数理解析研究所講究録
第275巻 1976年 94-98

非線型確率微分方程式の解の積分表現

京大 理 物理オ1 中澤 宏

Kraichnan-Wyld的なFormulationでの乱流理論においては，いわゆるRenormalized Perturbation expansionを求める多くの努力がなされて来た．ここでは積分表現（＝Wiener-Hermite Expansion）が1つの完成型としてのRenormalized Perturbation Sieriesを与えることを指摘し，その他に

(1)積分表現を確率微分方程式に応用するための基本的処方の開発．

(2)実際応用上導入すべきいくつかの近似とその性質の一般的議論．

(3)簡単な非線型確率微分方程式を例として解き，近似の精度を定常分布に関する諸平均値の厳密値との比較及び数値実験によるPower Spectrumとの比較，によって評価．

(4) Fourth Cumulant Discard近似と積分表現の最低近似とは，非

線型項が奇数次のベキのみから成る場合には一致し，偶数次ベキがあれば一致しないこと．

(5) Equivalent Linearization と積分表現の最低近似との一致．等が論じられた．これらの詳細に関しては Prog. Theor. Phys. に投稿中であるので，あるいは，かなりの Space を必要とし，ここに記すのは実際的でないので，省略し，次のような補足的説明のみを記す．

§1．積分表現

確率変数 v がある white noise $f(t)$：

$$\langle f(t)\rangle = 0, \quad \langle f(t)\, f(t')\rangle = \delta(t-t')$$

の functional であって，条件 $\langle v^2\rangle$ が有限；を満たすときには，kernels と呼ばれる1組の deterministic な函数 $\{K_n(t_1,\cdots,t_n);\ n=0,1,\cdots\}$ が存在して

$$v = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dt_n\, K_n(t_1,\cdots,t_n)\, G_n(t_1,\cdots,t_n)$$

と表現される．ここで $G_0\equiv 1$，$G_1(t_1)\equiv f(t_1)$，$G_2(t_1,t_2)\equiv f(t_1)f(t_2)-\delta(t_1-t_2)$，…… である．無限和は次の意味で v に収束する：

$$\lim_{N\to\infty}\left\langle \left(v-\sum_{n=0}^{N}\int\cdots\int K_n G_n\right)^2\right\rangle = 0 .$$

積分表現の m 次，n 次の項は2次平均ノルムの意味の内積 $(A,B)\equiv\langle AB\rangle$ に関して直交している：

$$\left(\int\cdots\int K_m G_m,\ \int\cdots\int K_n G_n\right) = \delta_{mn}\, n!\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dt_n\, K_n^2(t_1,\cdots,t_n).$$

これから直ちに公式：$\langle v^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|K_n\|^2$, $\langle v \rangle = K_0$, が得られる．但し $\|\cdots\|$ は通常の L_2 ノルムである．確率微分方程式

$$dx/dt = A(x) + \sigma f(t),$$

但し x は一般に多成分でもよく，$A(x)$ は x（の成分）の多項式，の形のものでは，$x(t)$ は明きらかに $f(t')$（$s \leqq t' \leqq t$，但し s は初期時刻）の函数であるので，$x(t)$ の積分表現は

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_s^t dt_1 \cdots \int_s^t dt_n K_n(t; t_1, \cdots, t_n) G_n(t_1, \cdots, t_n)$$

の形でなければならない．従ってこれをもとの確率微分方程式に代入し，K_0, K_1, $\cdots$ を決定すれば，それらによって $x(t)$ に関する必要な情報が次式で与えられる：

$$\langle x(t) \rangle = K_0(t),$$

$$\langle x(t) x(t') \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \int_s^{\min(t,t')} dt_1 \cdots \int_s^{\min(t,t')} dt_n \; K_n(t; t_1, \cdots, t_n) K_n(t'; t_1, \cdots, t_n).$$

§2. 参考文献

1. Cameron and Martin, Ann. Math. 48 : 385 (1947).
2. Itô, J. Math. Soc. Japan 3 : 157 (1951).
3. Wiener, "Homogeneous Chaos", Amer. J. Math. 60 : 897 (1938).
4. Nisio, J. Math. Soc. Japan 12 : 207 (1960)
5. McKean, "Stochastic Differential Equations," Proceedings of a Symposium in Applied Mathematics of AMS and SIAM (Keller and McKean, eds.,

1973), p.197.

§3. 積分表現における近似について

例えば方程式 $dx/dt=-\gamma x-\lambda x^3+\sigma f(t)$ では，短い時間 Δt の間での $x(t)$ の increment は $\Delta x \sim -(\gamma x+\lambda x^3)\Delta t+\sigma f(t)\Delta t$ で与えられる．$\langle f(t)f(t')\rangle=\delta(t-t')$ からは $f(t)$ の order を評価することが困難であるが，$\int_t^{t+\Delta t} f(t')dt' \equiv \Delta B(t)$ を考えると，$\langle(\Delta B(t))^2\rangle=\Delta t$ であり，従って $\Delta B(t)\sim O(\sqrt{\Delta t})$ と考えてよい．従って Δt が小さいならば，Δx の主要部は $f(t)\Delta(t)\equiv\int_t^{t+\Delta t}f(t')dt'\equiv\Delta B(t)$ から成り立っている．次にこれが非線型の x^3 等を通じて積分され，$f(t)$ の2次・3次… の量が出現して来る．この picture は $x(t)$ の摂動展開の底にあるものであり，同時にその有効性が short time に限られることをも示唆している．

積分表現による解法では，方程式の右辺，特に上の例では $x^3(t)$，も再び積分表現に書き，2次平均ノルムの意味で互いに直交する（相関のない）ものの和に分解しておき，各次の部分空間毎に左右両辺が等しいことを要請する．実際には積分表現の kernel としてはじめの n 個しかとれないから，このような要請も低次の方の n 個の部分空間でしか満たすことができない．しかし $x(t)$ の順次の積を作るとき，この n 個の部分空間から1度は外に出るが，最後に 0次～$(n-1)$次 空間

に戻る項はすべて取り入れた形で方程式が構成される．例えば $x(t) \sim K_0(t) + \int_s^t K_1(t;t_1)G_1(t_1)dt_1 \equiv K_0 + K_1G_1$ のように近似するとき，$x^2(t) \cong \{K_0{}^2 + \|K_1\|^2\} + \iint K_1(t;t_1)K_1(t;t_2)G_2(t_1,t_2)dt_1dt_2$ のように0次と2次の項しか出ない．この $K_1K_1G_2$ の項は，例え方程式の右辺に $x^2(t)$ の項がある場合でも，実際に解くkernelの方程式には入って来ない．しかしながら $x^3(t)$ を作ると，

$$(\underset{\substack{\uparrow \\ x^2(t)\text{より}}}{K_1K_1}G_2)\times(\underset{\substack{\uparrow \\ x(t)\text{より}}}{K_1}G_1) = 2\|K_1\|^2K_1G_1 + \iiint K_1(t;t_1)K_1(t;t_2)K_1(t;t_3)G_3(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3$$

の形となり，再び1次の項が生じる．このような項はすべて，この近似において，捨う，ということになる．結果としては $K_0(t)$ と $K_1(t;t_1)$ について，Hartree-Fock的なself-consistent equationが得られる．