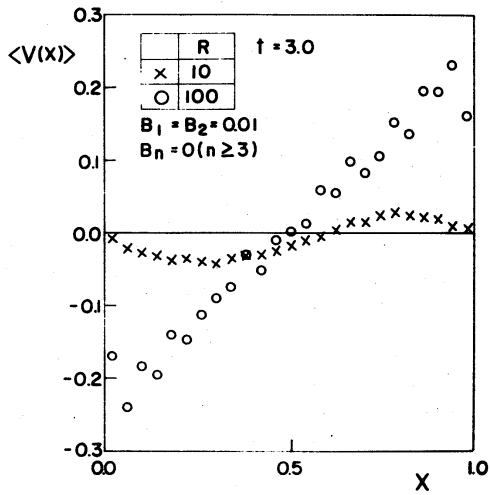


Fig. 14. Average velocity profile of the stochastic secondary flow with "red" noise.

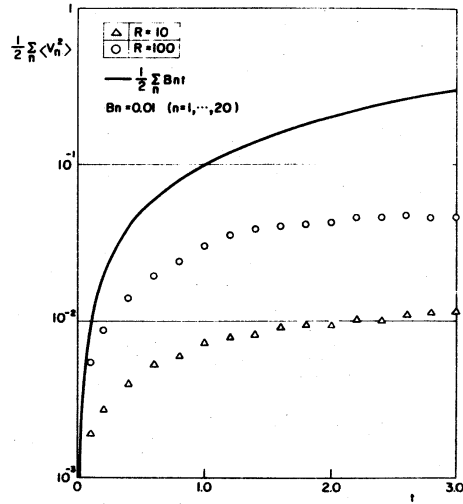


Fig. 15. Time development of the energy of the stochastic secondary flow with white noise.

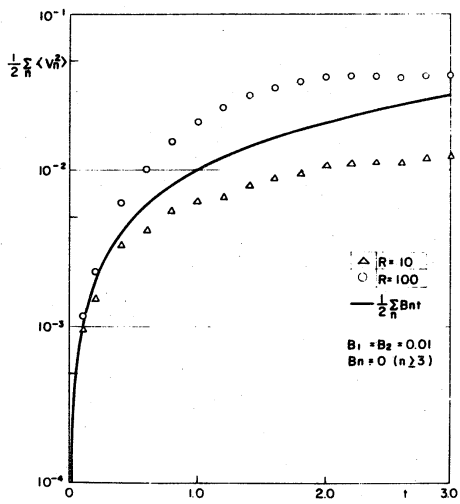


Fig. 16. Time development of the energy of the stochastic secondary flow with "red" noise.

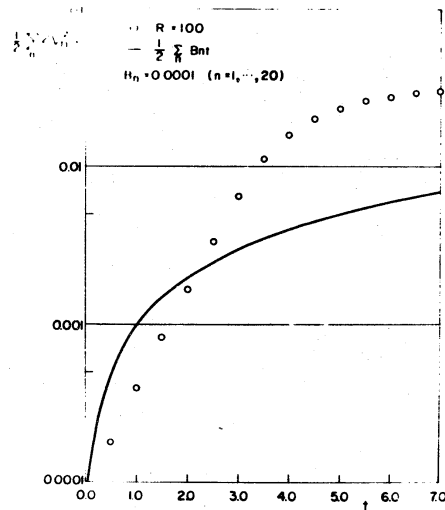


Fig. 17. Time development of the energy of the stochastic secondary flow with very weak white noise.

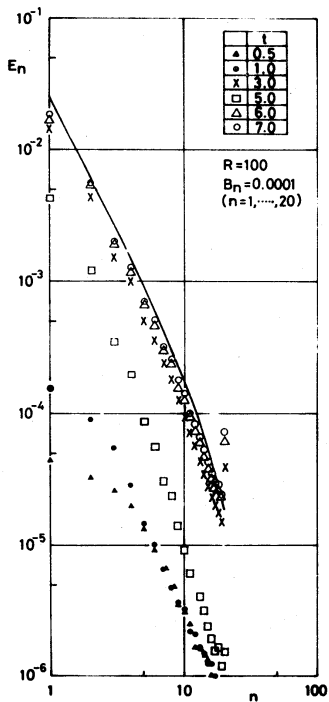


Fig. 18. Energy spectrum of the stochastic secondary flow with very weak white noise for  $R = 100$ .

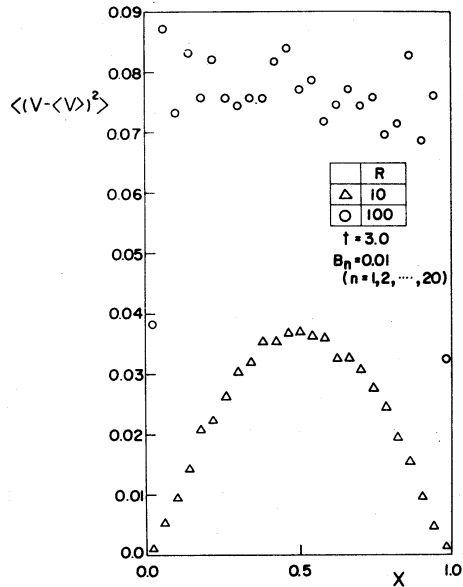


Fig. 19. Velocity variance field of the stochastic secondary flow with white noise.

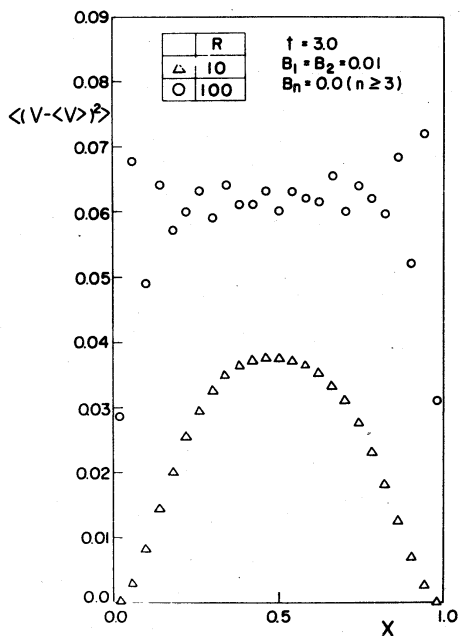


Fig. 20. Velocity variance field of the stochastic secondary flow with "red" noise.

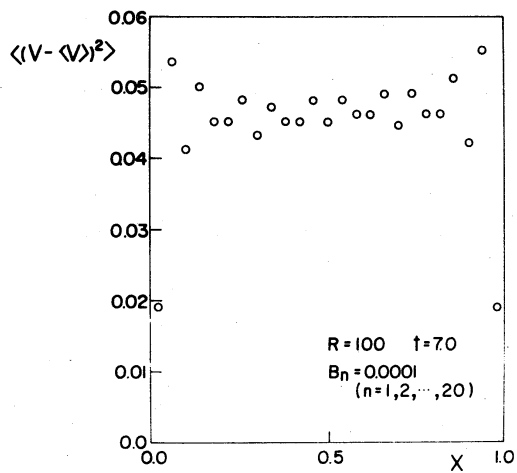


Fig. 21. Velocity variance field of the stochastic secondary flow with very weak white noise.

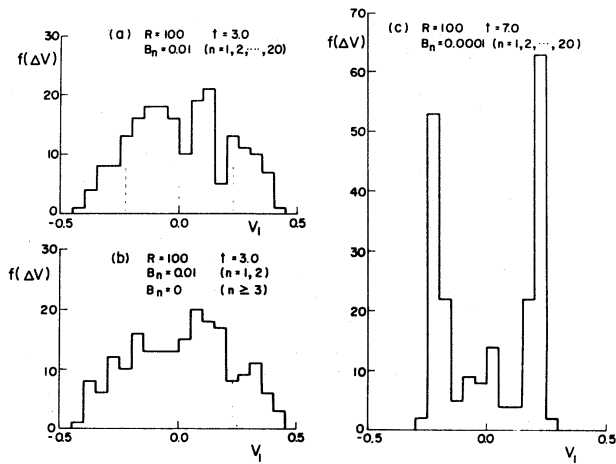


Fig. 22. Histograms of the first mode of the stochastic secondary flow velocity in the ensembles.

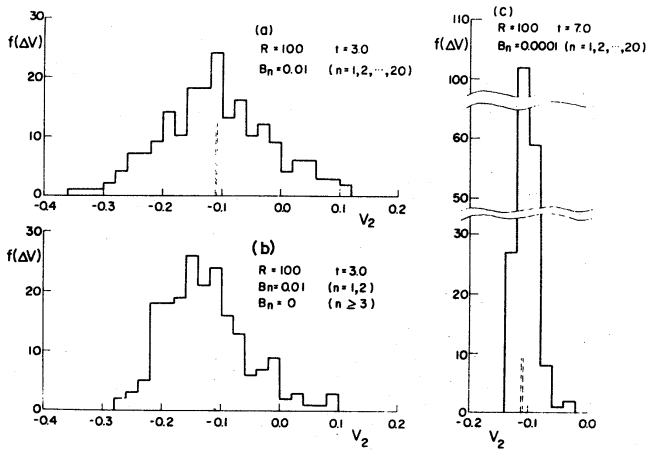


Fig. 23. Histograms of the second mode of the stochastic secondary flow velocity in the ensembles.

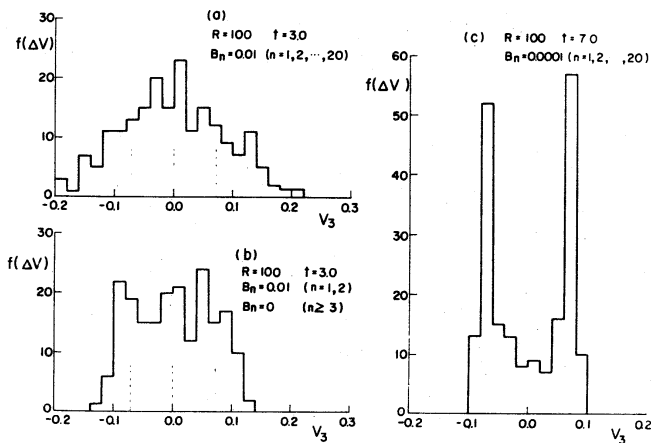


Fig. 24. Histograms of the third mode of the stochastic secondary flow velocity in the ensembles.